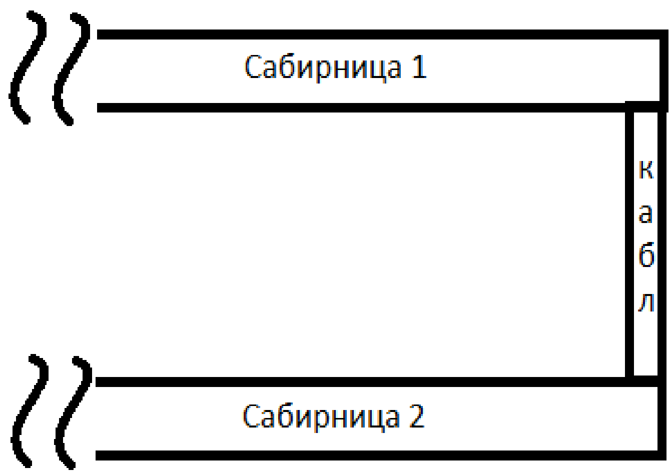
ЗАДАТАК 22

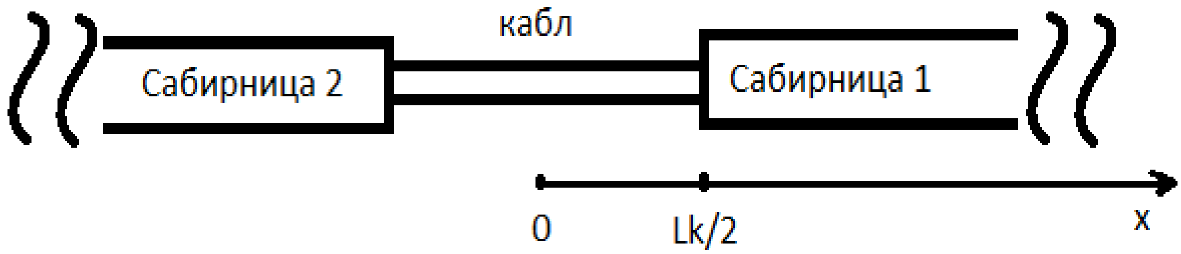
Одредити температуру најтоплије тачке система са слике кога чине две идентичне бесконачно дугачке бакарне сабирнице пресека S_s = (20x5) mm^2 спојене каблом дужине L_k = 20 cm, попречног пресека бакра S_k = 50 mm^2, са изолацијом дебљине δ_{iz} = 1.5 mm, топлотне проводности λ_{iz} = 0.2 W/mK. Читав систем се хлади природним струјањем ваздуха температуре ϑ_a = 20°C, при чему је коефицијент преласка топлоте струјањем са загрејане површи на ваздух α = 5 W/m^{2}K. Кроз сабирнице и кабл тече једносмерна струја I_{DC} = 200 A. Специфична електрична отпорност бакра је $\rho_{\_cu\_el}$ = 1.68 10^{-8} Ωm, а топлотна проводност λ_{cu} = 401 W/mK.



Решење

На основу симетрије система, може се закључити да је најтоплија тачка на средини кабла који има лошије услове хлађења у односу на сабирнице из разлога мањег попречног пресека и постојања слоја изолације.

У циљу једноставнијег решавања задатка и свођења на једнодимензиони проблем сабирнице и кабл ће се поставити дуж x-осе, при чему се почетак осе поставља у раван симетрије, тј. на координату средине кабла. Тачка споја кабла и сабирнице је на координати $x = L_k/2$.



У том случају се претпоставља да у тачкама споја два елемента различитих попречних пресека (сабирнице и кабла) сва подужна снага која провођењем крене са једног елемента, доспе у потпуности на други елемент.

Посматра се устаљено стање и за њега се пишу температурне диференцијалне једначине за сваки елемент (кабл и сабирнице).
У случају кабла, поред снаге генерисања топлоте (Џулови губици услед протицања струје), постоји и снага одвођења топлоте која има два члана. Први се односи на провођење топлоте кроз бакар дуж x-осе, а други на одвођење топлоте најпре провођењем кроз изолацију, па потом струјањем са слоја изолације на околину.
У случају сабирница, једина разлика је што се услед не постојања слоја изолације топлота одводи струјањем ваздуха ка амбијенту са саме површине бакарних сабирница.

Улазни подаци:

$Sk := 50 \cdot 10^{-6} \quad m^2$

$dk := \sqrt{4 \cdot \frac{Sk}{\pi}} = 7.979 \times 10^{-3} \quad m$

$Lk := 0.2 \; m$

$\delta\_iz := 0.0015 \; m$

$\lambda\_iz := 0.2 \frac{W}{mK}$

$Ok := (dk + 2 \cdot \delta\_iz)\pi = 0.034 \quad m$

$Sok := (dk + 2 \cdot \delta\_iz)\pi \cdot Lk = 6.898 \times 10^{-3} \quad m^2$

$a := 0.005 \; m$

$b := 0.02 \; m$

$Ss := a \cdot b = 1 \times 10^{-4} \quad m^2$

$Os := 2 \cdot (a + b) = 0.05 \quad m$

$\alpha := 5 \frac{W}{m^2 K}$

$Idc := 200 \; A$

$\rho\_cu\_el := 0.000000016 \; \Omega m$

$\lambda\_cu := 401 \frac{W}{mK}$

Подужне снаге генерисања топлоте у сабирници

$$P\gamma s\_pod := \frac{\rho\_cu\_el \cdot Idc^2}{Ss} = 6.72 \ \frac{W}{m}$$

$$P\gamma k\_pod := \frac{\rho\_cu\_el \cdot Idc^2}{Sk} = 13.44 \ \frac{W}{m}$$

Подужни отпори преносу топлоте провођењем кроз изолацију и струјањем ваздуха

$$R\_iz\_pod := \frac{1}{2\lambda\_iz \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{dk + 2 \cdot \delta\_iz}{dk}\right) = 0.254 \ \frac{Km}{W}$$

$$R\_str\_k\_pod := \frac{1}{\alpha \cdot Ok} = 5.799 \ \frac{Km}{W}$$

$$Rk := R\_iz\_pod + R\_str\_k\_pod = 6.053$$

$$R\_str\_s\_pod := \frac{1}{\alpha \cdot Os} = 4 \ \frac{Km}{W}$$

Диференцијална температурна једначина за кабл

$$\lambda_{cu} S_k \frac{\partial^2 \vartheta_k(x)}{\partial x^2} + P_{\gamma k\_pod} - \frac{\vartheta_k(x) - \vartheta_a}{R_k} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_k(x)}{\partial x^2} - q_k \vartheta_k(x) + p_k = 0$$

Диференцијална температурна једначина за сабирницу

$$\lambda_{cu} S_s \frac{\partial^2 \vartheta_s(x)}{\partial x^2} + P_{\gamma s\_pod} - \frac{\vartheta_s(x) - \vartheta_a}{R_{str\_s\_pod}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_s(x)}{\partial x^2} - q_s \vartheta_s(x) + p_{sab} = 0$$

Константни коефицијенти из нехомогених линеарних диференцијалних једначина другог реда (температурних једначина за кабл и сабирницу)

$$qk := \frac{1}{Rk \cdot \lambda\_cu \cdot Sk} = 8.24$$

$$pk := \frac{P\gamma k\_pod}{\lambda\_cu \cdot Sk} + \frac{\upsilon a}{Rk \cdot \lambda\_cu \cdot Sk} = 835.131$$

$$qs := \frac{1}{R\_str\_s\_pod \cdot \lambda\_cu \cdot Ss} = 6.234$$

$$p\_sab := \frac{P\gamma s\_pod}{\lambda\_cu \cdot Ss} + \frac{\upsilon a}{R\_str\_s\_pod \cdot \lambda\_cu \cdot Ss} = 292.269$$

Изрази за температурне зависности и њихове прве изводе од координате x, добијени из диференцијалних температурних једначина за кабл и сабирницу

$$\upsilon k(x, C1, C2) := C1 \cdot e^{\sqrt{qk} \cdot x} + C2 \cdot e^{-\sqrt{qk} \cdot x} + \frac{pk}{qk}$$

$$\upsilon kprim(x, C1, C2) := C1 \cdot \sqrt{qk} \cdot e^{\sqrt{qk} \cdot x} - C2 \cdot \sqrt{qk} \cdot e^{-\sqrt{qk} \cdot x}$$

$$\upsilon s(x, C4) := C3 \cdot e^{\sqrt{qs} \cdot x} + C4 \cdot e^{-\sqrt{qs} \cdot x} + \frac{p\_sab}{qs}$$

$$\upsilon sprim(x, C4) := C3 \cdot \sqrt{qs} \cdot e^{\sqrt{qs} \cdot x} - C4 \cdot \sqrt{qs} \cdot e^{-\sqrt{qs} \cdot x}$$

Из граничног услова да нема преноса топлоте провођењем кроз бакар када x координата тежи бесконачности

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\partial \vartheta_s(x)}{\partial x} = 0$$

може се одредити константа C3 = 0.

За преостале 3 константе C, решава се систем 3 једначине, које представљају граничне услове.

Прва два гранична услова се односе на тачку споја сабирнице и кабла. Први је да се сва подужна снага са сабирнице на споју са каблом, пренесе на кабл. Други је да су једнаке температуре сабирнице и кабла на координати споја, тј. x = $L_k/2$.

Трећи гранични услов се односи на средину кабла, тј. на координату $x = 0$, у којој је претпостављена најтоплија тачка, па се стога подужна снага генерисања топлоте на тој координати одводи ка крајевима кабла, тј. у супротним смеровима.

Претпостављене вредности константи

$C1 := -12 \quad C2 := 5 \quad C4 := 10$

Решавање система једначина са три непознате

Given

$$-(\lambda\_cu \cdot Ss)\cdot\left(\upsilon sprim\left(\frac{Lk}{2}, C4\right)\right) = -(\lambda\_cu \cdot Sk)\cdot\left(\upsilon kprim\left(\frac{Lk}{2}, C1, C2\right)\right)$$

$$\upsilon s\left(\frac{Lk}{2}, C4\right) = \upsilon k\left(\frac{Lk}{2}, C1, C2\right)$$

$$-[(\lambda\_cu \cdot Sk)\cdot(\upsilon kprim(0, C1, C2))] = 0$$

$$pom := Find(C1, C2, C3, C4)$$

$$pom = \begin{pmatrix} -22.53 \\ -22.53 \\ 0 \\ 9.676 \end{pmatrix}$$

$C1 := pom_0 \quad C2 := pom_1 \quad C3 := pom_2 \quad C4 := pom_3$

Тражена највиша температура, односно температура на средини кабла је

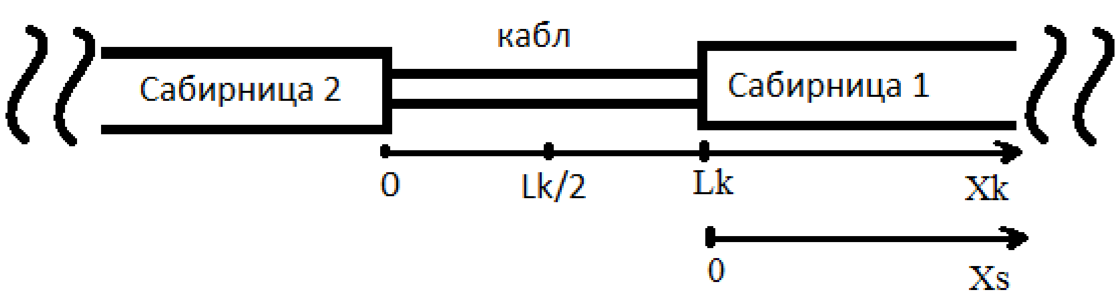
$$\upsilon k(0, C1, C2) = 56.287$$

Температура на споју кабла и сабирнице (провера)

$$\upsilon k\left(\frac{Lk}{2}, C1, C2\right) = 54.418$$

$$\upsilon s\left(\frac{Lk}{2}, C4\right) = 54.418$$

Други начин решавања задатка је могућ ако се кабл и сабирница посматрају у одвојеним координатним системима, као на слици.



У том случају би систем једначина састављен од три гранична услова имао следећу форму

Претпостављене вредности константи

$C1 := -12$ $C2 := 5$ $C4 := 10$

Решавање система једначина са 3 непознате

Given

$$-(\lambda\_cu \cdot Ss)\cdot(\upsilon sprim(0, C4)) = -(\lambda\_cu \cdot Sk)\cdot(\upsilon kprim(Lk, C1, C2))$$

$$-\left[(\lambda\_cu \cdot Sk)\cdot\left(\upsilon kprim\left(\frac{Lk}{2}, C1, C2\right)\right)\right] = 0$$

$$\upsilon s(0, C4) = \upsilon k(Lk, C1, C2)$$

$$pom := Find(C1, C2, C3, C4)$$

$$pom = \begin{pmatrix} -16.908 \\ -30.021 \\ 0 \\ 7.538 \end{pmatrix}$$

$C1 := pom_0$ $C2 := pom_1$ $C3 := pom_2$ $C4 := pom_3$

Температура на средини кабла

$$\upsilon k\left(\frac{Lk}{2}, C1, C2\right) = 56.287$$

Температура на споју кабла и сабирнице

$$\upsilon k(Lk, C1, C2) = 54.418$$

$$\upsilon s(0, C4) = 54.418$$