



# ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

## Катедра за енергетске претвараче и погоне

### Први колоквијум (први термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

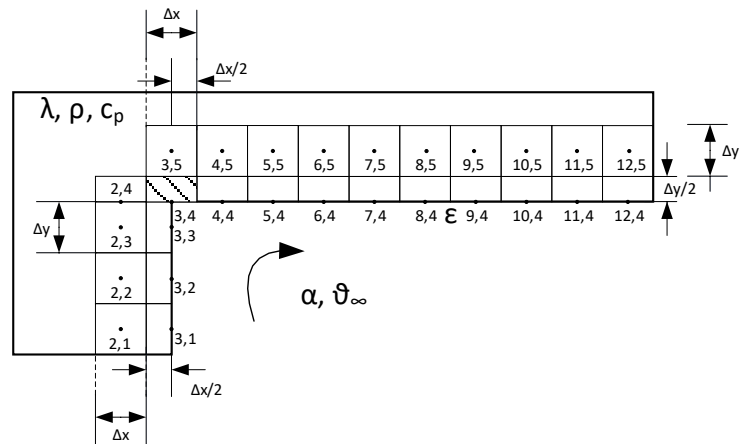
Испит траје максимално 150 минута

28. 11. 2020.

Укупан број поена износи 11

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираним површи, репрезентован тачком (3,4). При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити имплицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотна проводност материјала је  $\lambda$ , специфични топлотни капацитет је  $c_p$ , густина  $\rho$  и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре  $\vartheta_\infty$  је  $\alpha$ . При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (2,5 поена)



2. Посматрајмо електроотпорну грејну плочу стакло-керамичког шпорета снаге  $P = 1200 \text{ W}$ , пречника  $D_{gp} = 14 \text{ cm}$ . На грејну плочу се поставља метална посуда истог пречника, запремине  $V = 2 \text{ l}$ , потпуно испуњена водом. Специфични топлотни капацитет материјала од кога је сачињена шерпа износи  $c_{ps} = 474 \text{ J/(kgK)}$ , а густина  $\rho_s = 8700 \text{ kg/m}^3$ . Дебљина дна и поклопца (може се сматрати да су они облика диска), и зидова (облика шупљег цилиндра) износи  $\delta = 2 \text{ mm}$ . Густина воде  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ , специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ . Време загревања воде од почетне температуре  $20^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$  износи  $11 \text{ min}$ . Одредити минималну снагу загревања рингле за одржавање кључања? Регулацију снаге рингле могуће је вршити са кораком од  $10 \text{ W}$ . Сматрати да је једини топлотни отпор који постоји у систему отпор преносу топлоте струјање са спољне површи шерпе на околни ваздух температуре  $20^\circ\text{C}$ , при чему је коефицијент преласку топлоте струјањем константан. Топлотни капацитет грејача и плоче шпорета износи  $C_g = 450 \text{ J/K}$ . (2,5 поена)

3. Једна квадратна површ (1) странице  $a = 5 \text{ cm}$  налази се на растојању  $L$  од правоугаоне површи (2) димензија  $b \times c = 8 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ . Написати изразе из којих се могу одредити вредности фактора виђења  $F_{12}$  и  $F_{21}$ . Колико износи минимално растојање  $L$  при коме би се фактор виђења квадрата са правоугаоника ( $F_{21}$ ) могао одредити на једноставан начин, без потребе да се решава интеграл. Критеријуми за константност величина испод интеграла су следећи: да се углови у односу на нормалу не мењају за више од  $1^\circ$ , а растојања у односу на  $L$  за више од  $1\%$ . Површи су међусобно паралелне и центри им се поклапају. (3 поена)

4. За бакарну сабирницу пресека  $S_s = (80 \times 10) \text{ mm}^2$  вредност номиналне струје једнака је  $I_N = 1440 \text{ A}$ . Ова вредност добија се при температури амбијенталног ваздуха од  $\vartheta_a = 35^\circ\text{C}$  и температури бакарне сабирнице од  $\vartheta_{Cu} = 85^\circ\text{C}$  (пораств од  $50^\circ\text{C}$ ). Коефицијент преласка топлоте природним струјањем амбијенталног ваздуха по површини сабирнице износи  $\alpha = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$ , а емисивност оксидованог бакра  $\varepsilon = 0,4$ . Одредити номиналну вредност струје у случају да се на површину сабирнице нанесе слој фарбе дебљине  $\delta = 0,15 \text{ mm}$ , специфичне топлотне проводности  $\lambda = 0,2 \text{ W/mK}$  и емисивности  $\varepsilon_f = 0,9$ . При прорачуну сматрати да температура амбијента и бакра, као и коефицијент преласка топлоте струјањем остају исти као и у случају без фарбања. (3 поена)

## 1. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (3,4) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (1.1)$$

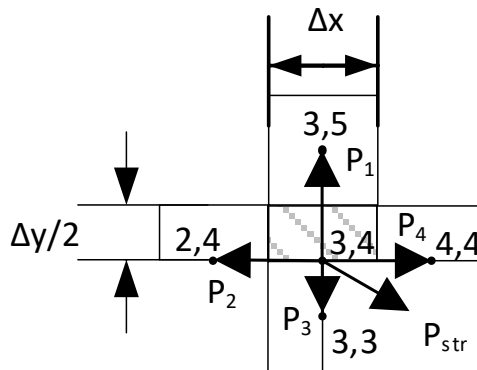
где су:

- $P_{gen}$  - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је  $P_{gen} = 0$ .

По имплицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у тренутном ( $p$ ) тренутку у односу на претходни тренутак ( $p-1$ ):

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{3,4}}{dt} = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,4}^{p-1}}{\Delta t} \quad (1.2)$$



Слика 1.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \quad (1.3)$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од четири члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 5), (2, 4), (3,3) и (4, 4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^4 P_k \quad (1.4)$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,5}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y}{L \Delta x}} \quad (1.5)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{2,4}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y / 2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{2,4}^p}{\frac{2}{\lambda L} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (1.6)$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y / 2}{L \Delta x / 2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda L} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (1.7)$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{4,4}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y / 2}} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{4,4}^p}{\frac{2}{\lambda L} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (1.8)$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha} \frac{1}{L \Delta x / 2}} = \frac{1}{2} \alpha L \Delta x (\vartheta_{3,4}^p - \vartheta_{\infty}^p) \quad (1.9)$$

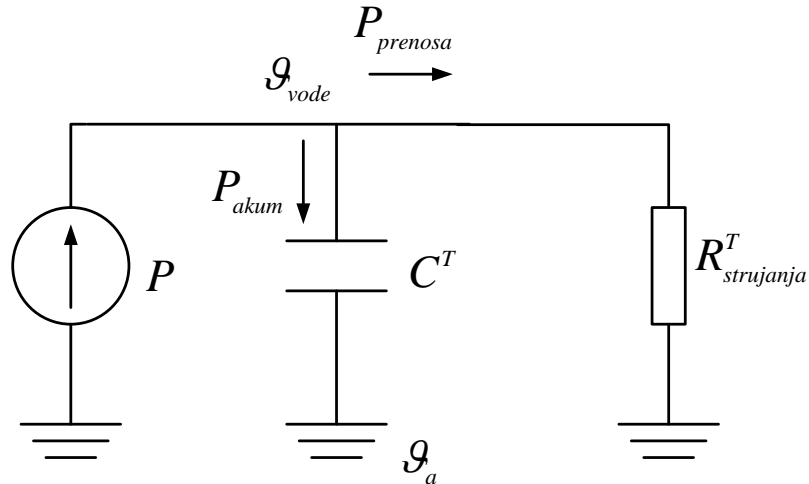
## 2. Задатак

Биланс снаге за посматрани систем (топлотна шема приказана на слици 2.1) је:

$$P = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (2.1)$$

где је

- $P$  - укупна снага којом се енергија генерише у грејачу,
- $P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у плочи, шерпи и води, и
- $P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује струјањем са околином.



Слика 2.1

Укупна снага којом се енергија акумулише у плочи, шерпи и води израчунава се као

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (2.2)$$

док се снага којом се енергија размењује са околином прорачунава коришћењем следећег израза:

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T_{str}} \quad (2.3)$$

Са  $\theta$  је означен пораст температуре воде, шерпе и плоче у односу на амбијент. Коначно, заменом израза (2.2) и (2.3) у (2.1), добијамо диференцијалну једначину:

$$C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T_{str}} = P \quad (2.4)$$

$$R^T_{str} \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R^T_{str} \cdot P \quad (2.5)$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R^T_{str} \cdot P \quad (2.6)$$

где је са  $\tau$  означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T_{str} \cdot C^T \quad (2.7)$$

Решење диференцијалне једначине (2.6) гласи:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (2.8)$$

где је са  $\theta_0$  означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са  $\theta_\infty = P \cdot R^T_{str}$  пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго и када не би не би долазило до кључања воде на  $100^\circ\text{C}$ , што у стварности није случај).

Топлотни капацитет воде, посуде и грејне плоче износи:

$$C^T = C_v^T + C_s^T + C_g^T = \rho_v \cdot V \cdot c_{pv} + \rho_s \cdot V_s \cdot c_{ps} + C_g \quad (2.9)$$

Висина посуде износи:

$$H = \frac{V}{S} = \frac{V}{\frac{\pi(D_{gp} - 2\delta)^2}{4}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{(0,14 - 2 \cdot 0,002)^2 \cdot \pi} = 0,1377 \text{ m} \quad (2.10)$$

где је  $S$  унутрашња површина посуде. Запремина материјала утрошеног при производњи посуде једнака је:

$$V_s = 2 \cdot V_{baze} + V_{omotača} = 2 \cdot \frac{0,14^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0,002 + \left( \frac{0,14^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(0,14 - 2 \cdot 0,002)^2 \cdot \pi}{4} \right) \cdot 0,1377 = 0,000180952 \text{ m}^3 \quad (2.11)$$

Топлотни капацитет воде, посуде и грејне плоче једнак је:

$$C^T = 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4200 + 8700 \cdot 0,000180952 \cdot 474 + 450 = 9596,21 \text{ J/K} \quad (2.12)$$

Отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R_{str}^T = \frac{1}{\alpha \cdot S_s} \quad (2.13)$$

где је  $\alpha$  коефицијент преласка топлоте струјањем који је потребно одредити, а  $S_s$  спољашња површина посуде (која је у додиру са ваздухом) тј. површина омотача посуде и поклопца:

$$S_s = \pi D_{gp}(H + 2\delta) + \frac{\pi D_{gp}^2}{4} = 0,077707 \text{ m}^2 \quad (2.14)$$

Заменом (2.14) у (2.13) добија се:

$$R_{str}^T = \frac{12,87}{\alpha} \quad (2.15)$$

Заменом свих вредности, из базног израза (2.8) долази се до:

$$\theta(t = 11 \text{ min}) = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = \frac{12,87}{\alpha} \cdot 1200 \cdot \left(1 - e^{-\frac{11 \cdot 60}{\alpha \cdot 9596,21}}\right) \quad (2.16)$$

$$80^\circ\text{C} = \frac{15442,68}{\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\frac{11 \cdot 60}{\alpha \cdot 9596,21}}\right) \quad (2.17)$$

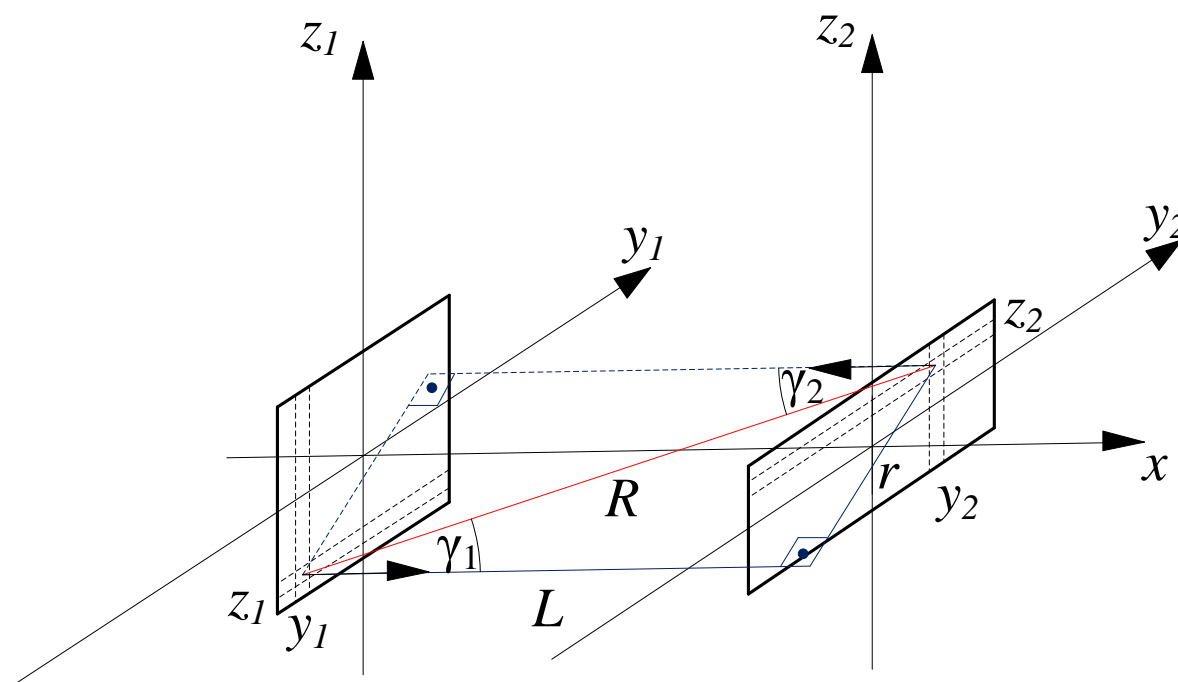
Решавањем једначине (2.17) добија се вредност коефицијента преласка топлоте струјањем  $\alpha = 11,69 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

Када вода прокључа, минимална снага потребна за одржавање кључања једнака је снази одвођења топлоте струјањем са површине посуде:

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R_{str}^T} = \frac{100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}}{\frac{12,87}{11,69}} = 72,67 \text{ W} \quad (2.18)$$

Пошто је регулацију снаге грејне плоче могуће вршити са кораком од 10 W, минимална потребна вредност снаге загревања једнака је 80 W.

### 3. Задатак



Слика 3.1

Фактор виђења правоугаоне површи (2) са квадратне површи (1) одређује се по формули

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} dS_1 dS_2 \quad (3.1)$$

Потег између два делића ових површи ( $R$ ) може се израчунати као:

$$R^2 = L^2 + r^2 = L^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (3.2)$$

Пошто ове две површи припадају паралелним равнима, углови између вектора нормале на површину и потега ( $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ) су једнаки, па важи:

$$\cos \gamma = \cos \gamma_1 = \cos \gamma_2 = \frac{L}{R} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad (3.3)$$

Сада је комбиновањем израза (3.1), (3.2) и (3.3) могуће написати коначан израз за израчунавање фактора виђења  $F_{12}$ :

$$F_{12} = \frac{1}{a^2} \int_{y_1=-a/2}^{y_1=a/2} \int_{z_1=-a/2}^{z_1=a/2} \int_{y_2=-b/2}^{y_2=b/2} \int_{z_2=-c/2}^{z_2=c/2} \frac{L^2}{\pi(L^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^2} dz_2 dy_2 dz_1 dy_1 \quad (3.4)$$

Фактор виђења површи (1) са површи (2)  $F_{21}$  се једноставно може одредити помоћу познате вредности фактора виђења  $F_{12}$ :

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_{12} = \frac{a^2}{b \cdot c} \cdot F_{12} = \frac{5^2}{3 \cdot 8} \cdot F_{12} = 1,0417 \cdot F_{12} \quad (3.5)$$

По тексту задатака, услови које је потребно испунити како би се могло сматрати да су величине под интегралом константе су:

1.  $\Delta \gamma \leq 1^\circ$ ,
2.  $\Delta R \leq 1,01 \cdot L$ ,

за било који делић површи правоугаоника.

Највећа вредност угла  $\gamma$  је у случају када се посматрају делић у доњем левом углу квадрата и делић у горњем десном углу правоугаоника, када износи

$$\arccos \left( \frac{L}{\sqrt{L^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right)^2}} \right) \quad (3.6)$$

Најмања вредност угла  $\gamma$  износи  $0$  (делићи на средини квадрата и на средини правоугаоника), тако да се услов  $\Delta \gamma \leq 1^\circ$  своди на услов да је  $\cos \gamma \geq \cos 1^\circ$

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right)^2}} \geq \cos(1^\circ) \quad (3.7)$$

$$\frac{L}{\sqrt{L^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right)^2}} \geq 0,99985 \quad (3.8)$$

$$L^2 \geq 0,99985^2 \cdot (L^2 + 58,25) \quad (3.9)$$

$$L^2 \geq 0,99985^2 \cdot (L^2 + 58,25) \quad (3.10)$$

$$L \geq \sqrt{\frac{0,99985^2 \cdot 58,25}{1 - 0,99985^2}} = 437,25 \text{ cm} \quad (3.11)$$

Услов број 2 се проверава као и претходни услов за  $\Delta \gamma \leq 1^\circ$  (делић у доњем левом углу квадрата и делић у горњем десном углу правоугаоника):

$$\sqrt{L^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} \leq 1,01 \cdot L \quad (3.12)$$

$$L^2 + 58,25 \leq 1,0201 \cdot L^2 \quad (3.13)$$

$$L \geq \sqrt{\frac{58,25}{0,0201}} = 53,83 \text{ cm} \quad (3.14)$$

На основу израза (3.11) и (3.14) закључује се да је минимално одстајање  $L = 4,37 \text{ m}$ .

#### 4. Задатак

У случају када сабирница није офарбана, целокупна снага Џулових губитака се са површине сабирнице одводи струјањем и зрачењем. У овом случају једначина биланса снага (посматрају се подужне вредности) гласи:

$$P_g = P_{str} + P_{zr} = \alpha \cdot O \cdot (\vartheta_{Cu} - \vartheta_a) + \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot O \cdot (T_{Cu}^4 - T_a^4) \quad (4.1)$$

$$P_g = \alpha \cdot 2 \cdot (a + b) \cdot (\vartheta_{Cu} - \vartheta_a) + \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot 2 \cdot (a + b) \cdot ((\vartheta_{Cu} + 273,15)^4 - (\vartheta_a + 273,15)^4) = 45 + 30,36 = 75,36 \text{ W/m} \quad (4.2)$$

И у случају офарбане сабирнице, снага Цулових губитака се одводи са површине сабирнице (фарбе) струјањем и зрачењем. Разлика је у томе што је у овом случају, због постојања топлотног отпора фарбе, температура спољашње површине фарбе ( $\vartheta_f$ ) нижа од температуре бабра ( $\vartheta_{Cu} = 85^\circ\text{C}$ ). Због различите јачине струје кроз сабирницу, у односу на случај без фарбе, разликоваће се и снага Цулових губитака, па важи:

$$P_g^f = P_{str}^f + P_{zr}^f = \alpha \cdot O^f \cdot (\vartheta_f - \vartheta_a) + \varepsilon_f \cdot O^f \cdot (T_f^4 - T_a^4) \quad (4.3)$$

$$P_g^f = \alpha \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot (\vartheta_f - \vartheta_a) + \varepsilon_f \cdot \sigma_c \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot ((\vartheta_f + 273,15)^4 - (\vartheta_a + 273,15)^4) \quad (4.4)$$

$$P_g^f = A \cdot (\vartheta_f - \vartheta_a) + B \cdot ((\vartheta_f + 273,15)^4 - (\vartheta_a + 273,15)^4) \quad (4.5)$$

где су вредности константи  $A = 0,906$  и  $B = 9,25 \cdot 10^{-9}$ . Температуру  $\vartheta_f$  је могуће одредити на основу израза за пренос топлоте провођењем кроз фарбу:

$$P_g^f = \frac{\vartheta_{Cu} - \vartheta_f}{R_{prov}^T} \quad (4.6)$$

$$\vartheta_f = \vartheta_{Cu} - P_g^f \cdot R_{prov}^T \quad (4.7)$$

где топлотни отпор провођењу има следећу вредност:

$$R_{prov}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{2(a + b)} \quad (4.8)$$

Заменом израза (4.7) у израз (4.5) добија се

$$P_g^f = A \cdot (\vartheta_{Cu} - P_g^f \cdot R_{prov}^T - \vartheta_a) + B \cdot ((\vartheta_{Cu} - P_g^f \cdot R_{prov}^T + 273,15)^4 - (\vartheta_a + 273,15)^4) \quad (4.9)$$

$$P_g^f = A \cdot \vartheta_{Cu} - A \cdot P_g^f \cdot R_{prov}^T - A \cdot \vartheta_a + B \cdot (\vartheta_{Cu} - P_g^f \cdot R_{prov}^T + 273,15)^4 - B \cdot (\vartheta_a + 273,15)^4 \quad (4.10)$$

$$B \cdot (\vartheta_{Cu} - P_g^f \cdot R_{prov}^T + 273,15)^4 - P_g^f \cdot (A \cdot R_{prov}^T + 1) + A \cdot (\vartheta_{Cu} - \vartheta_a) - B \cdot (\vartheta_a + 273,15)^4 = 0 \quad (4.11)$$

Решавањем једначине по (4.11) добија се вредност подужне снаге губитака у сабирници  $P_g^f = 112,87 \text{ W/m}$  (од четири могућа решења, два су комплексна, док се за једно од два реална лако закључује да нема физичког смисла).

Однос снаге Цулових губитака у случајевим без и са фарбом једнак је односу квадрата јачине струје:

$$\frac{P_g}{P_g^f} = \frac{I_N^2}{(I_N^f)^2} \quad (4.12)$$

Из овог израза се једноставно прорачунава тражена јачина струје  $I_N^f = 1762,3 \text{ A}$ .

Овако велика разлика у јачини струје, у односу на случај без фарбе, последица је великог повећања емисивности површине. Температура површине фарбе веома је блиска температури бабра (због дебљине слоја фарбе) и једнака је  $\vartheta_f = 84,53^\circ\text{C}$ . Ово за последицу има веома мало смањење снаге хлађења струјањем  $P_{str}^f = 44,78 \text{ W/m}$  и значајно повећање снаге хлађења зрачењем  $P_{zr}^f = 67,97 \text{ W/m}$ . Чак и у случају да се дебљина фарбе повећа на 1mm добијају се сличне вредности ( $P_g^f = 110,12 \text{ W/m}$ ,  $I_N^f = 1740 \text{ A}$ ,  $\vartheta_f = 81,94^\circ\text{C}$ ,  $P_{str}^f = 44,12 \text{ W/m}$ ,  $P_{zr}^f = 66,02 \text{ W/m}$ ).



ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Први колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

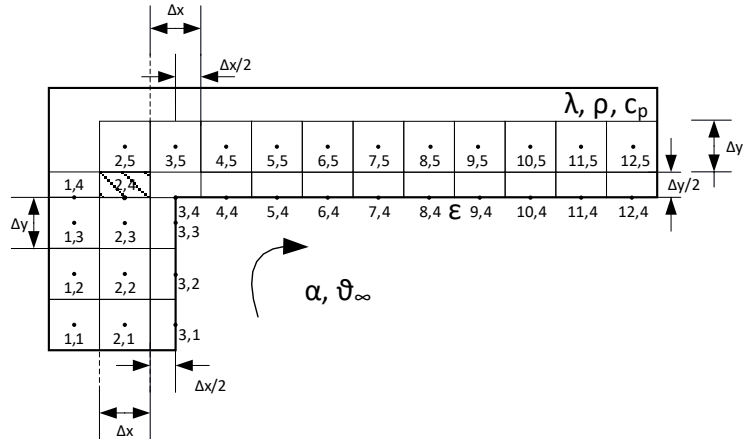
Испит траје максимално 150 минута

22. 12. 2020.

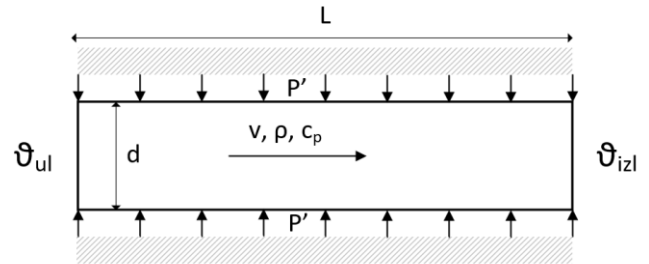
Укупан број поена износи 11,5

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

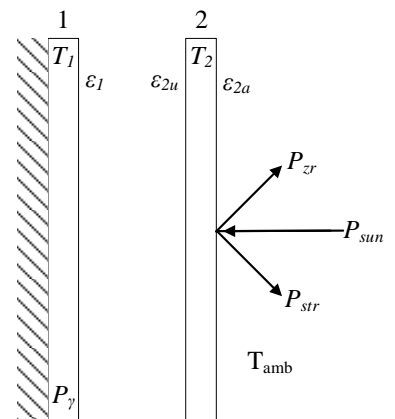
1. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (2,4). При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотна проводност материјала је  $\lambda$ , специфични топлотни капацитет је  $c_p$ , густина  $\rho$  и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре  $\vartheta_\infty$  је  $\alpha$ . При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (2,5 поена)



2. Кроз цев од материјала велике топлотне проводности, дужине  $L = 5$  m и унутрашњег пречника  $d = 5$  cm, протиче уље брзином  $v = 10$  cm/s. Температура уља на уласку у цев износи  $\vartheta_{ul} = 20^\circ\text{C}$ . Уље се загрева помоћу грејача, који је са друге стране идеално топлотно изолован, подужном снагом  $P' = 500$  W/m. Густина уља при  $20^\circ\text{C}$  износи  $\rho = 980$  kg/m<sup>3</sup>, а температурна зависност специфичног топлотног капацитета гласи  $c_p(\text{J/kgK}) = 2200 + 3,6 \cdot \vartheta$ , где је  $\vartheta$  температура у  $^\circ\text{C}$ . При решавању задатка сматрати да је вредност  $c_p$  константна, одређена према средњој температури уља на уласку и изласку из цеви. Како би се олакшало решавање задатка, усвојити претпоставку да се средња температура уља рачуна као аритметичка средина температуре уља уласку и изласку из цеви. Алтернатива оваквом приступу је дељење запремине уља на више изотермичких делова и писање једначина за сваки од њих. Одредити температуру цеви, која се може сматрати изотермичком запремином, ако је коефицијент преласка топлоте струјањем са уља на зид цеви једнак  $\alpha = 20$  W/(m<sup>2</sup>K). (3 поена)



3. Одредити температуре две велике паралелне површи (1) и (2) између којих се енергија размењује зрачењем. Површи (1) и (2) имају својства идеално сивог тела, коефицијента сивоће површи (1)  $\varepsilon_1 = 0,8$ , површи (2) ка површи (1)  $\varepsilon_{2u} = 0,2$  и површи (2) ка амбијенту  $\varepsilon_{2a} = 0,8$ . Апсорпциона својства су карактерисана коефицијентима апсорпције, који су једнаки коефицијентима сивоће (емисивностима). Због величине површи може се сматрати да су ивични ефекти занемарљиво мали. Површ (1) се загрева површинском густином снаге губитака  $P_\gamma = 1000$  W/m<sup>2</sup>. На површ (2) пада сунчево зрачење површинске густине снаге  $P_{sun} = 500$  W/m<sup>2</sup>, а хлади се природним струјањем амбијенталног ваздуха и зрачењем ка амбијенту. Коефицијент преласка топлоте струјањем је  $\alpha = 5$  W/m<sup>2</sup>K. Температура амбијенте је  $T_{amb} = 300$  K. (3 поена)



4. За бакарну сабирницу пресека  $S_s = (80 \times 10)$  mm<sup>2</sup> вредност номиналне струје једнака је  $I_N = 1760$  A. Ова вредност добија се при температури амбијенталног ваздуха од  $\vartheta_{amb,n} = 35^\circ\text{C}$  и температури бакарне сабирнице од  $\vartheta_{Cu,n} = 85^\circ\text{C}$  (пораст од  $50^\circ\text{C}$ ). Површина сабирнице је прекривена слојем фарбе дебљине  $\delta = 0,15$  mm, специфичне топлотне проводности  $\lambda = 0,2$  W/mK и емисивности  $\varepsilon_f = 0,9$ . Коефицијент преласка топлоте природним струјањем амбијенталног ваздуха износи  $\alpha = 5$  W/m<sup>2</sup>K. Одредити дозвољену вредност струје у случају температуре амбијента од  $\vartheta_{amb} = 20^\circ\text{C}$ . (3 поена)

## 1. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (2,4) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (1.1)$$

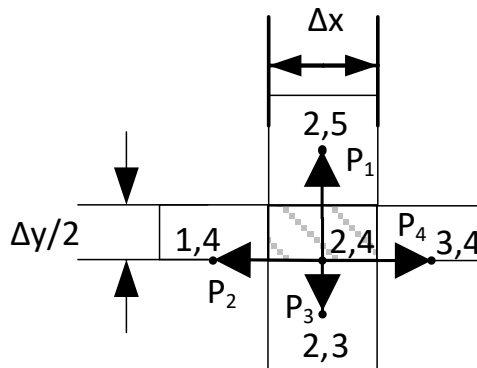
где су:

- $P_{gen}$  - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је  $P_{gen} = 0$ .

По експлицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у наредном ( $p+1$ ) тренутку у односу на садашњи тренутак ( $p$ ):

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{2,4}}{dt} = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{2,4}^{p+1} - \vartheta_{2,4}^p}{\Delta t} \quad (1.2)$$



Слика 1.1

Топлотна енергија се са тела на околину (ка осталим деловима) може пренети само провођењем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} \quad (1.3)$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од четири члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (2, 5), (1, 4), (2,3) и (3, 4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^4 P_k \quad (1.4)$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{2,4}^p - \vartheta_{2,5}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y}{L \Delta x}} \quad (1.5)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{2,4}^p - \vartheta_{1,4}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y / 2}} = \frac{\vartheta_{2,4}^p - \vartheta_{1,4}^p}{\frac{2}{\lambda L} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (1.6)$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{2,4}^p - \vartheta_{2,3}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y / 2}{L \Delta x}} = \frac{\vartheta_{2,4}^p - \vartheta_{2,3}^p}{\frac{1}{\lambda L} \frac{\Delta y}{2 \Delta x}} \quad (1.7)$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{2,4}^p - \vartheta_{3,4}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y / 2}} = \frac{\vartheta_{2,4}^p - \vartheta_{3,4}^p}{\frac{2}{\lambda L} \frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad (1.8)$$

## 2. Задатак

Прво је потребно одредити температуру уља на излазу из цеви. Целокупна топлотна енергија генерисана у цеви се преноси ка уљу и изазива пораст његове температуре дуж правца струјања (у смеру осе  $x$ ), па важи:

$$P' L = \rho c_p Q (\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) \quad (2.1)$$

$$Q = vS = v\pi \frac{d^2}{4} = 0,1 \cdot \pi \cdot \frac{0,05^2}{4} = 0,00019635 \text{ m}^3/\text{s} \quad (2.2)$$



$$\frac{P'L}{\rho Q} = (2200 + 3,6 \frac{\vartheta_{izl} + \vartheta_{ul}}{2})(\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) \quad (2.3)$$

$$\frac{P'L}{\rho Q} = 2200(\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) + 1,8(\vartheta_{izl}^2 - \vartheta_{ul}^2) \quad (2.4)$$

$$\vartheta_{izl}^2 + \frac{2200}{1,8}\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}^2 - \frac{2200}{1,8}\vartheta_{ul} - \frac{P'L}{1,8\rho Q} = 0 \quad (2.5)$$

Решавањем квадратне једначине добија се да је температура уља на изласку из цеви једнака  $\vartheta_{izl} = 25,69^\circ\text{C}$ . По услову задатка, можемо апроксимирати вредност  $c_p$  као:

$$c_p = 2200 + 3,6 \frac{\vartheta_{izl} + \vartheta_{ul}}{2} = 2282,242 \text{ J/kgK} \quad (2.6)$$

Посматрајмо део цеви дужине  $dx$  на растојању  $x$  од почетка цеви. Топлота предата уљу, на овом делу цеви може се записати као:

$$dP_\alpha = \rho c_p Q (\vartheta(x + dx) - \vartheta(x)) \quad (2.7)$$

$$dP_\alpha = \rho c_p Q \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} dx \quad (2.8)$$

Топлота (из израза (2.7) и (2.8)) се на уље преноси струјањем, па важи:

$$dP_\alpha = \alpha d\pi (\vartheta_{cevi} - \vartheta(x)) dx \quad (2.9)$$

Изједначавањем израза (2.9) и (2.8) добијамо следећу диференцијалну једначину:

$$\rho c_p Q \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} dx = \alpha d\pi (\vartheta_{cevi} - \vartheta(x)) dx \quad (2.10)$$

$$\frac{\rho c_p Q}{\alpha d\pi} \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} + \vartheta(x) = \vartheta_{cevi} \quad (2.11)$$

$$A \cdot \frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x} + \vartheta(x) = \vartheta_{cevi} \quad (2.12)$$

Опште решење диференцијалне једначине (2.12) је:

$$\vartheta(x) = C_1 e^{-\frac{x}{A}} + \vartheta_{cevi} \quad (2.13)$$

Интеграциону константу  $C_1$  добијамо на основу граничног услова за температуру на координати  $x = 0$ :

$$\vartheta(x = 0) = C_1 + \vartheta_{cevi} = \vartheta_{ul} \quad (2.14)$$

$$C_1 = \vartheta_{ul} - \vartheta_{cevi} \quad (2.15)$$

Заменом израза (2.15) у (2.13) добија се коначан израз за промену температуре уља дуж цеви:

$$\vartheta(x) = (\vartheta_{ul} - \vartheta_{cevi}) e^{-\frac{x}{A}} + \vartheta_{cevi} \quad (2.16)$$

Температура цеви добија се из једнакости температуре на другој граничној површи ( $x = L$ ):

$$\vartheta(x = L) = (\vartheta_{ul} - \vartheta_{cevi}) e^{-\frac{L}{A}} + \vartheta_{cevi} = \vartheta_{izl} \quad (2.17)$$

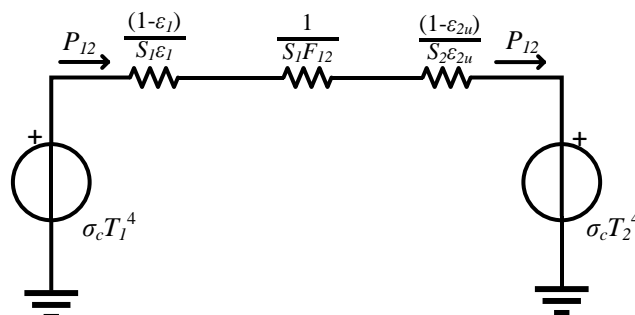
Решавањем линеарне једначине (2.17) по температури цеви добија се:

$$\vartheta_{cevi} = 181,94^\circ\text{C} \quad (2.18)$$

### 3. Задатак

Нака важи  $T_1 > T_2$ , ова претпоставка нема утицаја на коначно решење задатка, а олакшава нотацију.

Површи (1) и (2) међусобно размењују топлоту само зрачењем. Снага размене енергије између ове две површи може се одредити помоћу радијационе шеме приказане на слици 3.1.



Слика 3.1

Пошто су површи веома велике и паралелне, фактор виђења између њих је једнак јединици, па важи:

$$P_{12} = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1 - \varepsilon_{2u}}{\varepsilon_{2u} S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1}{\varepsilon_{2u}} - 1} = \frac{\sigma_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{2u}} - 1} (T_1^4 - T_2^4) S \quad (3.1)$$

Површинска густина снаге размене топлоте зрачењем између површи (1) и (2) је

$$P_{12,S} = \frac{\sigma_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{2u}} - 1} (T_1^4 - T_2^4) \quad (3.2)$$

Површ (1) је са леве стране потпуно изолована, а са десне јој се топлота одводи ( $T_1 > T_2$ ) зрачењем. У површи (1) постоји генерисање губитака површинском густином  $P_\gamma$ , па је једначина биланса снаге има облик:

$$P_\gamma = P_{12,S} \quad (3.3)$$

У случају површи (2), лева гранична површ се загрева зрачењем са површи (1), а десна се загрева сунчевим зрачењем и хлади струјањем ваздуха и зрачењем ка амбијенту. Једначина биланса снаге за површ (2) има облик:

$$P_{12,S} = P_{str} + P_{zr} - \varepsilon_{2a} \cdot P_{sun} \quad (3.4)$$

Изрази за површинске густине снаге одвођења топлоте струјањем и зрачењем могу се написати као:

$$P_{str} = \alpha \cdot (T_2 - T_{amb}) \quad (3.5)$$

$$P_{zr} = \sigma_c \cdot \varepsilon_{2a} \cdot (T_2^4 - T_{amb}^4) \quad (3.6)$$

Заменом израза(3.3), (3.5) и (3.6) у (3.4) добија се:

$$P_\gamma = \alpha \cdot (T_2 - T_{amb}) + \sigma_c \cdot \varepsilon_{2a} \cdot (T_2^4 - T_{amb}^4) - \varepsilon_{2a} \cdot P_{sun} \quad (3.7)$$

Решавањем једначине четвртог степена (3.7) добијају се четири решења, од којих је само једно реално и позитивно. То решење је  $T_2 = 406,288$  К. Температура површи (1) добија се решавањем једначине (3.2), уз уважавање израза (3.3).

$$T_1 = \left( P_\gamma \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_{2u}} - 1}{\sigma_c} + T_2^4 \right)^{1/4} = 588,371 \text{ K} \quad (3.8)$$

#### 4. Задатак

Целокупна снага Цулових губитака се са површине сабирнице одводи струјањем и зрачењем. У номиналном случају једначина биланса снага (посматрају се подужне вредности) гласи:

$$P_{g,n} = P_{str,n} + P_{zr,n} = \alpha \cdot O \cdot (\vartheta_{p,n} - \vartheta_{amb,n}) + \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot O \cdot (T_{p,n}^4 - T_{amb,n}^4) \quad (4.1)$$

$$P_{g,n} = \alpha \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot (\vartheta_{p,n} - \vartheta_{amb,n}) + \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot \left( (\vartheta_{p,n} + 273,15)^4 - (\vartheta_{amb,n} + 273,15)^4 \right) \quad (4.2)$$

где је  $\vartheta_{p,n}$  температура спољашње површине фарбе на сабирници. Ову температуру могуће је одредити на основу израза за пренос топлоте провођењем кроз фарбу:

$$P_{g,n} = \frac{\vartheta_{Cu,n} - \vartheta_{p,n}}{R_{prov}^T} \quad (4.3)$$

$$\vartheta_{p,n} = \vartheta_{Cu,n} - P_{g,n} \cdot R_{prov}^T \quad (4.4)$$

где топлотни отпор провођењу има следећу вредност:

$$R_{prov}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{2(a + b)} \quad (4.5)$$

Заменом израза (4.4) и (4.5) у (4.2) добија се једначина четвртог степена чијим се решавањем вредност снаге губитака у номиналном случају:

$$P_{g,n} = \alpha \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot \left( \vartheta_{Cu,n} - P_{g,n} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{2(a + b)} - \vartheta_{amb,n} \right) + \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot \left( \left( \vartheta_{Cu,n} - P_{g,n} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{2(a + b)} + 273,15 \right)^4 - (\vartheta_{amb,n} + 273,15)^4 \right) \quad (4.6)$$

Решавањем ове једначине добијају се четири решења од којих су два комплексна, а два реална (112,8 и 824063). Од реалних решења само решење  $P_{g,n} = 112,8$  W има физичког смисла.

У случају када се промени температура амбијента, аналогно једначини (4.6) могуће је написати једначину за биланс снага:

$$P_g = \alpha \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot \left( \vartheta_{cu,n} - P_g \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{2(a+b)} - \vartheta_{amb} \right) + \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot 2 \cdot ((a + 2\delta) + (b + 2\delta)) \cdot \left( \left( \vartheta_{cu,n} - P_g \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{2(a+b)} + 273,15 \right)^4 - (\vartheta_{amb} + 273,15)^4 \right) \quad (4.7)$$

Решавањем ове једначине добија се нова вредност снаге губитака. И у овом случају добијају се четири решења од којих су два комплексна, а два реална (141,2 и 824055). Од реалних решења само решење  $P_g = 141,2 \text{ W}$  има физичког смисла.

Однос снаге Цулових губитака у ова два случаја једнак је односу квадрата јачине струје:

$$\frac{P_{g,n}}{P_g} = \frac{I_N^2}{I^2} \quad (4.8)$$

Из овог израза се једноставно прорачунава тражена јачина струје:

$$I = I_N \sqrt{\frac{P_g}{P_{g,n}}} = 1968,852 \text{ A} \quad (4.9)$$



ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Други колоквијум (први термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 150 минута

Укупан број поена износи 11

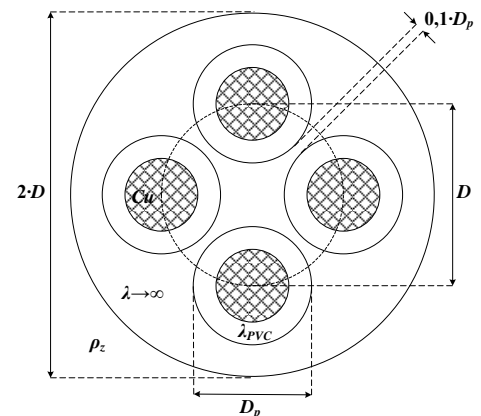
28. 12. 2020.

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Елемент једне електроенергетске компоненте се у термичком смислу може посматрати као тело по чијој се запремини генеришу губици запреминском густином  $q_v$ . Специфична топлотна проводност материјала износи  $\lambda$ . Попречни пресек тела износи  $S$ , а обим попречног пресека према околном уљу за хлађење износи  $O$ . Први део, дужине  $L_1$ , се слабо хлади, па се снага преноса топлоте према уљу може занемарити. У другом делу, дужине  $L_2$ , коефицијент преласка топлоте струјањем ка уљу температуре  $\mathcal{G}_f$  има константну вредност  $\alpha$ . Може се сматрати да је гранична површ другог дела (према уљу),  $x = L_1 + L_2$ , адијабатска и да је, на основу мерења, њена температура ( $\mathcal{G}_m$ ) позната. Пренос топлоте зрачењем се може занемарити. Одредити расподелу температуре дуж тела ( $x \in [0, L_1 + L_2]$ ), у коме фигуришу 4 интеграционе константе. У решењу је потребно поставити граничне услове, односно систем од 4 једначине из којих се могу одрадити 4 интеграционе константе. (3п)

2. Један трансформатор са ODAF хлађењем се хлади помоћу 4 компактна хладњака чија је укупна номинална снага хлађења 30% већа од снаге укупних губитака у трансформатору. Познато је да су номинални губици услед струје оптерећења  $R = 5$  пута већи од номиналних губитака у магнетном колу. Сматра се да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлот и хладног уља:  $\mathcal{G}_{nm} = 85^\circ\text{C}$  и  $\mathcal{G}_{hm} = 78,9^\circ\text{C}$ , температуре хладног и топлот ваздуха:  $\mathcal{G}_{hvm} = 40^\circ\text{C}$  и  $\mathcal{G}_{vm} = 60,8^\circ\text{C}$ , номинална снага  $P_{hm} = 220\text{kW}$ . Колико ће износити релативно оптерећење при коме се достиже номинална температура најтоплије тачке ( $98^\circ\text{C}$ ) ако је температура амбијента  $20^\circ\text{C}$ , а коефицијент проласка топлоте услед тренутне запрљаности хладњака мањи за 20% од вредности при потпуно чистом хладњаку. Познате су вредности разлике средње температуре намотаја и средње температуре уља ( $g_n = 17\text{ K}$ ) и фактора најтоплије тачке ( $H = 1,3$ ). Усвојити следеће апроксимације: однос разлике средње температуре намотаја и средње температуре уља и његове номиналне вредности ( $g/g_n$ ) је сразмеран квадрату релативног оптерећења, протоци уља и ваздуха једнаки као за номиналне услове, параметри уља и ваздуха су исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру. (3п)

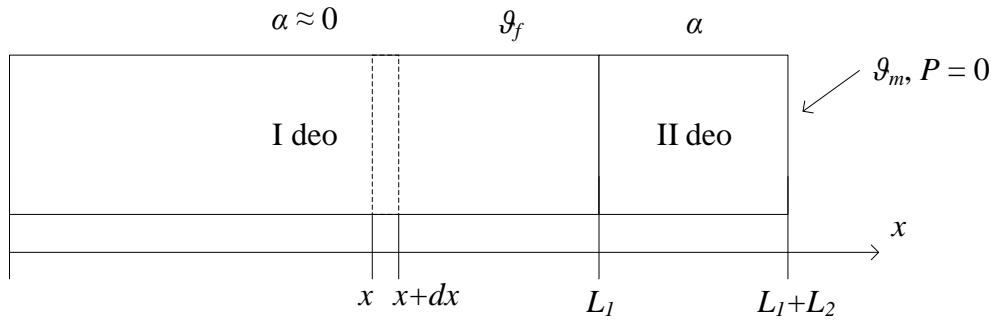
3. Четири једножилна кабла пресека бабра (специфична електрична проводност на  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_{20\text{ Cu}} = 56 \cdot 10^6\text{ S/m}$  и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром  $\alpha_{Cu20} = 4,29 \cdot 10^{-3}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )  $S_{Cu} = 95\text{ mm}^2$ , са PVC изолацијом дебљине изолације  $\delta_{iz} = 1\text{ mm}$  (топлотне специфичне проводности  $\lambda_{PVC} = 0,16\text{ W/(mK)}$ ) положена је у тло специфичне топлотне отпорности  $\rho_z = 2,5\text{ (mK)/W}$ . Центри бакарних проводника налазе се на кругу пречника  $D$ . Проводници су заливени материјалом добре топлотне проводности тако да се налазе у цилиндру пречника  $2D$ . Максимална дозвољена температура PVC изолације износи  $\mathcal{G}_{doz} = 70^\circ\text{C}$ , а температура земље удаљене од кабла  $\mathcal{G}_z = 20^\circ\text{C}$ . Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл. При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтно тло", на коме је температура једнака  $\mathcal{G}_z = 20^\circ\text{C}$ , може узети цилиндар ваљка пречника  $D_{ref} = 1000\text{ mm}$ . (2,5п)



4. Описати поједностављен приступ из техничке препоруке бр. 3 који се користи за уважавање неравномерног дијаграма оптерећења при димензионисању кабловских водова положених у земљу. При одговору на питање објаснити која је полазна претпоставка на основу које је одређен фактор оптерећења (фактор испуне)  $m$ , за конзум који се напаја из НН и СН мреже, односно из  $110\text{ kV}$  мреже. (2,5п)

## 1. Задатак

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део тела, дужине  $dx$ , на растојању  $x$  (слика 1) гласи:



Слика 1.1

$$q_x + dq_{gen} = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (1.1)$$

где је  $q_x$  снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе  $x$  (на месту  $x$ ),  $dq_{gen}$  запреминска густина генерисане снаге губитака, а  $dq_{strujanja}$  снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине  $dx$ . Зависност снаге провођења од координате  $x$  гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (1.2)$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати  $x$ , једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (1.3)$$

Израз (1.3) важи само за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине  $dx$  је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_f) \quad (1.4)$$

Снага којом се генеришу губици у делићу дужине  $dx$  је

$$dq_{gen} = q_v \cdot S \cdot dx \quad (1.5)$$

Уврштавањем у једначину (1.1) израза за диференцијал функције (1.3), снаге преноса топлоте струјањем (1.4) и снаге генерисања губитака (1.5), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_f) - q_v \cdot S \cdot dx \quad (1.6)$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_f) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (1.7)$$

За део ребра дужине  $L_1$  тј. за  $x \in [0, L_1]$  важи  $\alpha = 0$  па једначина (1.7) постаје:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \quad (1.8)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине је:

$$\vartheta(x) = C_1 + C_2 x - \frac{q_v}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 \quad (1.9)$$

За део ребра дужине  $L_2$  тј. за  $x \in [L_1, L_1 + L_2]$  важи  $\alpha \neq 0$  па је потребно решити диференцијалну једначину (1.7), чије је поште решење:

$$\vartheta(x) = C_3 e^{mx} + C_4 e^{-mx} + \vartheta_f + \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \quad (1.10)$$

где је  $m$  параметар одређен изразом:

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (1.11)$$

Дакле, промена температуре дуж тела се описује следећим изразом:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} C_1 + C_2 x - \frac{q_v}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2, & x \in [0, L_1] \\ C_3 e^{mx} + C_4 e^{-mx} + \vartheta_f + \frac{q_v}{\alpha \cdot O}, & x \in [L_1, L_1 + L_2] \end{cases} \quad (1.12)$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалних једначина се одређују на основу граничних услова за базе на почетку и крају сваког од делова (на почетку првог дела дужине  $L_1$ ), на додирној површи два дела са различитим коефицијентима преласка топлоте струјањем и на крају другог дела дужине  $L_2$ .

1. Први гранични услов се поставља за граничну површ тела ка уљу (на координати  $x = L_1 + L_2$ ) која је у додиру са расхладним флуидом, температуре  $\vartheta_f$ :

$$\vartheta(x = L_1 + L_2) = \vartheta_m \quad (1.13)$$

2. Такође, и други гранични услов се поставља за граничну површ тела ка уљу ( $x = L_1 + L_2$ ):

$$-\lambda \cdot \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L_1+L_2} = 0 \quad (1.14)$$

3. Трећи гранични услов се добија из једнакости температура на споју два дела ребра на координати  $x = L_1$ :

$$\vartheta(x = L_1^-) = \vartheta(x = L_1^+) \quad (1.15)$$

4. Четврти гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на додирној површи са координатом  $x = L_1$  од ње и ка њој:

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L_1^-} = -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L_1^+} \quad (1.16)$$

Заменом израза (1.12) у изразе (1.13), (1.14), (1.15) и (1.16) добија се тражени систем од четири једначине:

$$C_3 e^{m(L_1+L_2)} + C_4 e^{-m(L_1+L_2)} + \vartheta_f + \frac{q_v}{\alpha \cdot O} = \vartheta_m \quad (1.17)$$

$$C_3 m e^{m(L_1+L_2)} - C_4 m e^{-m(L_1+L_2)} = 0 \quad (1.18)$$

$$C_1 + C_2 L_1 - \frac{q_v}{2 \cdot \lambda} \cdot L_1^2 = C_3 e^{mL_1} + C_4 e^{-mL_1} + \vartheta_f + \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \quad (1.19)$$

$$C_2 - \frac{q_v}{\lambda} \cdot L_1 = C_3 m e^{mL_1} - C_4 m e^{-mL_1} \quad (1.20)$$

Овде се завршава решење задатка (остатак је информативног карактера).

Из једначине (1.18) добија се:

$$C_3 = C_4 e^{-2m(L_1+L_2)} \quad (1.21)$$

Заменом овог израза у (1.17) добија се вредност параметра  $C_4$ :

$$C_4 e^{-m(L_1+L_2)} + C_4 e^{-m(L_1+L_2)} + \vartheta_f + \frac{q_v}{\alpha \cdot O} = \vartheta_m \quad (1.22)$$

$$C_4 = \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{m(L_1+L_2)} \quad (1.23)$$

Сада, на основу (1.21) добијамо и вредност  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{-m(L_1+L_2)} \quad (1.24)$$

Заменом израза (1.24) и (1.23) у израз (1.20) могуће је одредити и вредност  $C_2$ :

$$C_2 = \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{-m(L_1+L_2)} \cdot m e^{mL_1} - \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{m(L_1+L_2)} \cdot m e^{-mL_1} + \frac{q_v}{\lambda} \cdot L_1 \quad (1.25)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} m \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{-mL_2} - \frac{1}{2} m \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{mL_2} + \frac{q_v}{\lambda} \cdot L_1 \quad (1.26)$$

$$C_2 = -m \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) \cdot \sinh(mL_2) + \frac{q_v}{\lambda} \cdot L_1 \quad (1.27)$$

Коначно, заменом израза (1.24), (1.23) и (1.27) у израз (1.19) могуће је одредити и вредност  $C_1$ :

$$C_1 = -C_2 L_1 + \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{-m(L_1+L_2)} \cdot e^{mL_1} + \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{m(L_1+L_2)} \cdot e^{-mL_1} + \vartheta_f + q_v \left( \frac{L_1^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{\alpha \cdot O} \right) \quad (1.28)$$

$$C_1 = -C_2 L_1 + \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{-mL_2} + \frac{1}{2} \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) e^{mL_2} + \vartheta_f + q_v \left( \frac{L_1^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{\alpha \cdot O} \right) \quad (1.29)$$

$$C_1 = -C_2 L_1 + \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) \cosh(mL_2) + \vartheta_f + q_v \left( \frac{L_1^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{\alpha \cdot O} \right) \quad (1.30)$$

$$C_1 = mL_1 \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) \cdot \sinh(mL_2) - \frac{q_v \cdot L_1^2}{\lambda} + \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) \cosh(mL_2) + \vartheta_f + q_v \left( \frac{L_1^2}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{\alpha \cdot O} \right) \quad (1.31)$$

$$C_1 = \left( \vartheta_m - \vartheta_f - \frac{q_v}{\alpha \cdot O} \right) (mL_1 \cdot \sinh(mL_2) + \cosh(mL_2)) + \vartheta_f + q_v \left( \frac{1}{\alpha \cdot O} - \frac{L_1^2}{2 \cdot \lambda} \right) \quad (1.32)$$

## 2. Задатак

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_{p,n} S (\vartheta_{tizl,n} - \vartheta_{hizl,n} - \vartheta_{tul,n} + \vartheta_{hul,n})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tizl,n} - \vartheta_{hizl,n}}{\vartheta_{tul,n} - \vartheta_{hul,n}} \right)} = \frac{K_{p,n} S (\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})}{\ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}} \right)} \quad (2.1)$$

Применом израза (2.1) на номиналне податке хладњака се добија:

$$\Delta\vartheta_{izl,n} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 18,1^\circ\text{C} \quad (2.2)$$

$$\Delta\vartheta_{ul,n} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 45^\circ\text{C} \quad (2.3)$$

Заменом ових вредности у израз (2.1), уз  $P_{hn} = 220\text{kW}$  добија се да је:

$$K_{p,n} S = \frac{P_{hn} \cdot \ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl,n}}{\Delta\vartheta_{ul,n}} \right)}{(\Delta\vartheta_{izl,n} - \Delta\vartheta_{ul,n})} = 7448,52 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \quad (2.4)$$

За уље и воду можемо написати следећа два израза:

$$P_{hn} = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \quad (2.5)$$

$$P_{hn} = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \quad (2.6)$$

Одавде добијамо да:

$$\rho_u Q_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}} = 36065,57 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \quad (2.7)$$

$$\rho_v Q_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}} = 10576,92 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C}} \quad (2.8)$$

Пошто постоје четири хладњака, укупна расхладна снага је  $P_{hm,uk} = 4 \cdot P_{hn} = 880$ . Номинална снага хладњака је за 30% већа од номиналне снаге губитака, па важи  $P_{g,n} = P_{hm,uk} / 1,3 = 676,92\text{ kW}$ . Номиналне вредности губитака услед протикања струје и у магнетском колу су једнаке:

$$P_{Cu,n} = \frac{R}{R+1} \cdot P_{g,n} = \frac{5}{6} \cdot P_{g,n} = 564,1\text{ kW} \quad (2.9)$$

$$P_{Fe,n} = \frac{1}{R+1} \cdot P_{g,n} = \frac{1}{6} \cdot P_{g,n} = 112,82\text{ kW} \quad (2.10)$$

У посматраном радном режиму, при температури амбијента од  $20^\circ\text{C}$ , релативно струјно оптерећење трансформатора је  $\beta$ . По тексту задатка важи:

$$\frac{g}{g_n} = \beta^2 \quad (2.11)$$

Одавде се добија:

$$g = \beta^2 \cdot g_n \quad (2.12)$$

Температура најтоплије тачке се рачуна као:

$$\vartheta_{hs} = \vartheta_a + \theta_{gu} + H \cdot \beta^2 \cdot g_n = \vartheta_{tu} + H \cdot \beta^2 \cdot g_n \quad (2.13)$$

$$\vartheta_{tu} = \vartheta_{hs} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n \quad (2.14)$$

У посматраном режиму укупна снага губитака једнака је:

$$P_g = P_{Cu} + P_{Fe} = \beta^2 \cdot P_{Cu,n} + P_{Fe,n} = (5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n} \quad (2.15)$$

па је расхладна снага једног хладњака:

$$P_h = \frac{P_g}{4} = \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1)}{4} \cdot P_{Fe,n} \quad (2.16)$$

Сада, за ову снагу хлађења могу се написати изрази аналогни изразима (2.1), (2.5) и (2.6):

$$P_h = \frac{K_p S (\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}} \right)} \quad (2.17)$$

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \quad (2.18)$$

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (2.19)$$

где је  $K_p S = 0,8 \cdot K_{p,n} S = 5958,81 \text{ W/}^\circ\text{C}$ . Температура хладног ваздуха једнака је амбијенталној ( $\vartheta_{hv} = 20^\circ\text{C}$ ), па се на основу израза (2.19) добија да је:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} \quad (2.20)$$

Из једначине (2.18) се добија:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} \quad (2.21)$$

Уврштавањем израза (2.14) и (2.16) у (2.21) добија се:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{hs} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_u Q_u c_{pu}} \quad (2.22)$$

Заменом израза (2.14), (2.16), (2.20) и (2.22) у (2.17) долази се до:

$$\frac{(5 \cdot \beta^2 + 1)}{4} \cdot P_{Fe,n} \cdot \ln \left( \frac{\vartheta_{hs} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_u Q_u c_{pu}} - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_v Q_v c_{pv}} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{hs} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n - \vartheta_{hv}} \right) \quad (2.23)$$

$$= K_p S (\vartheta_{hs} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_u Q_u c_{pu}} - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_v Q_v c_{pv}} - \vartheta_{hv} - \vartheta_{hs} + H \cdot \beta^2 \cdot g_n + \vartheta_{hv})$$

$$\frac{(5 \cdot \beta^2 + 1)}{4} \cdot P_{Fe,n} \cdot \ln \left( \frac{\vartheta_{hs} - \vartheta_{hv} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_u Q_u c_{pu}} - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_v Q_v c_{pv}}}{\vartheta_{hs} - \vartheta_{hv} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n} \right) \quad (2.24)$$

$$= -K_p S \left( \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_u Q_u c_{pu}} + \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_v Q_v c_{pv}} \right)$$

$$\ln \left( \frac{\vartheta_{hs} - \vartheta_{hv} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_u Q_u c_{pu}} - \frac{(5 \cdot \beta^2 + 1) \cdot P_{Fe,n}}{4 \rho_v Q_v c_{pv}}}{\vartheta_{hs} - \vartheta_{hv} - H \cdot \beta^2 \cdot g_n} \right) = -K_p S \left( \frac{1}{\rho_u Q_u c_{pu}} + \frac{1}{\rho_v Q_v c_{pv}} \right) \quad (2.25)$$

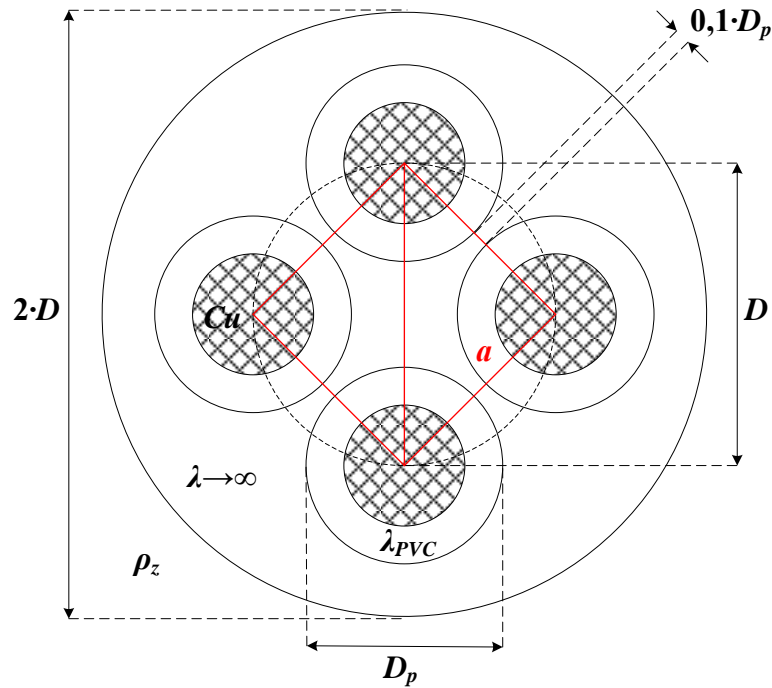
$$\ln \left( \frac{78 - 22,1 \cdot \beta^2 - 0,782 \cdot (5 \cdot \beta^2 + 1) - 2,667 \cdot (5 \cdot \beta^2 + 1)}{78 - 22,1 \cdot \beta^2} \right) = -5958,81 \cdot (0,000122) \quad (2.26)$$

$$\ln \left( 1 - \frac{17,244 \cdot \beta^2 + 3,449}{78 - 22,1 \cdot \beta^2} \right) + 0,729 = 0 \quad (2.27)$$

Решавањем ове једначине по  $\beta^2$  добија се  $\beta^2 = 1,2873$ , односно  $\beta = 1,13$ .



### 3. Задатак



Слика 3.1

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10,998 \approx 11 \text{ mm}, \quad (3.1)$$

па је спољашњи пречник једножилног кабла:

$$D_p = D_u + 2\delta_{iz} = 11 + 2 = 13 \text{ mm} \quad (3.2)$$

Спајањем центара проводника добија се квадрат станице  $a$  (слика 3.1):

$$a = 2 \cdot \frac{D_p}{2} + 0,1 \cdot D_p = 1,1 \cdot D_p = 14,3 \text{ mm} \quad (3.3)$$

Дијагонала овог квадрата једнака је пречнику круга на којем се налазе центри проводника:

$$D = a\sqrt{2} = 1,1 \cdot \sqrt{2} \cdot D_p = 20,22 \text{ mm} \quad (3.4)$$

У граничном случају, при дозвољеној једносмерној струји, температура бакарног проводника једнака је  $70^\circ\text{C}$ , па вредност подужне електричне отпорности бака износи:

$$R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} = \frac{1}{\sigma \cdot S} (1 + \alpha(70^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})) = \frac{1}{56 \cdot 95} (1 + 4,29 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 2,28 \cdot 10^{-4} \Omega \quad (3.5)$$

У стационарном топлотном стању сва топлота која настаје као последица Џулових губитака у бакарном проводнику одводи се, преко PVC изолације, ка околном материјалу добре топлотне проводности (температуре  $\vartheta$ ). Ово стање описује се следећом једначином:

$$R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} \cdot I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{PVC}^T} \quad (3.6)$$

Одакле се долази до:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} \cdot R_{PVC}^T}} \quad (3.7)$$

Вредност подужне топлотне отпорности изолације проводника износи:

$$R_{PVC}^T = \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} \ln\left(\frac{D_p}{D_u}\right) = 0,166 \text{ Km/W} \quad (3.8)$$

Топлота генерисана Џуловим губицима у сва четири проводника ( $4 \cdot R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} \cdot I^2$ ) одводи се са површине материјала добре топлотне проводности (цилиндар пречника  $2D$ ) провођењем у околно тло:

$$4 \cdot R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} \cdot I^2 = \frac{\vartheta - \vartheta_z}{R_z^T} \quad (3.9)$$

где је:

$$R_z^T = \frac{\rho_z}{2\pi} \ln\left(\frac{D_{ref}}{2D}\right) = 1,276 \text{ Km/W} \quad (3.10)$$

Комбиновањем израза (3.6) и (3.9) добија се:

$$4 \cdot \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{PVC}^T} = \frac{\vartheta - \vartheta_z}{R_z^T} \quad (3.11)$$

Решавањем једначине (3.11) добија се температура  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \frac{4\vartheta_{doz} + \vartheta_z \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}}{4 + \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}} = 68,42^\circ\text{C} \quad (3.12)$$

Сада се из израза (3.7) добија тражена вредност струје:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 68,42}{2,28 \cdot 10^{-4} \cdot 0,166}} = 204,21 \text{ A} \quad (3.13)$$

#### **4. Задатак**

Часови предавања од 25 до 27, поглавље 1. Полагање каблова у ров.



# ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

## Катедра за енергетске претвараче и погоне

### Испит / други колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута / 150 минута  
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

25. 1. 2021.

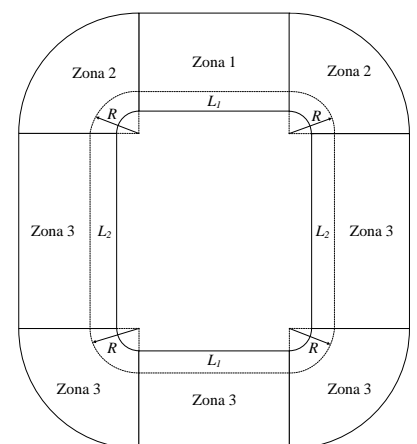
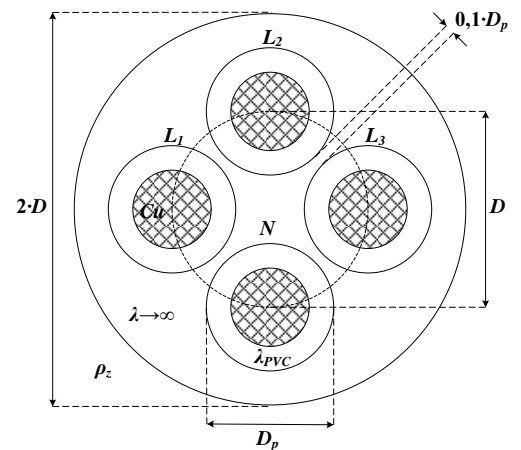
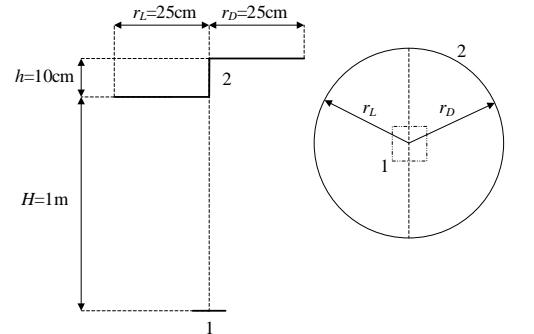
1. Одредити фактор виђења површи (2) са елементарне површи (1), приказаних на слици (дати су погледи са стране и одозго). Површ 2 се састоји од два полудиска и вертикалне правоугаоне површи димензија 10cm x 50cm. (2п/0п)

2. Један трофазни четворожилни кабл пресека бабра (специфична електрична проводност на 20°C  $\sigma_{20\text{Cu}} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$  и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром  $\alpha_{\text{Cu}20} = 4,29 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )  $S_{\text{Cu}} = 95 \text{ mm}^2$ , са PVC изолацијом дебљине изолације  $\delta_{\text{iz}} = 1 \text{ mm}$  (топлотне специфичне проводности  $\lambda_{\text{PVC}} = 0,16 \text{ W/(mK)}$ ) положен је у тло специфичне топлотне отпорности  $\rho_z = 2,5 \text{ (mK)/W}$ . Центри бакарних проводника налазе се на кругу пречника  $D$ . Проводници су заливени материјалом добре топлотне проводности тако да је спољашњи пречник кабла једнак  $2D$  (слика). Максимална дозвољена температура PVC изолације износи  $\vartheta_{\text{doz}} = 70^\circ\text{C}$ , а температура земље удаљене од кабла  $\vartheta_z = 20^\circ\text{C}$ . Одредити максимално дозвољену вредност струје која протиче кроз проводнике кабла који нападај симетрично трофазно оптерећење. При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтно тло", на коме је температура једнака  $\vartheta_z = 20^\circ\text{C}$ , може узети цилиндар пречника  $D_{\text{ref}} = 1000 \text{ mm}$ . Занемарити скин ефекат и ефекат близине. (2п/2,5п)

3. Одредити термосифонске силе, које изазивају струјање уља код трансформатора са ON хлађењем, непосредно након укључења трансформатора оптерећеног номиналном струјом и након успостављања стационарног стања. Позната је висина хладњака ( $H_h$ ), висина намотаја ( $H_n$ ) и то да се дно хладњака налази на растојању  $h_{nn}$  изнад дна намотаја. Непосредно након старта, температура доњег уља једнака је температури амбијента ( $\vartheta_{\text{amb}}$ ), у намотају долази до загревања уља које, на изласку, има температуру ( $\vartheta_{\text{gun,poc}}$ ). Ово уље се меша са великом масом хладног уља (на температури доњег уља), али утиче на његову температуру са кашњењем. У стационарном стању, познате су температуре горњег и доњег уља ( $\vartheta_{\text{gun,stab}}$  и  $\vartheta_{\text{dun,stab}}$ ) – тада је температура уља на изласку из намотаја једнака температури уља на уласку у хладњак. Позната је промена густине уља са температуром:  $\rho = \rho_0 \cdot \beta \cdot \vartheta$  (где је  $\rho_0$  густина уља на  $0^\circ\text{C}$ , а  $\vartheta$  температура уља). Термосифонска сила се може одредити као површина затворене контуре промене густине уља. Посматрати само једну контуру уља (један намотај и један хладњак). (2,5п/3п)

4. Посматра се један навојак *shell type* трансформатора (слика) у вертикалној равни. Због великог протока уља може се сматрати да уље којим се намотај хлади има константну температуру  $\vartheta_{\text{su}}$ . Навојак се састоји од више концентричних проводника, од којих је један приказан на слици испрекиданом линијом. Губици у проводнику се генеришу запреминском густином  $q_v$ . Специфична топлотна проводност материјала износи  $\lambda$ . Попречни пресек проводника износи  $S$ , а обим попречног пресека према околном уљу за хлађење износи  $O$ . Део навојка, означен на слици као зона 1, се слабо хлади и може се сматрати да у том делу нема преноса топлоте ка уљу. У зонама 2 и 3 коефицијенти преласка топлоте струјањем су једнаки  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , респективно. Поставити скуп од три диференцијалне једначине које потпуно описују систем и написати њихово опште решење. Написати и граничне услове за одређивање 6 интеграционих константи. Занемарити провођење топлоте ка суседним проводницима, као и пренос топлоте зрачењем. (2,5п/3п)

5. Објаснити принцип континуалног мерења средње температуре намотаја (спреге Y) напонске стране трансформатора која је током огледа загревања кратко спојена. Нацртати и шему филтера који се користе при мерењу једносмерне мерне струје и напона. (2п/2,5п)



### 1. Задатак

Фактор виђења између површи (1) и (2) одређује се по формули:

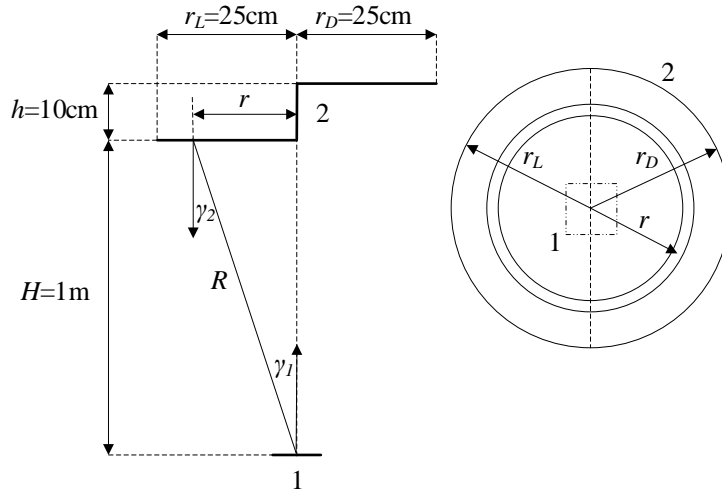
$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} dS_1 dS_2 \quad (1.1)$$

Обзиром да се површ (1) може сматрати елементарном (углови  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и растојање  $R$  са слике 1.1 су приближно константни за све тачке површи  $S_1$ ), израз (1.1) се трансформише у

$$F_{12} = \int_{S_2} \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} dS_2 \quad (1.2)$$

Углови  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  су углови са паралелним крацима, па важи  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , односно

$$F_{12} = \int_{S_2} \frac{\cos^2 \gamma}{R^2 \pi} dS_2 \quad (1.3)$$



Слика 1.1

Површ (2) се састоји из два хоризонтална полукруга (на различитим висинама,  $H$  и  $H+h$ ) и вертикалног правоугаоника који их спаја. Површински интеграл из израза (1.3) се може написати као сума три површинска интеграла по ова три елемента површине (2). Како је правоугаоник вертикалан и пошто је површ (1) елементарна, површински интеграл по овој површини је једнак нули. Дакле, израз (1.3) се може написати као:

$$F_{12} = \int_{S_{2L}} \frac{\cos^2 \gamma_L}{R_L^2 \pi} dS_{2L} + \int_{S_{2D}} \frac{\cos^2 \gamma_D}{R_D^2 \pi} dS_{2D} \quad (1.4)$$

где индекс L означава леви полукруг, а индекс D десни. За величине у израз (1.4) важи:

$$R_L^2 = H^2 + r^2 \quad (1.5)$$

$$R_D^2 = (H+h)^2 + r^2 \quad (1.6)$$

$$\cos \gamma_L = \frac{H}{R_L} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}} \quad (1.7)$$

$$\cos \gamma_D = \frac{H+h}{R_D} = \frac{H+h}{\sqrt{(H+h)^2 + r^2}} \quad (1.8)$$

Израз (1.4) сада постаје:

$$F_{12} = \int_{r=0}^{r_L} \frac{1}{(H^2 + r^2)\pi} \cdot \frac{H^2}{H^2 + r^2} \cdot r\pi dr + \int_{r=0}^{r_D} \frac{1}{((H+h)^2 + r^2)\pi} \cdot \frac{(H+h)^2}{(H+h)^2 + r^2} \cdot r\pi dr \quad (1.9)$$

$$F_{12} = \int_{r=0}^{r_L} \frac{H^2 r \pi dr}{(H^2 + r^2)^2} + \int_{r=0}^{r_D} \frac{(H+h)^2 r \pi dr}{((H+h)^2 + r^2)^2} \quad (1.10)$$

Први интеграл једнак је:

$$\int_{r=0}^{r_L} \frac{H^2 r \pi dr}{(H^2 + r^2)^2} = -\frac{H^2}{2(H^2 + r_L^2)} + \frac{H^2}{2H^2} = \frac{1}{2} - \frac{H^2}{2(H^2 + r_L^2)} \quad (1.11)$$

Аналогно, други интеграл једнак је:

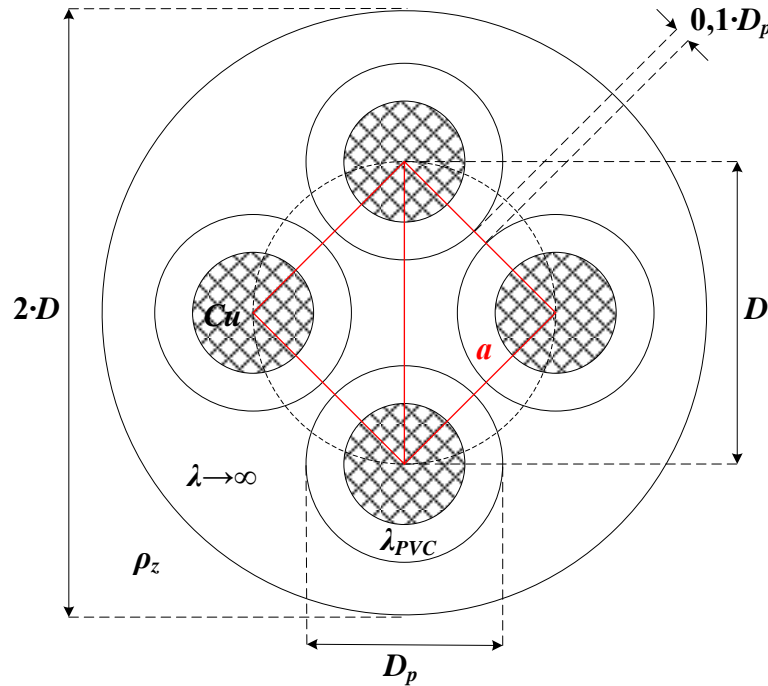
$$\int_{r=0}^{r_D} \frac{(H+h)^2 r \pi dr}{((H+h)^2 + r^2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{(H+h)^2}{2((H+h)^2 + r_D^2)} \quad (1.12)$$

Коначно, добија се израз за вредност фактора виђења:

$$F_{12} = 1 - \frac{H^2}{2(H^2 + r_L^2)} - \frac{(H+h)^2}{2((H+h)^2 + r_D^2)} \quad (1.13)$$

Заменом бројних вредности добија се  $F_{12} = 0,054$ .

## 2. Задатак



Слика 2.1

Пречник бакарног проводника износи

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10,998 \approx 11 \text{ mm}, \quad (2.1)$$

па је спољашњи пречник једне жиле кабла:

$$D_p = D_u + 2\delta_{iz} = 11 + 2 = 13 \text{ mm} \quad (2.2)$$

Спајањем центара проводника добија се квадрат станице  $a$  (слика 2.1):

$$a = 2 \cdot \frac{D_p}{2} + 0,1 \cdot D_p = 1,1 \cdot D_p = 14,3 \text{ mm} \quad (2.3)$$

Дијагонала овог квадрата једнака је пречнику круга на којем се налазе центри проводника:

$$D = a\sqrt{2} = 1,1 \cdot \sqrt{2} \cdot D_p = 20,22 \text{ mm} \quad (2.4)$$

У граничном случају, при дозвољеној једносмерној струји, температура бакарног проводника једнака је  $70^\circ\text{C}$ , па вредност подужне електричне отпорности бабра износи:

$$R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} = \frac{1}{\sigma \cdot S} (1 + \alpha(70^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})) = \frac{1}{56 \cdot 95} (1 + 4,29 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 2,28 \cdot 10^{-4} \Omega \text{m} \quad (2.5)$$

У стационарном топлотном стању сва топлота која настаје као последица Џулових губитака у бакарном проводнику одводи се, преко PVC изолације, ка околном материјалу добре топлотне проводности (температуре  $\vartheta$ ). Ово стање описује се следећом једначином:

$$R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} \cdot I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{PVC}^T} \quad (2.6)$$

Одакле се долази до:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{Cu}^{70^\circ\text{C}} \cdot R_{PVC}^T}} \quad (2.7)$$

Вредност подужне топлотне отпорности изолације проводника износи:

$$R_{PVC}^T = \frac{1}{2\pi\lambda_{PVC}} \ln\left(\frac{D_p}{D_u}\right) = 0,166 \text{ Km/W} \quad (2.8)$$

Топлота генерисана Цуловим губицима у три оптерећена проводника ( $3 \cdot R_{Cu}^{70^\circ C} \cdot I^2$ ) одводи се са површине материјала добре топлотне проводности (цилиндар пречника  $2D$ ) провођењем у околно тло:

$$3 \cdot R_{Cu}^{70^\circ C} \cdot I^2 = \frac{\vartheta - \vartheta_z}{R_z^T} \quad (2.9)$$

где је:

$$R_z^T = \frac{\rho_z}{2\pi} \ln\left(\frac{D_{ref}}{2D}\right) = 1,276 \text{ Km/W} \quad (2.10)$$

Комбиновањем израза (2.6) и (2.9) добија се:

$$3 \cdot \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta}{R_{PVC}^T} = \frac{\vartheta - \vartheta_z}{R_z^T} \quad (2.11)$$

Решавањем једначине (2.11) добија се температура  $\vartheta$ :

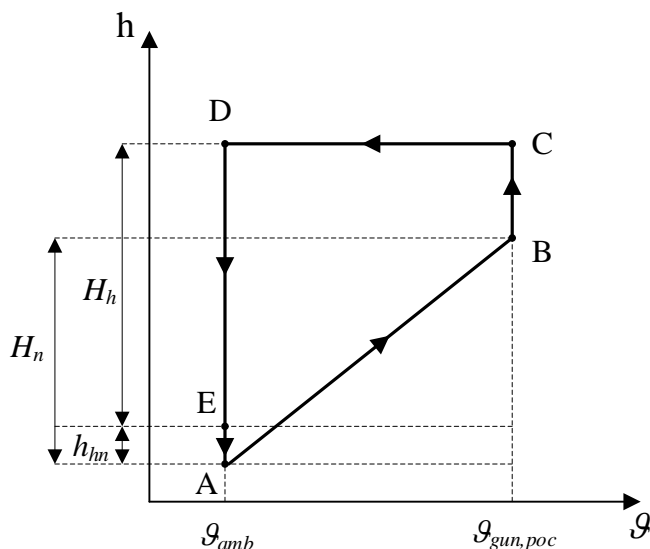
$$\vartheta = \frac{3\vartheta_{doz} + \vartheta_z \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}}{3 + \frac{R_{PVC}^T}{R_z^T}} = 67,92^\circ\text{C} \quad (2.12)$$

Сада се из израза (2.7) добија тражена вредност струје:

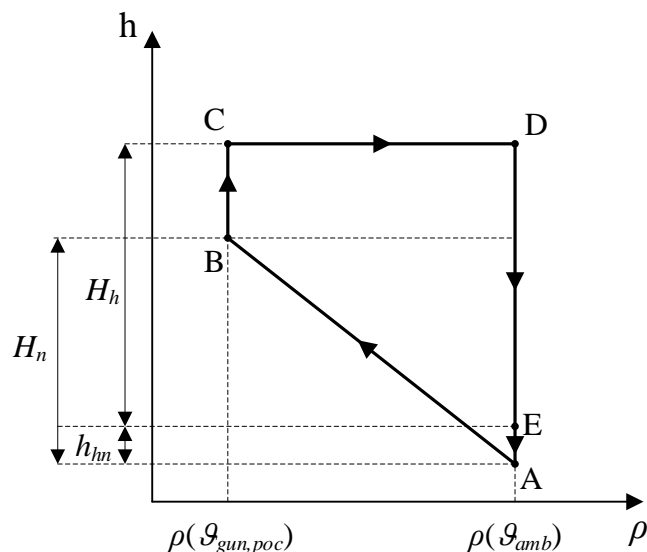
$$I = \sqrt{\frac{70 - 67,92}{2,28 \cdot 10^{-4} \cdot 0,166}} = 234,29 \text{ A} \quad (2.13)$$

### 3. Задатак

Дијаграм промене температуре уља по висини, непосредно након пуштања трансформатора у погон, приказан је на слици 3.1. По тексту задатка, непосредно након изласка топлог уља из намотаја, долази до његовог мешања са масом хладног уља. Због постојања кашњења у промени температуре уља, температура уља на уласку у хладњак једнака је температури доњег уља ( $\vartheta_{amb}$ ). На основу познате зависности густине уља од температуре, могуће је, на основу дијаграма на слици 3.1, нацртати и дијаграм промене густине уља са висином (слика 3.2).



Слика 3.1



Слика 3.2

Вредност термосифонске силе је једнака површини затворене контуре поромене густине уља (слика 3.2):

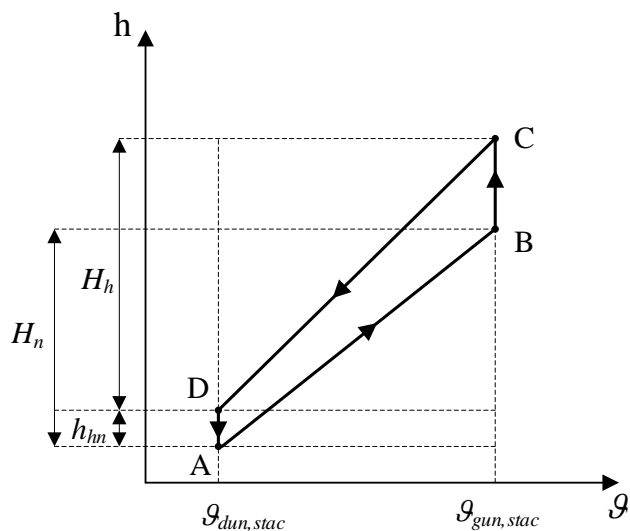
$$TSS_{poc} = (\rho(\vartheta_{amb}) - \rho(\vartheta_{gun,poc})) \cdot (H_h + h_{hn} - H_n) + \frac{1}{2}(\rho(\vartheta_{amb}) - \rho(\vartheta_{gun,poc})) \cdot H_n \quad (3.1)$$

$$TSS_{poc} = (\rho(\vartheta_{amb}) - \rho(\vartheta_{gun,poc})) \cdot \left(H_h + h_{hn} - H_n + \frac{1}{2}H_n\right) \quad (3.2)$$

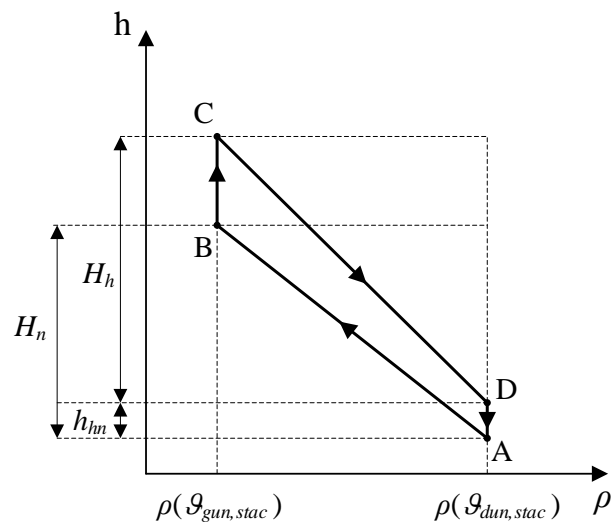
$$TSS_{poc} = (\rho_0 - \beta\vartheta_{amb} - \rho_0 + \beta\vartheta_{gun,poc}) \cdot \left(H_h + h_{hn} - \frac{1}{2}H_n\right) \quad (3.3)$$

$$TSS_{poc} = \beta \cdot (\vartheta_{gun,poc} - \vartheta_{amb}) \cdot \left(H_h + h_{hn} - \frac{1}{2}H_n\right) \quad (3.4)$$

Дијаграми промене температуре и густине уља, након достизања стационарног стања, приказани су на сликама 3.3 и 3.4.



Слика 3.3



Слика 3.4

Вредност термосифонске силе, након достизања стационарног стања, износи:

$$TSS_{stac} = \left[ \left( \rho(\vartheta_{dun,stac}) - \rho(\vartheta_{gun,stac}) \right) \cdot h_{hn} + \frac{1}{2} \left( \rho(\vartheta_{dun,stac}) - \rho(\vartheta_{gun,stac}) \right) \cdot H_h \right] - \frac{1}{2} \left( \rho(\vartheta_{dun,stac}) - \rho(\vartheta_{gun,stac}) \right) \cdot H_n \quad (3.5)$$

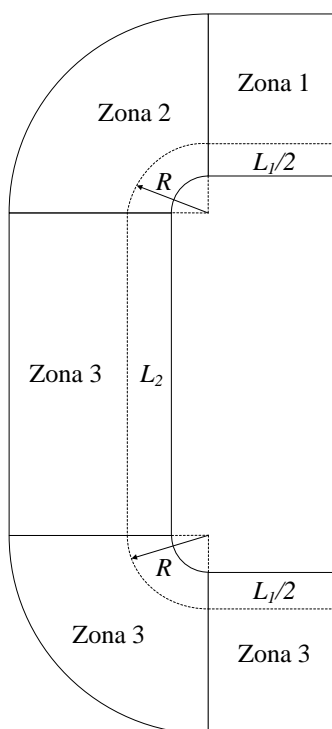
$$TSS_{stac} = \left( \rho(\vartheta_{dun,stac}) - \rho(\vartheta_{gun,stac}) \right) \cdot \left( h_{hn} + \frac{1}{2} H_h - \frac{1}{2} H_n \right) \quad (3.6)$$

$$TSS_{stac} = \left( \rho_0 - \beta \vartheta_{dun,stac} - \rho_0 + \beta \vartheta_{gun,stac} \right) \cdot \left( h_{hn} + \frac{1}{2} H_h - \frac{1}{2} H_n \right) \quad (3.7)$$

$$TSS_{stac} = \beta \cdot \left( \vartheta_{gun,stac} - \vartheta_{dun,stac} \right) \cdot \left( h_{hn} + \frac{1}{2} H_h - \frac{1}{2} H_n \right) \quad (3.7)$$

#### 4. Задатак

На основу геометрије и расподеле коефицијента преноса топлоте струјањем, закључује се да навојак има једну равну симетрију (која пролази кроз средину зоне 1 и хоризонталне зоне 3), па се у даљим разматрањима може посматрати само једна половина навојка (слика 4.1). Такође, на основу симетрије, закључује се да су граничне површи у равни симетрије адијабатске, односно да кроз њих нема преноса топлоте провођењем.



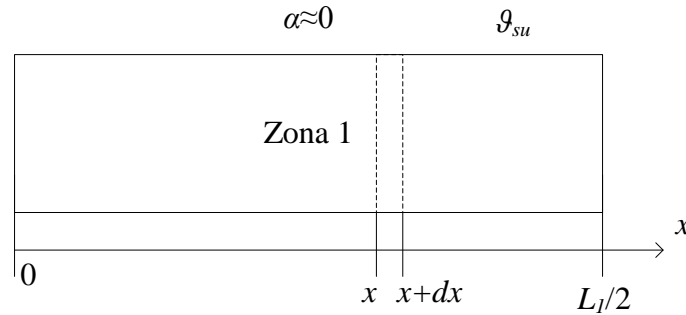
Слика 4.1

Тражени систем од три диференцијалне једначине, односи се на једначине којима се описује промена температуре дуж једног проводника навојка у свакој од три зоне означене на слици (у тексту задатка и слици 4.1).

Математички исказ биланса снага, за елементарни део проводника у зони 1, дужине  $dx$ , на растојању  $x$  (слика 4.2), где је координатни почетак  $x$ -осе на граничној површи између зона 1 и 2, гласи:

$$q_x + dq_{gen} = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (4.1)$$

где је  $q_x$  снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе  $x$  (на месту  $x$ ),  $dq_{gen}$  запреминска густина генерисане снаге губитака, а  $dq_{strujanja}$  снага којом се топлота одводи струјањем са омотача проводника, који је у контактну са уљем, дужине  $dx$ .



Слика 4.2

Зависност снаге провођења од координате  $x$  гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (4.2)$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек проводника не мења по координати  $x$ , једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (4.3)$$

Израз (4.3) важи само за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине  $dx$  је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{su}) \quad (4.4)$$

Снага којом се генеришу губици у делићу дужине  $dx$  је

$$dq_{gen} = q_v \cdot S \cdot dx \quad (4.5)$$

Уврштавањем у једначину (4.1) израза за диференцијал функције (4.3), снаге преноса топлоте струјањем (4.4) и снаге генерисања губитака (4.5), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{su}) - q_v \cdot S \cdot dx \quad (4.6)$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж проводника:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{su}) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (4.7)$$

За део проводника у зони 1, дужине  $L_1/2$  тј. за  $x \in [0, L_1/2]$  важи  $\alpha = 0$  па једначина (4.7) постаје:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \quad (4.8)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине је:

$$\vartheta_1(x) = C_1 + C_2 x - \frac{q_v}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 \quad (4.9)$$

где је  $x \in [0, L_1/2]$ .

Диференцијална једначина, која описује промену температуре дуж проводника у зони 2, која има сити облик као и једначина(4.7):

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} = \frac{\alpha_2 \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta_2(x) - \vartheta_{su}) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (4.10)$$

где је  $x \in [0, \frac{1}{2} R\pi]$ , а координатни почетак  $x$ -осе се, у овом случају, налази на граничној површи између зона 2 и 3. Опште решење диференцијалне једначине (4.10) гласи:

$$\vartheta_2(x) = C_3 e^{mx} + C_4 e^{-mx} + \vartheta_{su} + \frac{q_v \cdot S}{\alpha_2 \cdot O} \quad (4.11)$$

где је  $m$  параметар одређен изразом:



$$m^2 = \frac{\alpha_2 \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (4.12)$$

Слична ствар важи и за део проводника у зони 3, само се коефицијент преласка топлоте струјањем ( $\alpha_3$ ) и дужина ( $\frac{L_1}{2} + \frac{1}{2}R\pi + L_2$ ) разликују. У овом случају, диференцијална једначина гласи:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial x^2} = \frac{\alpha_3 \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta_3(x) - \vartheta_{su}) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (4.13)$$

где је  $x \in [0, \frac{L_1}{2} + \frac{1}{2}R\pi + L_2]$ , а координатни почетак  $x$ -осе се налази на граничној површи зоне 3 која се поклапа са равни симетрије. Опште решење диференцијалне једначине (4.13) гласи:

$$\vartheta_3(x) = C_5 e^{nx} + C_6 e^{-nx} + \vartheta_{su} + \frac{q_v \cdot S}{\alpha_3 \cdot O} \quad (4.14)$$

где је  $n$  параметар одређен изразом:

$$n^2 = \frac{\alpha_3 \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (4.15)$$

На крају, потребно је написати и шест граничних услова, на основу којих је могуће одредити вредности непознатих интеграционих константи ( $C_1 - C_6$ ):

1. Први гранични услов се поставља за адијабатску површ у зони 1 ( $x = L_1/2$ ):

$$-\lambda \cdot \left( \frac{d\vartheta_1}{dx} \right)_{x=L_1/2} = 0 \quad (4.16)$$

2. Други гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 1 и 2:

$$\vartheta_1(x=0) = \vartheta_2\left(x = \frac{1}{2}R\pi\right) \quad (4.17)$$

3. Трећи гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 1 и 2, од ње и ка њој:

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta_1}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \left( \frac{d\vartheta_2}{dx} \right)_{x=\frac{1}{2}R\pi} \quad (4.18)$$

4. Четврти гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 2 и 3:

$$\vartheta_2(x=0) = \vartheta_3\left(x = \frac{L_1}{2} + \frac{1}{2}R\pi + L_2\right) \quad (4.19)$$

5. Пети гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 2 и 3, од ње и ка њој:

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta_2}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \left( \frac{d\vartheta_3}{dx} \right)_{x=\frac{L_1}{2} + \frac{1}{2}R\pi + L_2} \quad (4.20)$$

6. Шести гранични услов се поставља за адијабатску површ у зони 3 ( $x = 0$ ):

$$-\lambda \cdot \left( \frac{d\vartheta_3}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (4.21)$$

## **5. Задатак**

Часови предавања од 22 до 24 ([линк](#)), одељак 7.5.2.



ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

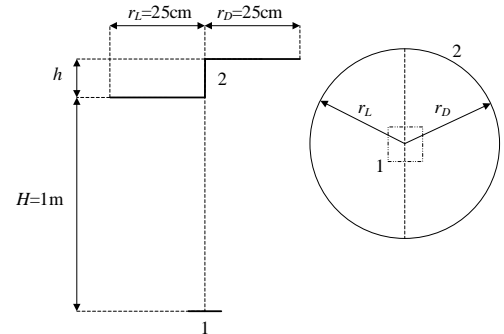
Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит / други колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута / 150 минута  
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

22. 2. 2021.

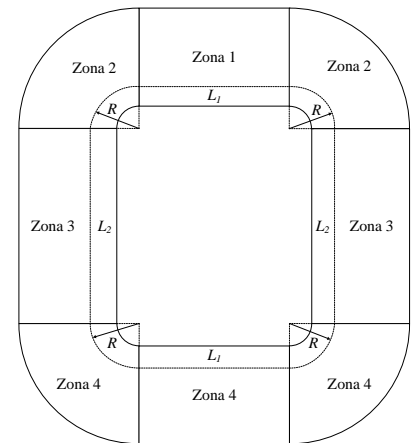
1. Одредити минималну и максималну вредност фактора виђења површи (2) са елементарне површи (1), приказаних на слици (дати су погледи са стране и одозго), при чему се висина  $h$  мења у опсегу -20cm (десни полудиск испод левог) до 30cm (десни полудиск изнад левог – ситуација приказана на слици). Површ 2 се састоји од два полудиска и вертикалне правоугаоне површи димензија 10cm x 50cm. (2п/0п)



2. Написати израз за снагу хлађења размењивача топлоте уље - вода, за размењивач за који се у литератури може наћи зависност коефицијента  $F$ . На који се начин квантификује, односно у математички модел уводи, задрљање хладњака? Површи ка уљу ( $S_u$ ) и ка води ( $S_v$ ) се разликују. (2п/2,5п)

3. У стационарном температурном стању трансформатора са ON хлађењем познате су температуре доњег уља, на изласку из хладњака и уласку у намотаје ( $\mathcal{G}_{du}$ ), уља на врху од сваког од два намотаја ( $\mathcal{G}_{gun1}$  и  $\mathcal{G}_{gun2}$ ) и помешаног горњег уља на уласку у хладњак ( $\mathcal{G}_{guh}$ ). Позната је промена густине уља са температуром:  $\rho = \rho_0 \cdot \beta \cdot \mathcal{G}$  (где је  $\rho_0$  густина уља на  $0^\circ\text{C}$ , а  $\mathcal{G}$  температура уља). Термосифонска сила се може одредити као површина затворене контуре промене густине уља. Шрафирати површи термосифонских сила које делују у контури струјања уља која се затвара кроз први намотај и контури струјања уља која се затвара кроз други намотај. Позната је висина хладњака ( $H_h$ ), висине намотаја ( $H_{n1}$  и  $H_{n2}$ ) и вертикално растојање од дна сваког од намотаја до дна хладњака ( $h_{hm1}$  и  $h_{hm2}$ ). Дно намотаја 1 се налази на најнижој позицији, изнад њега се налази дно намотаја 2, а изнад њега дно хладњака. Врх намотаја 1 се налази на најнижој позицији, изнад њега се налази врх намотаја 2, а изнад њега врх хладњака. (2,5п/3п)

4. Посматра се један навојак *shell type* трансформатора (слика) у вертикалној равни. Познате су температуре уља у зонама 1 и 2 –  $\mathcal{G}_{u1}$ , у зони 3 –  $\mathcal{G}_{u2}$  и у зони 4 –  $\mathcal{G}_{u3}$ , при чему се може сматрати да су оне мало променљиве по свакој зони. Навојак се састоји од више концентричних проводника, од којих је један приказан на слици испрекиданом линијом. Губици у проводнику се генеришу запреминском густином  $q_v$ . Специфична топлотна проводност материјала износи  $\lambda$ . Попречни пресек проводника износи  $S$ , а обим попречног пресека према околном уљу за хлађење износи  $O$ . Део навојка, означен на слици као зона 1, се слабо хлади и може се сматрати да у том делу нема преноса топлоте ка уљу. У зонама 2, 3 и 4 коефицијенти преласка топлоте струјањем су једнаки  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ , респективно. Поставити скуп од четири диференцијалне једначине које потпуно описују систем и написати њихово опште решење. Написати и граничне услове за одређивање 8 интеграционих константи. Занемарити провођење топлоте ка суседним проводницима, као и пренос топлоте зрачењем. (2,5п/3п)



5. Посматра се проводника од бакра површине попречног пресека  $95 \text{ mm}^2$  и максималне дозвољене температуре изолације  $180^\circ\text{C}$ . Кратак спој на проводнику настаје при номиналном оптерећењу (температура  $100^\circ\text{C}$ ). Познате су карактеристике бакра:  $c_{Cu} = 385 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$ ,  $\rho_{Cu} = 8933 \text{ kg/m}^3$ , специфична електрична проводност на  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_{20 Cu} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$  и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром  $\alpha_{Cu20} = 4,29 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Одредити температуру изолације проводника која се достиже у тренутку искључења кратког споја у случају: а) да је заштита реаговала након 1s при струји од  $I_{ks1} = 9600 \text{ A}$ ; б) да је заштита реаговала након 1,2s при струји од  $I_{ks2} = 7600 \text{ A}$ . При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски. При прорачуну снаге генерисања топлоте узети у обзир температурну промену електричне проводности; може се сматрати да струја током кратког споја има константну вредност. (2п/2,5п).

### 1. Задатак

Фактор виђења између површи (1) и (2) одређује се по формули:

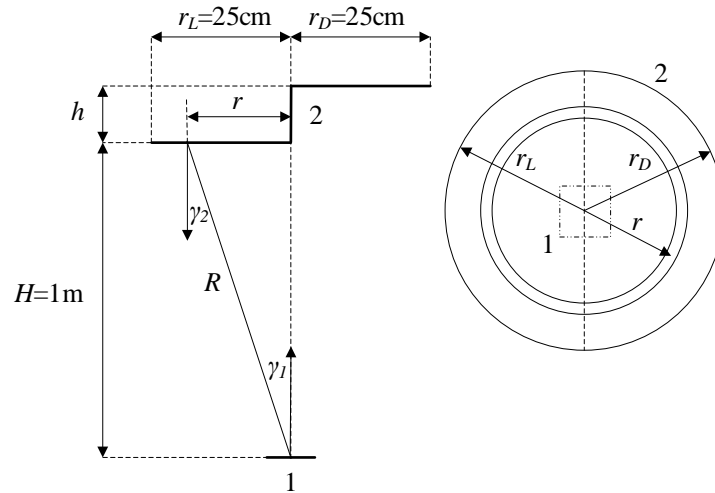
$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} dS_1 dS_2 \quad (1.1)$$

Обзиром да се површ (1) може сматрати елементарном (углови  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и растојање  $R$  са слике 1.1 су приближно константни за све тачке површи  $S_1$ ), израз (1.1) се трансформише у

$$F_{12} = \int_{S_2} \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} dS_2 \quad (1.2)$$

Углови  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  су углови са паралелним крацима, па важи  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ , односно

$$F_{12} = \int_{S_2} \frac{\cos^2 \gamma}{R^2 \pi} dS_2 \quad (1.3)$$



Слика 1.1

Површ (2) се састоји из два хоризонтална полукруга (на различитим висинама,  $H$  и  $H+h$ ) и вертикалног правоугаоника који их спаја. Површински интеграл из израза (1.3) се може написати као сума три површинска интеграла по ова три елемента површине (2). Како је правоугаоник вертикалан и пошто је површ (1) елементарна, површински интеграл по овој површини је једнак нули. Дакле, израз (1.3) се може написати као:

$$F_{12} = \int_{S_{2L}} \frac{\cos^2 \gamma_L}{R_L^2 \pi} dS_{2L} + \int_{S_{2D}} \frac{\cos^2 \gamma_D}{R_D^2 \pi} dS_{2D} \quad (1.4)$$

где индекс L означава леви полукруг, а индекс D десни. За величине у изразу (1.4) важи:

$$R_L^2 = H^2 + r^2 \quad (1.5)$$

$$R_D^2 = (H+h)^2 + r^2 \quad (1.6)$$

$$\cos \gamma_L = \frac{H}{R_L} = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}} \quad (1.7)$$

$$\cos \gamma_D = \frac{H+h}{R_D} = \frac{H+h}{\sqrt{(H+h)^2 + r^2}} \quad (1.8)$$

Израз (1.4) сада постаје:

$$F_{12} = \int_{r=0}^{r_L} \frac{1}{(H^2 + r^2)\pi} \cdot \frac{H^2}{H^2 + r^2} \cdot r\pi dr + \int_{r=0}^{r_D} \frac{1}{((H+h)^2 + r^2)\pi} \cdot \frac{(H+h)^2}{(H+h)^2 + r^2} \cdot r\pi dr \quad (1.9)$$

$$F_{12} = \int_{r=0}^{r_L} \frac{H^2 r \pi dr}{(H^2 + r^2)^2} + \int_{r=0}^{r_D} \frac{(H+h)^2 r \pi dr}{((H+h)^2 + r^2)^2} \quad (1.10)$$

Први интеграл једнак је:

$$\int_{r=0}^{r_L} \frac{H^2 r \pi dr}{(H^2 + r^2)^2} = -\frac{H^2}{2(H^2 + r_L^2)} + \frac{H^2}{2H^2} = \frac{1}{2} - \frac{H^2}{2(H^2 + r_L^2)} \quad (1.11)$$

Аналогно, други интеграл једнак је:

$$\int_{r=0}^{r_D} \frac{(H+h)^2 r \pi dr}{((H+h)^2 + r^2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{(H+h)^2}{2((H+h)^2 + r_D^2)} \quad (1.12)$$

Коначно, добија се израз за вредност фактора виђења:

$$F_{12} = 1 - \frac{H^2}{2(H^2 + r_L^2)} - \frac{(H+h)^2}{2((H+h)^2 + r_D^2)} \quad (1.13)$$

при чему се  $h$  мења у опсегу од -20 cm до 30 cm. Посматрањем угла под којим површ (2) „хвата“ зраке са површи (1) – од  $-\arctg\left(\frac{r_D}{H}\right)$  до  $\arctg\left(\frac{r_D}{H+h}\right)$ , закључује се да он, а самим тим и фактор виђења, има највећу вредност у случају када је  $h$  негативно, односно -0,2 m, а најмању када је 0,3 m. Тражене вредности су:

$$F_{12}(h = -0,2) = 0,0739 \quad (1.14)$$

$$F_{12}(h = 0,3) = 0,0472 \quad (1.15)$$

Алтернатива овом начину је диференцирање израза (1.13) по променљивој  $h$  и његово изједначавање са нулом. Једино решење ове једначине је  $h = -H = -1$  m. Пошто се оно налази ван посматраног опсег, закључује се да су екстремуми функције (1.13) на крајевима посматраног интервала.

## 2. Задатак

За типичне стварне облике размењивача топлоте, у литератури се могу наћи вредности коефицијента  $F$ , чијим се множењем са снагом елементарног размењивача топлоте која би се имала при истом коефицијенту преласка топлоте, истој површини хладњака и истим температурама, добија снага преноса топлоте од топлог ка хладном флуиду код реалног размењивача:

$$q = \frac{K_p S_v F (\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \quad (2.1)$$

где су  $\Delta\vartheta_{ul}$  и  $\Delta\vartheta_{izl}$  разлике температуре топлог и хладног флуида на уласку (крај на којем топли флуид улази) и изласку из хладњака, а  $K_p$  коефицијент преласка топлоте са топлог на хладни флуид, који се одређује као:

$$K_p = \left( \frac{1}{\alpha_u} \frac{S_v}{S_u} + \frac{1}{\alpha_v} + \frac{S_v}{(S_v + S_u)} \frac{\delta}{\lambda} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

при чему је површ ка води усвојена као референтна.

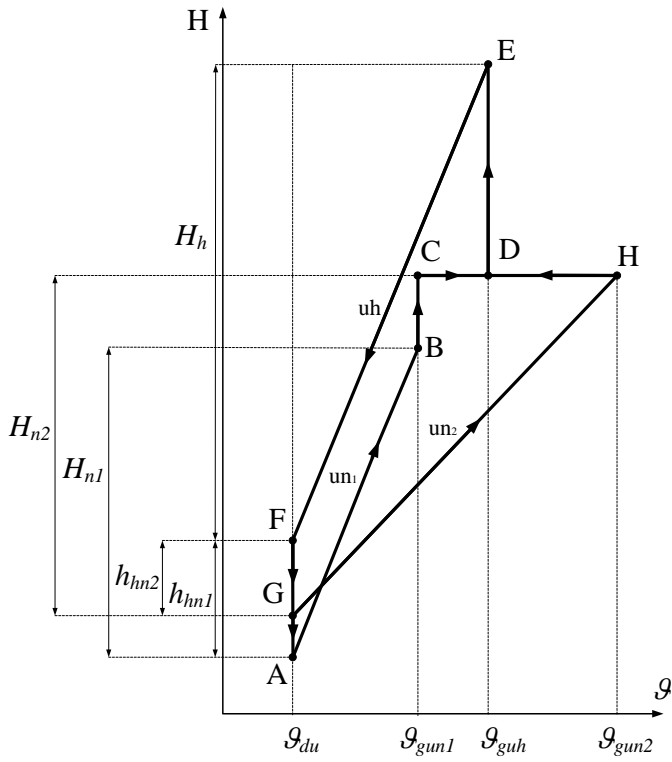
Запрљање хладњака се математички квантификује тако што се у израз за коефицијент преласка топлоте (2.2) додају додатни топлотни отпори провођењу топлоте кроз сваки од два „нова слоја“ настала таложењем:

$$K_p = \left( \frac{1}{\alpha_u} \frac{S_v}{S_u} + \frac{1}{\alpha_v} + \frac{S_v}{(S_v + S_u)} \frac{\delta}{\lambda} + fD_u \frac{S_v}{S_u} + fD_v \right)^{-1} \quad (2.3)$$

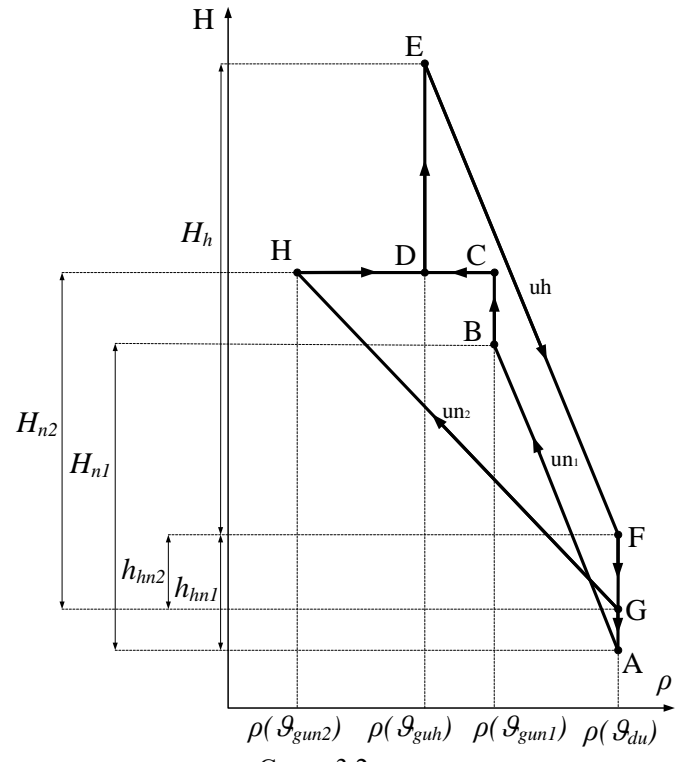
где  $fD_u$  представља додатни топлотни отпор по јединици површине услед наталожених материја на спољашњој страни цеви (ка уљу), а  $fD_v$  додатни топлотни отпор по јединици површине услед наталожених материја на унутрашњој страни цеви (ка води).

## 3. Задатак

Дијаграм промене температуре уља по висини трансформатора приказан је на слици 3.1. На основу познате зависности густине уља од температуре, могуће је, на основу дијаграма на слици 3.1, нацртати и дијаграм промене густине уља са висином (слика 3.2).

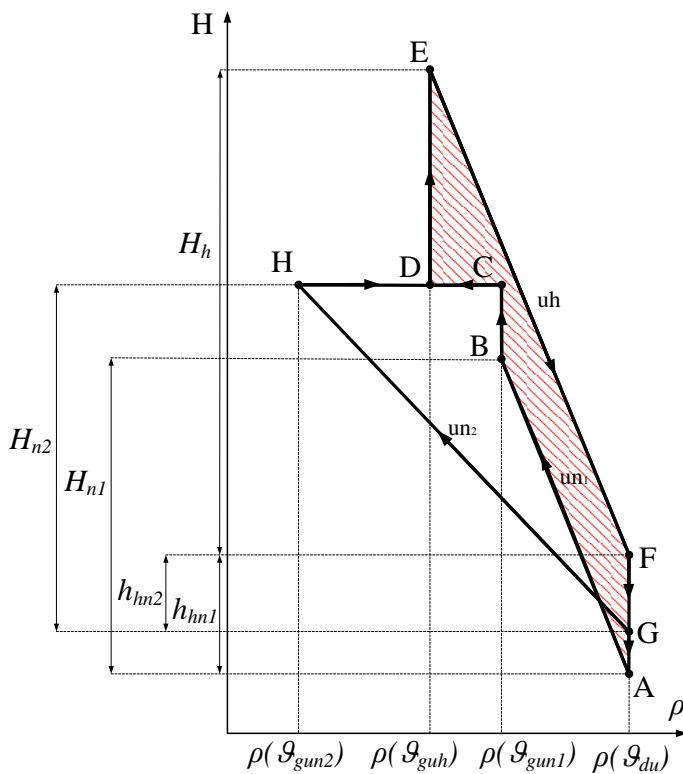


Слика 3.1

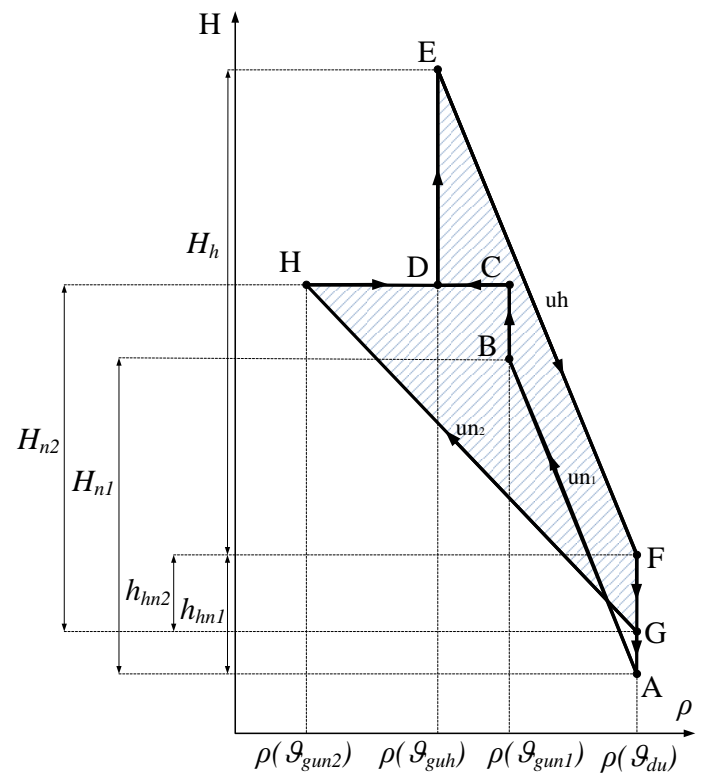


Слика 3.2

Вредност термосифонске силе која делују у контури струјања уља која се затвара кроз први намотај је једнака површини затворене контуре поромене густине уља ABCDEFA (слика 3.3), док је вредност термосифонске силе која делују у контури струјања уља која се затвара кроз други намотај је једнака површини затворене контуре поромене густине уља GHDEFG (слика 3.4).



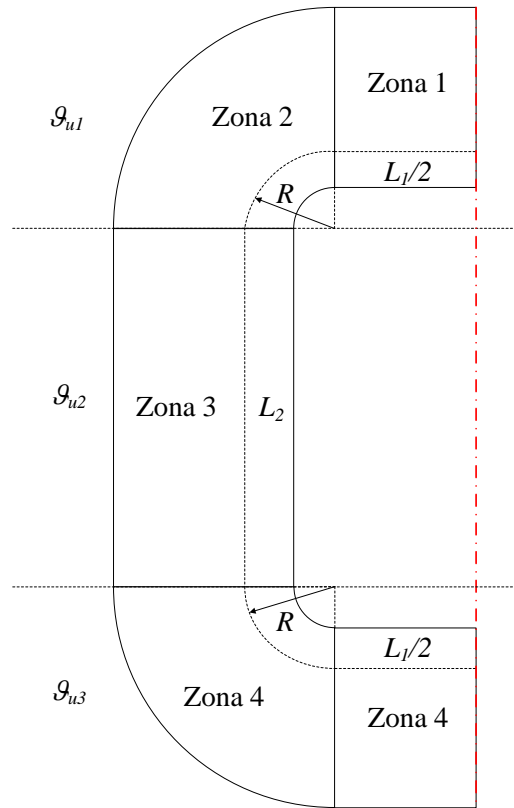
Слика 3.3



Слика 3.4

#### 4. Задатак

На основу геометрије и расподеле коефицијента преноса топлоте струјањем, закључује се да навојак има једну равну симетрије (која пролази кроз средину зоне 1 и хоризонталне зоне 3), па се у даљим разматрањима може посматрати само једна половина навојка (слика 4.1). Такође, на основу симетрије, закључује се да су граничне површи у равни симетрије адијабатске, односно да кроз њих нема преноса топлоте провођењем.



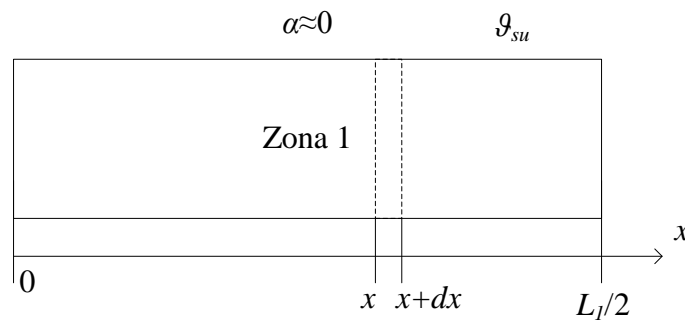
Слика 4.1

Тражени систем од четири диференцијалне једначине, односи се на једначине којима се описује промена температуре дуж једног проводника навојка у свакој од четири зоне означене на слици (у тексту задатка и слици 4.1).

Математички исказ биланса снага, за елементарни део проводника у зони 1, дужине  $dx$ , на растојању  $x$  (слика 4.2), где је координатни почетак  $x$ -осе на граничној површи између зона 1 и 2, гласи:

$$q_x + dq_{gen} = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (4.1)$$

где је  $q_x$  снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе  $x$  (на месту  $x$ ),  $dq_{gen}$  запреминска густина генерисане снаге губитака, а  $dq_{strujanja}$  снага којом се топлота одводи струјањем са омотача проводника, који је у контактну са уљем, дужине  $dx$ .



Слика 4.2

Зависност снаге провођења од координате  $x$  гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (4.2)$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек проводника не мења по координати  $x$ , једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (4.3)$$

Израз (4.3) важи само за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине  $dx$  је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{u1}) \quad (4.4)$$

Снага којом се генеришу губици у делићу дужине  $dx$  је

$$dq_{gen} = q_v \cdot S \cdot dx \quad (4.5)$$

Уврштавањем у једначину (4.1) израза за диференцијал функције (4.3), снаге преноса топлоте струјањем (4.4) и снаге генерисања губитака (4.5), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{u1}) - q_v \cdot S \cdot dx \quad (4.6)$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж проводника:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_{u1}) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (4.7)$$

За део проводника у зони 1, дужине  $L_1/2$  тј. за  $x \in [0, L_1/2]$  важи  $\alpha = 0$  па једначина (4.7) постаје:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} = -\frac{q_v}{\lambda} \quad (4.8)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине је:

$$\vartheta_1(x) = C_1 + C_2 x - \frac{q_v}{2 \cdot \lambda} \cdot x^2 \quad (4.9)$$

где је  $x \in [0, L_1/2]$ .

Диференцијална једначина, која описује промену температуре дуж проводника у зони 2, има исти облик као и једначина(4.7):

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} = \frac{\alpha_2 \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta_2(x) - \vartheta_{u1}) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (4.10)$$

где је  $x \in [0, \frac{1}{2} R\pi]$ , а координатни почетак  $x$ -осе се, у овом случају, налази на граничној површи између зона 2 и 3. Опште решење диференцијалне једначине (4.10) гласи:

$$\vartheta_2(x) = C_3 e^{mx} + C_4 e^{-mx} + \vartheta_{u1} + \frac{q_v \cdot S}{\alpha_2 \cdot O} \quad (4.11)$$

где је  $m$  параметар одређен изразом:

$$m^2 = \frac{\alpha_2 \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (4.12)$$

Слична ствар важи и за део проводника у зони 3, само се коефицијент преласка топлоте струјањем ( $\alpha_3$ ) и дужина ( $L_2$ ) разликују. У овом случају, диференцијална једначина гласи:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_3}{\partial x^2} = \frac{\alpha_3 \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta_3(x) - \vartheta_{u2}) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (4.13)$$

где је  $x \in [0, L_2]$ , а координатни почетак  $x$ -осе се налази на граничној површи између зоне 3 и зоне 4. Опште решење диференцијалне једначине (4.13) гласи:

$$\vartheta_3(x) = C_5 e^{nx} + C_6 e^{-nx} + \vartheta_{u2} + \frac{q_v \cdot S}{\alpha_3 \cdot O} \quad (4.14)$$

где је  $n$  параметар одређен изразом:

$$n^2 = \frac{\alpha_3 \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (4.15)$$

Конечно, за део проводника у зони 4, коефицијент преласка топлоте струјањем је  $\alpha_4$ , а дужина проводника је  $\frac{L_1}{2} + \frac{1}{2} R\pi$ . У овом случају, диференцијална једначина гласи:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_4}{\partial x^2} = \frac{\alpha_4 \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta_4(x) - \vartheta_{u3}) - \frac{q_v}{\lambda} \quad (4.16)$$

где је  $x \in [0, \frac{L_1}{2} + \frac{1}{2} R\pi]$ , а координатни почетак  $x$ -осе се налази на граничној површи зоне 4 која се поклапа са равни симетрије. Опште решење диференцијалне једначине (4.13) гласи:

$$\vartheta_4(x) = C_7 e^{px} + C_8 e^{-px} + \vartheta_{u3} + \frac{q_v \cdot S}{\alpha_4 \cdot O} \quad (4.17)$$

где је  $p$  параметар одређен изразом:

$$p^2 = \frac{\alpha_4 \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (4.18)$$

На крају, потребно је написати и осам граничних услова, на основу којих је могуће одредити вредности непознатих интеграционих константи ( $C_1 - C_8$ ):

1. Први гранични услов се поставља за адијабатску површ у зони 1 ( $x = L_1/2$ ):

$$-\lambda \cdot \left( \frac{d\vartheta_1}{dx} \right)_{x=L_1/2} = 0 \quad (4.19)$$

2. Други гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 1 и 2:

$$\vartheta_1(x=0) = \vartheta_2 \left( x = \frac{1}{2} R\pi \right) \quad (4.20)$$

3. Трећи гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 1 и 2, од ње и ка њој:

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta_1}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \left( \frac{d\vartheta_2}{dx} \right)_{x=\frac{1}{2}R\pi} \quad (4.21)$$

4. Четврти гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 2 и 3:

$$\vartheta_2(x=0) = \vartheta_3(x=L_2) \quad (4.22)$$

5. Пети гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 2 и 3, од ње и ка њој:

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta_2}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \left( \frac{d\vartheta_3}{dx} \right)_{x=L_2} \quad (4.23)$$

6. Шести гранични услов се добија из једнакости температура на граничној површи између зона 3 и 4:

$$\vartheta_3(x=0) = \vartheta_4 \left( x = \frac{L_1}{2} + \frac{1}{2}R\pi \right) \quad (4.24)$$

7. Седми гранични услов се добија из једнакости снага преноса топлоте на граничној између зона 3 и 4, од ње и ка њој:

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta_3}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda \left( \frac{d\vartheta_4}{dx} \right)_{x=\frac{L_1}{2} + \frac{1}{2}R\pi} \quad (4.25)$$

8. Осми гранични услов се поставља за адијабатску површ у зони 4 ( $x=0$ ):

$$-\lambda \cdot \left( \frac{d\vartheta_4}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (4.26)$$

### 5. Задатак

Пошто се термички процес по настанку кратког споја сматра адијабатским, занемарује се снага којом се топлота размењује са околином у току кратког споја и сматра да се целокупна топлотна енергија генерисана у том периоду акумулира у проводнику. Оваква претпоставка је при проверама загревања у току кратког споја на страни сигурности тј. стварно загревање проводника у току кратког споја је мало мање од тако израчунатог.

Снага којом се топлотна енергија акумулира у бакуру једнака је снази којом се топлота генерише услед Џулових губитака.

$$P_{gen} = P_{akum} \quad (5.1)$$

Подужна снага којом се топлотна енергија генерише у проводнику дата је изразом

$$P_{gen} = \frac{1}{\sigma_{Cu20}} (1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20^\circ\text{C})) \frac{I_{ks}^2}{S_{Cu}} \quad (5.2)$$

Подужна снага којом се енергија акумулише у проводнику дата је изразом

$$P_{akum} = C_{Cu}^T \frac{d\vartheta_{Cu}}{dt} \quad (5.3)$$

Подужни топлотни капацитет проводника је једнак

$$C_{Cu}^T = \rho_{Cu} S_{Cu} c_{pCu} = 326,724 \frac{J}{mK} \quad (5.4)$$

Из претходник израза се добија диференцијална једначина која описује промену температуре бакарног проводника. То је уједно и температура најтоплијих тачака изолације (унутрашња површ изолације, уз сам проводник).

$$C_{Cu}^T \frac{d\vartheta_{Cu}}{dt} = \frac{1}{\sigma_{Cu20}} (1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20^\circ\text{C})) \frac{I_{ks}^2}{S_{Cu}} \quad (5.5)$$

$$\frac{d\vartheta_{Cu}}{(1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20^\circ\text{C}))} = \frac{1}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} I_{ks}^2 dt \quad (5.6)$$

Решавањем диференцијалне једначине добија се температура проводника у тренутку прекида струје кратког споја ( $\vartheta_p$ ):

$$\int_{\vartheta_{Cu}=100^\circ\text{C}}^{\vartheta_p} \frac{d\vartheta_{Cu}}{(1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20))} = \int_{t=0}^{t_{ks}} \frac{1}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} I_{ks}^2 dt = \frac{1}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} I_{ks}^2 t_{ks} \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{\alpha_{Cu20}} \ln \frac{1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_p - 20^\circ\text{C})}{1 + \alpha_{Cu20}(100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})} = \frac{I_{ks}^2 t_{ks}}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} \quad (5.8)$$

$$\ln \frac{1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_p - 20^\circ\text{C})}{1 + \alpha_{Cu20}(100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})} = \frac{\alpha_{Cu20} I_{ks}^2 t_{ks}}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} \quad (5.9)$$

$$\frac{1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_p - 20^\circ\text{C})}{1 + \alpha_{Cu20}(100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})} = e^{\frac{\alpha_{Cu20} I_{ks}^2 t_{ks}}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}}} \quad (5.10)$$

$$1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_p - 20^\circ\text{C}) = (1 + \alpha_{Cu20} \cdot 80^\circ\text{C}) e^{\frac{\alpha_{Cu20} I_{ks}^2 t_{ks}}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}}} \quad (5.11)$$



$$\vartheta_p = 20^\circ\text{C} + \frac{(1 + \alpha_{Cu20} \cdot 80^\circ\text{C}) e^{\frac{\alpha_{Cu20} I_{ks}^2 t_{ks}}{C_{Cu} \sigma_{Cu20} S_{Cu}} - 1}}{\alpha_{Cu20}} \quad (5.12)$$

Заменом бројних вредности добијају се тражене температуре проводника:

$$\vartheta_{p1} = 179,97^\circ\text{C} \quad (5.13)$$

$$\vartheta_{p2} = 158,42^\circ\text{C} \quad (5.14)$$



ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута

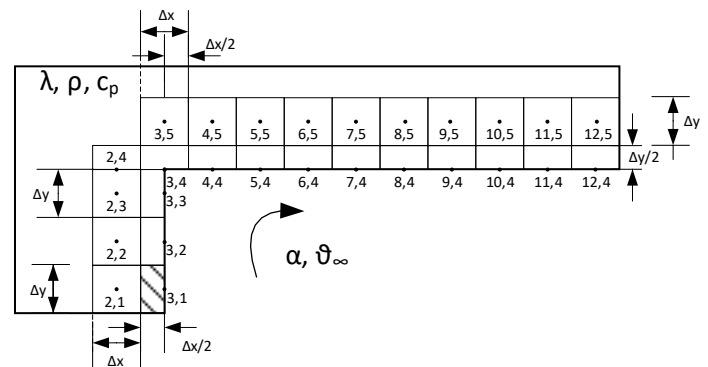
5.4.2021.

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

Максимални број поена који се може добити на сваком од питања је 2.

1. Посматра се проводник од бабра површине попречног пресека  $95 \text{ mm}^2$  и максималне дозвољене температуре изолације  $180^\circ\text{C}$ . Кратак спој на проводнику настаје при номиналном оптерећењу (температура  $\vartheta_{Cu}=100^\circ\text{C}$ ). Познате су карактеристике бабра:  $c_{Cu} = 385 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$ ,  $\rho_{Cu} = 8933 \text{ kg/m}^3$ , специфична електрична проводност на  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_{20 Cu} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$  и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром  $\alpha_{Cu20} = 4,29 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Одредити температуру изолације проводника која се достиже у тренутку искључења кратког споја, ако је заштита реаговала након  $1 \text{ s}$ . Познато је да у струји кратког споја, поред константне наизменичне компоненте ( $I_{ac} = 9600 \text{ A}$ ), постоји и једносмерна компонента која опада у времену по експоненцијалном закону. Прорачун извршити за случај да је почетна вредност једносмерне компоненте једнака ефективној вредности наизменичне компоненте, а временска константа ( $\tau_{dc} = 100 \text{ ms}$ ). При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски. При прорачуну снаге генерисања сматрати да је специфична електрична отпорност бабра константна, одређена према температури која је једнака средњој вредности почетне температуре проводника и максималне дозвољене температуре изолације.

2. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине на координати (3,1) (шрафирана површина). Део топлопроводне средине, приказан на слици, представља симетрични део веће геометрије која се састоји од два правоугаоника. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотна проводност материјала је  $\lambda$ , специфични топлотни капацитет је  $c_p$ , густина  $\rho$  и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре  $\vartheta_\infty$  је  $\alpha$ . Димензије и положај елемента су приказани на слици.



3. Одредити фактор виђења елементарне површи (2) са елементарне површи (1) (површине  $S_1 = S_2 = 0,1 \text{ cm}^2$ ). Центар површи (1) налази се на координати (0, 0, 0), а центар површи (2) на координати (3, 4, 12)cm. Орт вектора нормале на површ (1) једнак је  $\vec{n}_1 = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$ , док је орт вектора нормале на површ (2) једнак  $\vec{n}_2 = -\frac{5}{5\sqrt{2}} \cdot \vec{i} - \frac{4}{5\sqrt{2}} \cdot \vec{j} - \frac{3}{5\sqrt{2}} \cdot \vec{k}$ .

4. Дати дефиницију и навести особине апсолутно црног тела.

5. Посматра се ребро за хлађење којим се одводи топлота са тела температуре  $\vartheta = 150^\circ\text{C}$ . Ребро је дужине  $L = 100 \text{ mm}$  и за његову израду утрошена је запремина алуминијума  $V = 10 \text{ cm}^3$ . Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре  $\vartheta_a = 30^\circ\text{C}$  износи  $\alpha = 7 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Топлотна проводности материјала од кога је сачињено ребро износи  $\lambda = 237 \text{ W/mK}$ . Одредити однос снаге која се са површине ребра одводи струјањем у случају када је попречни пресек ребра круг, односно квадрат. При постављању граничног услова на базису ребра која се хлади сматрати да је снага која се преноси са ваздуху једнака нули.

Помоћ:

- $\left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1+\cos x}{2}$
- $\int u dv = uv - \int v du$

## 1. Задатак

Пошто се термички процес по настанку кратког споја сматра адијабатским, занемарује се снага којом се топлота предаје околини у току кратког споја, односно сматра се да се целокупна топлотна енергија генерисана у том периоду акумулира у проводнику. Оваква претпоставка је при проверама загревања у току кратког споја доводи до резултата на страну сигурности тј. стварна максимална вредност температуре у току кратког споја је мало мања од тако израчунате.

Снага којом се топлотна енергија акумулира у баку једнака је снази којом се топлота генерише услед Џулових губитака.

$$P_{gen} = P_{akum} \quad (1.1)$$

Подужна снага којом се топлотна енергија генерише у проводнику дата је изразом

$$P_{gen} = R_{cu}(I_{ks}(t))^2 \quad (1.2)$$

где је

$$I_{ks}(t) = I_{ac}(t) + I_{dc}(t) = I_{ac}\sqrt{2}\cos\omega t + I_{dc}e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} = I_{ac}\left(\sqrt{2}\cos\omega t + e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}}\right) \quad (1.3)$$

Подужна електрична отпорност проводника једнака је:

$$R_{cu} = \frac{1}{\sigma_{Cu20}S_{Cu}}\left(1 + \alpha_{Cu20}\left(\frac{\vartheta_{Cu} + \vartheta_{Cu,max}}{2} - 20^\circ\text{C}\right)\right) = 2,85 \cdot 10^{-4} \Omega/m \quad (1.4)$$

Подужна снага којом се енергија акумулише у проводнику дата је изразом

$$P_{akum} = C_{Cu}^T \frac{d\vartheta_{Cu}}{dt} \quad (1.5)$$

Подужни топлотни капацитет проводника је једнак

$$C_{Cu}^T = \rho_{Cu}S_{Cu}c_{pCu} = 326,724 \frac{J}{mK} \quad (1.6)$$

Из претходник израза се добија диференцијална једначина која описује промену температуре бакарног проводника. То је уједно и температура најтоплијих тачака изолације (унутрашња површ изолације, уз сам проводник).

$$C_{Cu}^T \frac{d\vartheta_{Cu}}{dt} = R_{cu}(I_{ks}(t))^2 \quad (1.7)$$

$$d\vartheta_{Cu} = \frac{R_{cu}}{C_{Cu}^T} (I_{ks}(t))^2 dt \quad (1.8)$$

Решавањем диференцијалне једначине добија се израз за температуру проводника у тренутку прекида струје кратког споја:

$$\int_{\vartheta_{Cu}=100^\circ\text{C}}^{\vartheta_p} d\vartheta_{Cu} = \frac{R_{cu}}{C_{Cu}^T} \int_{t=0}^{t_{ks}} (I_{ks}(t))^2 dt \quad (1.9)$$

$$\vartheta_p - \vartheta_{Cu} = \frac{R_{cu}}{C_{Cu}^T} \int_{t=0}^{t_{ks}} \left( I_{ac} \left( \sqrt{2}\cos\omega t + e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} \right) \right)^2 dt \quad (1.10)$$

$$\vartheta_p - \vartheta_{Cu} = \frac{R_{cu}}{C_{Cu}^T} I_{ac}^2 \int_{t=0}^{t_{ks}} \left( 2(\cos\omega t)^2 + 2\sqrt{2}\cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} + e^{-\frac{2t}{\tau_{dc}}} \right) dt \quad (1.11)$$

$$\vartheta_p - \vartheta_{Cu} = \frac{R_{cu}}{C_{Cu}^T} I_{ac}^2 \left[ 2 \int_{t=0}^{t_{ks}} (\cos\omega t)^2 dt + 2\sqrt{2} \int_{t=0}^{t_{ks}} \cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} dt + \int_{t=0}^{t_{ks}} e^{-\frac{2t}{\tau_{dc}}} dt \right] \quad (1.12)$$

$$\vartheta_p = \vartheta_{Cu} + \frac{R_{cu}}{C_{Cu}^T} I_{ac}^2 [2A + 2\sqrt{2}B + C] \quad (1.13)$$

Вредности интеграла А и С једнаке су:

$$A = \int_{t=0}^1 (\cos\omega t)^2 dt = \int_{t=0}^1 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^1 (1 + \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right) \Big|_{t=0}^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\omega \quad (1.14)$$

$$C = \int_{t=0}^1 e^{-\frac{2t}{\tau_{dc}}} dt = -\frac{\tau_{dc}}{2} e^{-\frac{2t}{\tau_{dc}}} \Big|_{t=0}^1 = \frac{\tau_{dc}}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2}{\tau_{dc}}} \right) \quad (1.15)$$

Вредност интеграла В одређује се на следећи начин:

$$\begin{aligned} I &= \int \cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} dt = \begin{cases} u = \cos\omega t \rightarrow du = -\omega \sin\omega t dt \\ dv = e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} dt \rightarrow v = -\tau_{dc} e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} \end{cases} = -\tau_{dc} \cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} - \tau_{dc}\omega \int \sin\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} dt \\ &= \begin{cases} u = \sin\omega t \rightarrow du = \omega \cos\omega t dt \\ dv = e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} dt \rightarrow v = -\tau_{dc} e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} \end{cases} \\ &= -\tau_{dc} \cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} - \tau_{dc}\omega \left[ -\tau_{dc} \sin\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} + \tau_{dc}\omega \int \cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} dt \right] \\ &= -\tau_{dc} \cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} - \tau_{dc}\omega \left[ -\tau_{dc} \sin\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} + \tau_{dc}\omega \cdot I \right] = \\ &= -\tau_{dc} \cos\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} + \tau_{dc}^2 \omega \sin\omega t \cdot e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} + \tau_{dc}^2 \omega^2 \cdot I \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$I(1 + \tau_{dc}^2 \omega^2) = \tau_{dc} e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} (\tau_{dc} \omega \sin\omega t - \cos\omega t) \quad (1.17)$$

$$I = \frac{\tau_{dc} e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} (\tau_{dc} \omega \sin \omega t - \cos \omega t)}{1 + \tau_{dc}^2 \omega^2} \quad (1.18)$$

$$B = I(t = 1s) - I(t = 0) = \frac{\tau_{dc} e^{-\frac{t}{\tau_{dc}}} (\tau_{dc} \omega \sin \omega t - \cos \omega t)}{1 + \tau_{dc}^2 \omega^2} = \frac{\tau_{dc}}{1 + \tau_{dc}^2 \omega^2} \left[ e^{-\frac{1}{\tau_{dc}}} (\tau_{dc} \omega \sin \omega - \cos \omega) + 1 \right] \quad (1.19)$$

Коначно, добија се израз за прорачун температуре проводника:

$$\vartheta_p = \vartheta_{Cu} + \frac{R_{cu}}{C_{Cu}^T} I_{ac}^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \sin 2\omega + \frac{2\sqrt{2}\tau_{dc}}{1 + \tau_{dc}^2 \omega^2} \left[ e^{-\frac{1}{\tau_{dc}}} (\tau_{dc} \omega \sin \omega - \cos \omega) + 1 \right] + \frac{\tau_{dc}}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2}{\tau_{dc}}} \right) \right] \quad (1.20)$$

Заменом бројних вредности добија се тражена температура:

$$\vartheta_p = 184,35^\circ\text{C} \quad (1.21)$$

Коментар: компоненте у изразу (1.13) износе  $A=0.5$ ,  $B=0.0001$  и  $C=0.05$ . То значи да би се приближно исти резултат добио и без уважавања компоненте  $B$ , што би одговарало приступу да се укупни топлотни импулс израчунава као збир топлотног импулса који потиче од наизменичне струје и топлотног импулса који потиче од опадајуће једносмерне компоненте струје.

## 2. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (3,1) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (2.1)$$

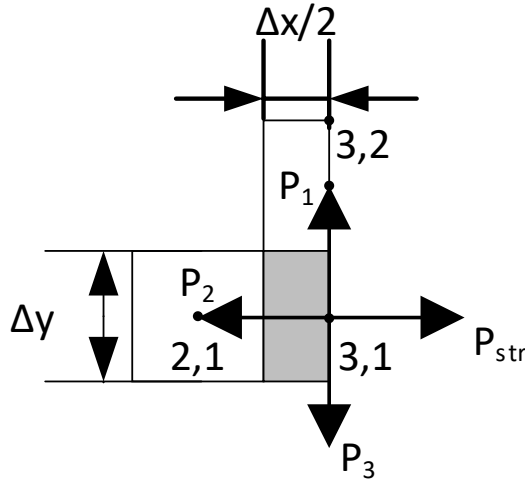
где су:

- $P_{gen}$  - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је  $P_{gen} = 0$ .

По експлицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у наредном ( $p+1$ ) тренутку у односу на садашњи тренутак ( $p$ ):

$$P_{akum} = \rho c_p \frac{\Delta x}{2} \Delta y L \frac{d\vartheta_{3,1}}{dt} = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{3,1}^{p+1} - \vartheta_{3,1}^p}{\Delta t} \quad (2.2)$$



Слика 2.1

Топлотна енергија се са тела на околину (ка осталим деловима) може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \quad (2.3)$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 2) и (2, 1), као и члан ( $P_3$ ) који описује провођење кроз граничну површ која се поклапа са хоризонталном равни симетрије. Како је равна симетрије адијабатска, важи  $P_3 = 0$ .

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^3 P_k \quad (2.4)$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{3,2}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y}{L \Delta x / 2}} = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{3,2}^p}{\frac{2}{\lambda} \frac{\Delta y}{L \Delta x}} \quad (2.5)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{2,1}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y}} \quad (2.6)$$

$$P_3 = 0 \quad (2.7)$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha} \frac{1}{L\Delta y}} = \alpha L \Delta y (\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{\infty}^p) \quad (2.8)$$

### 3. Задатак

Фактор виђења површи (2) са површи (1) одређује се као:

$$F_{12} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} dS_1 dS_2 \quad (3.1)$$

Пошто су површ (1) и (2) елементарне важи:

$$F_{12} = \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} S_2 \quad (3.2)$$

Потег између површи (1) и (2) може се представити вектором:

$$\vec{R} = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j} + 12 \cdot \vec{k} \quad (3.3)$$

чији је интензитет:

$$R = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2 + (12-0)^2} = 13 \text{ cm} \quad (3.4)$$

Вредности косинуса углова  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  могу се одредити помоћу скаларног производа одговарајућих орт вектора површи и вектора потега R:

$$\cos \gamma_1 = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{R}}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{R}|} = \frac{0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 12}{1 \cdot 13} = \frac{12}{13} \quad (3.5)$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{\vec{n}_2 \cdot (-\vec{R})}{|\vec{n}_2| \cdot |\vec{R}|} = \frac{(-\frac{5}{5\sqrt{2}}) \cdot (-3) + (-\frac{4}{5\sqrt{2}}) \cdot (-4) + (-\frac{3}{5\sqrt{2}}) \cdot (-12)}{1 \cdot 13} = \frac{67}{65\sqrt{2}} \quad (3.6)$$

Тражени фактор виђења једнак је:

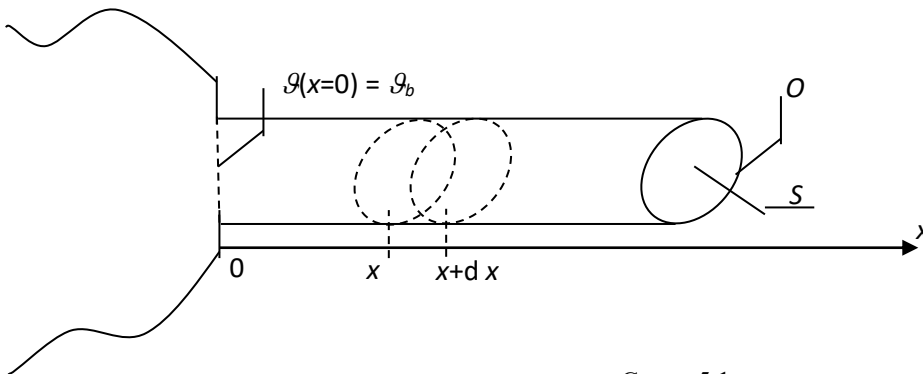
$$F_{12} = \frac{\cos \gamma_1 \cos \gamma_2}{R^2 \pi} S_2 = \frac{\frac{12}{13} \cdot \frac{67}{65\sqrt{2}}}{13^2 \pi} \cdot 0,1 = 0,000127 \quad (3.7)$$

### 4. Задатак

Предавање часови 7 до 9, стране 1 и 2.

### 5. Задатак

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине  $dx$ , на растојању  $x$  од тела на које је ребро ослоњено (слика 5.1) гласи:



Слика 5.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (5.1)$$

где је  $q_x$  снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе  $x$  (на месту  $x$ ), а  $dq_{strujanja}$  снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине  $dx$ . Зависност снаге провођења од координате  $x$  гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (5.2)$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати  $x$ , једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (5.3)$$

Израз (5.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине  $dx$  је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (5.4)$$

Уврштавањем у једначину (5.1) израза за диференцијал функције (5.3) и снаге преноса топлоте струјањем (5.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (5.5)$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (5.6)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \quad (5.7)$$

где је  $m$  параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (5.8)$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

5. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра која је ослоњена на тело:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta \quad (5.9)$$

6. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ( $x = L$ ), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре  $\vartheta_a$ , по услову задатка гласи:

$$-\lambda \cdot \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L} = 0 \quad (5.10)$$

На основу израза (5.7), (5.9) и (5.10) може се написати:

$$C_1 + C_2 + \vartheta_a = \vartheta \quad (5.11)$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \quad (5.12)$$

Одавде се једноставно добијају вредности интеграционих константи:

$$C_1 = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} \quad (5.13)$$

$$C_2 = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} e^{2mL} \quad (5.14)$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{(\vartheta - \vartheta_a) e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} e^{-mx} + \vartheta_a \quad (5.15)$$

Укупна снага која се са површине ребра струјањем одводи ка амбијенту износи:

$$P_{hl} = \int_{x=0}^L \alpha (\vartheta(x) - \vartheta_a) dS = \alpha \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} \int_{x=0}^L (e^{mx} + e^{2mL} \cdot e^{-mx}) \cdot O dx = \frac{\alpha O}{m} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} (e^{2mL} - 1) \quad (5.16)$$

Површина попречног пресека ребра једнака је у оба посматрана случаја и износи  $S = V/L = 100 \text{ mm}^2$ . У случају кружног попречног пресека, полупречник круга износи

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 5,64 \text{ mm} \quad (5.17)$$

односно, у случају квадратног попречног пресека, страница квадрата износи:

$$a = \sqrt{S} = 10 \text{ mm} \quad (5.18)$$

У изразу (5.16) од облика попречног пресека ребра зависе вредности параметара  $O$  и  $m$ .

У случају кружног попречног пресека важи:

$$O_{krug} = 2r\pi = 0,03545 \text{ m} \quad (5.19)$$

$$m_{krug} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot O_{krug}}{\lambda \cdot S}} = 3,2358 \text{ m}^{-1} \quad (5.20)$$

$$P_{hl}^{krug} = \frac{\alpha O_{krug}}{m_{krug}} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2m_{krug}L}} (e^{2m_{krug}L} - 1) = 2,88 \text{ W} \quad (5.21)$$

У случају квадратног попречног пресека важи:

$$O_{kv} = 4a = 0,04 \text{ m} \quad (5.22)$$

$$m_{kv} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot O_{kv}}{\lambda \cdot S}} = 3,4372 \text{ m}^{-1} \quad (5.23)$$

$$P_{hl}^{kv} = \frac{\alpha O_{kv}}{m_{kv}} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2m_{kv}L}} (e^{2m_{kv}L} - 1) = 3,23 \text{ W} \quad (5.24)$$

Тражени однос снага хлађења је:

$$k = \frac{P_{hl}^{krug}}{P_{hl}^{kv}} = 0,89 \quad (5.25)$$



# ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

## Катедра за енергетске претвараче и погоне

### Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута

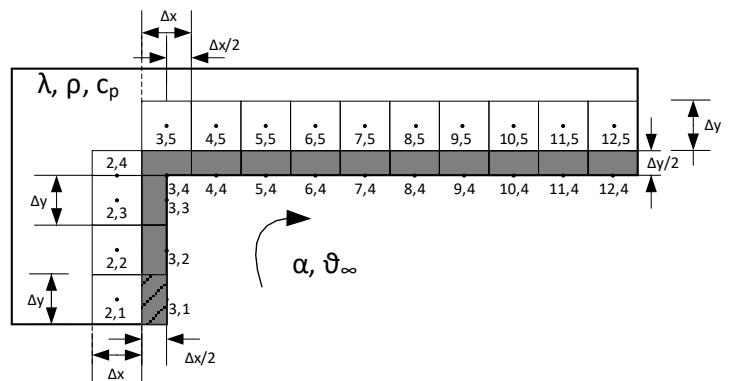
5.7.2021.

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

Максимални број поена који се може добити на сваком од питања је 2.

1. Колики је процентуални добитак енергије и повећан трошак ако се користи проточни бојлер уместо акумулационог. Сматрати да се половина количине топле воде троши у току дана, када је електрична енергија 4 пута скупља него ноћу, а половина у току ноћи. Акумулациони бојлер се загрева само у периоду јефтиније електричне енергије. Температура воде у водоводној мрежи износи  $15^{\circ}\text{C}$ , а укупна потрошња топле воде температуре  $45^{\circ}\text{C}$  у току дана (24h) је 120 l. Температура од  $45^{\circ}\text{C}$  се постиже мешањем воде из бојлера са водом из водовода. Максимална температура воде у бојлеру износи  $90^{\circ}\text{C}$ , а минимална  $50^{\circ}\text{C}$ . Губитке у акумулационом бојлеру израчунати према средњој вредности минималне и максималне температуре воде у бојлеру у току дана. Позната је вредност топлотног отпора између воде у бојлеру и амбијента температуре  $20^{\circ}\text{C}$   $R^T = 0,5333 \text{ K/W}$ . Густина воде износи  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ , специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ .

2. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине на координати (3,1) (шрафирана површина). Део топлопроводне средине, приказан на слици, представља симетрични део веће геометрије која се састоји од два правоугаоника. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити експлицитну методу. У зони уз унутрашњу страну канала (део обојен сивом бојом) постоји генерисање топлоте запреминском густином  $q_v$ . Топлотна проводност материјала је  $\lambda$ , специфични топлотни капацитет је  $c_p$ , густина  $\rho$  и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре  $\vartheta_{\infty}$  је  $\alpha$ . Димензије и положај елемента су приказани на слици.



3. Нацртати топлотну шему чијим се решавањем може одредити расподела температуре у проводницима намотаја сувог електроенергетског трансформатора који се хлади ваздухом температуре  $20^{\circ}\text{C}$ , при чему коефицијент преласка топлоте струјањем са унутрашње стране површи на ваздух износи  $\alpha_u = 6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , а са спољашње стране површи на ваздух износи  $\alpha_s = 10 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ . Висина намотаја је  $H = 0,75 \text{ m}$ , а унутрашњи пречник  $D_u = 363 \text{ mm}$ . Намотај је фолијског типа и има  $N = 119$  навојака, сваки висине једнаке висини намотаја; дебљина изолације између навојака износи  $\delta_i = 0,046 \text{ mm}$ , специфична топлотна проводност изолације  $\lambda_i = 0,15 \text{ W/mK}$ , ширина проводника (алуминијум)  $\delta_{Al} = 0,2 \text{ mm}$ . Струја кроз проводнике износи  $I = 195 \text{ A}$ . Слој изолације постоји и на унутрашњој страни кроз унутрашњег навојка и на спољној страни кроз спољашњег навојка. При дефинисању снаге генерисане топлоте у навојцима занемарити ефекат потискивања струје, као и промену специфичне електричне отпорности алуминијума  $\rho_{Al}$  са температуром (сматрати да је  $\rho_{Al} = 3,2 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ ).

4. Написати све карактеристике идеалног сивог тела. Колико износи јачина зрачења идеалног сивог тела температуре  $800^{\circ}\text{C}$  и емисивности 0,7 у правцу који са нормалом на површ заклапа угао од  $30^{\circ}$ ?

5. За један трансформатор са ODAF хлађењем одабран је компактан хладњак чија је номинална снага 30% већа од снаге укупних губитака у трансформатору. Сматра се да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља:  $\vartheta_{um} = 102^{\circ}\text{C}$  и  $\vartheta_{hm} = 95,9^{\circ}\text{C}$ , температуре хладног и топлог ваздуха:  $\vartheta_{hv} = 40^{\circ}\text{C}$  и  $\vartheta_{vn} = 64,55^{\circ}\text{C}$ , номинална снага  $P_{hm} = 210 \text{ kW}$ , проток уља  $Q_{um} = 68 \text{ m}^3/\text{h}$  и проток ваздуха  $Q_{vn} = 28,29 \text{ m}^3/\text{s}$ . Колико износи процентуално смањење укупног коефицијента преноса топлоте услед запрљања хладњака у тренутку у току експлоатације у коме је температура уља на уласку у хладњак, при оптерећењу при коме је снага губитака једнака номиналној и при температури амбијента  $20^{\circ}\text{C}$ , једнака номиналној? Проток ваздуха је једнак номиналном. Проток уља је 20% већи од номиналног. Параметри уља и ваздуха су исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру.



## 1. Задатак

Посматра се прво случај када се користи акумулациони бојлер. Потрошњом  $V = 120 \text{ l}$  воде температуре  $\vartheta_{potr\check{s}} = 45^\circ\text{C}$  током једног дана температура топле воде у бојлеру опадне са  $\vartheta_{max} = 90^\circ\text{C}$  на  $\vartheta_{min} = 50^\circ\text{C}$ . Током сваке употребе потребно је потрошеној количини воде предати енергију потребну да се она загреје са  $\vartheta_{vod} = 15^\circ\text{C}$  на  $\vartheta_{potr\check{s}} = 45^\circ\text{C}$ :

$$E_{potr\check{s}}^{aku} = \int_{t=0}^{24h} \rho_v c_{pv} Q_v (\vartheta_{potr\check{s}} - \vartheta_{vod}) dt = \rho_v c_{pv} (\vartheta_{potr\check{s}} - \vartheta_{vod}) \int_{t=0}^{24h} Q_v dt = \rho_v c_{pv} (\vartheta_{potr\check{s}} - \vartheta_{vod}) V = 15,12 \text{ MJ} = 4,2 \text{ kWh} \quad (1.1)$$

Енергија која се у току дана изгуби провођењем кроз топлотну изолацију бојлера може се апроксимирати као:

$$E_{gub} = P_{prov} \cdot 24h = \frac{\vartheta_{max} + \vartheta_{min} - 20^\circ\text{C}}{R^T} \cdot 24h = 2,25 \text{ kWh} \quad (1.2)$$

Дакле, укупан дневни утрошак енергије једнак је

$$E_{uk}^{aku} = E_{potr\check{s}}^{aku} + E_{gub} = 7.85 \text{ kWh} \quad (1.3)$$

Ова енергија обезбеђује се утрошком електричне енергије током јефтине тарифе. Њене цена (ако је цена једног киловата јефтине електричне енергије означена са *cena*) једнака је

$$C_{uk}^{aku} = E_{uk}^{aku} \cdot cena \text{ [RSD]} \quad (1.4)$$

У случају када се користи проточни бојлер, вода се загрева само онда када се и троши.

Дакле, укупна потребна количина енергије за загревање утрошене воде у току једног дана једнака је

$$E_{potr}^{prot} = \rho_v c_{pv} V (\vartheta_{potr\check{s}} - \vartheta_{vod}) = 15,12 \text{ MJ} = 4,2 \text{ kWh} \quad (1.5)$$

У случају када се користи проточни бојлер нема никаквих губитака, па важи

$$E_{uk}^{prot} = E_{potr\check{s}}^{prot} = 4,2 \text{ kWh} \quad (1.6)$$

Половина ове енергије обезбеђује се током скупе, а половина током јефтине тарифе. Укупна цена утрошене електричне енергије при употреби проточног бојлера је

$$C_{uk}^{prot} = \frac{E_{uk}^{prot}}{2} \cdot 4 \cdot cena + \frac{E_{uk}^{prot}}{2} \cdot cena = \frac{5}{2} \cdot E_{uk}^{prot} \cdot cena \text{ [RSD]} \quad (1.7)$$

Употребом проточног бојлера остварује се уштеда у утрошеној електричној енергији од 2,25 kWh тј. смањење за 34,9%. Однос цена утрошене електричне енергије је

$$\frac{C_{uk}^{aku}}{C_{uk}^{prot}} = \frac{E_{uk}^{aku} \cdot cena}{\frac{5}{2} \cdot E_{uk}^{prot} \cdot cena} = 0.614 \quad (1.8)$$

односно, цена утрошене енергије при примени проточног бојлера већа је за 62,8%.

У случају проточног бојлера проток воде из водоводне мреже, температуре  $15^\circ\text{C}$ , је константан. У случају акумулационог бојлера мења се вредност количине воде која се истаче из бојлера (што је температура воде у бојлеру  $\vartheta_{vb}$  већа, мањи је проток уласка воде температуре  $15^\circ\text{C}$  и изласка воде температуре  $\vartheta_{vb}$ ).

## 2. Задатак

Биланс снаге за посматрани елемент (3,1) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (2.1)$$

где су:

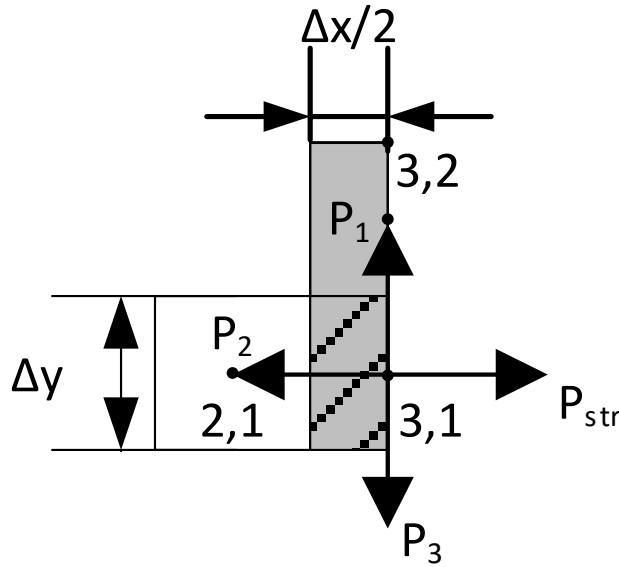
- $P_{gen}$  - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Снага којом се топлота генерише у елементу (3,1) је:

$$P_{gen} = q_v \frac{\Delta x}{2} \Delta y L \quad (2.2)$$

По експлицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у наредном ( $p+1$ ) тренутку у односу на садашњи тренутак ( $p$ ):

$$P_{akum} = \rho c_p \frac{\Delta x}{2} \Delta y L \frac{d\vartheta_{3,1}}{dt} = \rho c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{3,1}^{p+1} - \vartheta_{3,1}^p}{\Delta t} \quad (2.3)$$



Слика 2.1

Топлотна енергија се са тела на околину (ка осталим деловима) може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prensosa} = P_{prov} + P_{str} \quad (2.4)$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 2) и (2, 1), као и члан ( $P_3$ ) који описује провођење кроз граничну површ која се поклапа са хоризонталном равни симетрије. Како је равна симетрије адијабатска, важи  $P_3 = 0$ .

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^3 P_k \quad (2.5)$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{3,2}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta y}{L \Delta x / 2}} = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{3,2}^p}{\frac{2}{\lambda} \frac{\Delta y}{L \Delta x}} \quad (2.6)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{2,1}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta y}} \quad (2.7)$$

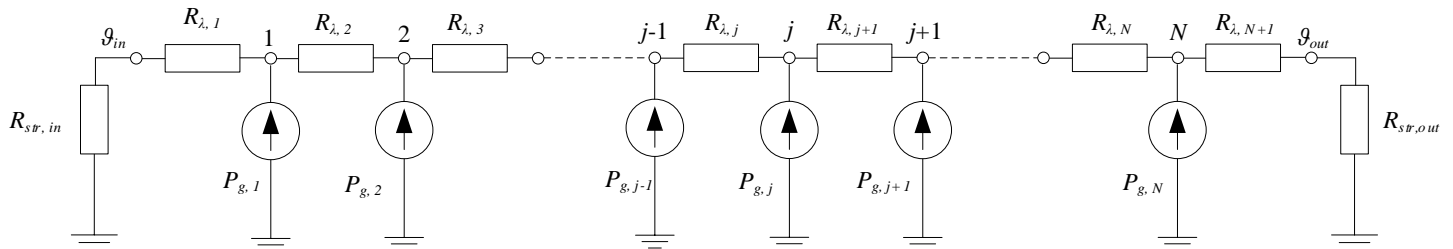
$$P_3 = 0 \quad (2.8)$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha} \frac{1}{L \Delta y}} = \alpha L \Delta y (\vartheta_{3,1}^p - \vartheta_{\infty}^p) \quad (2.9)$$

### 3. Задатак

Топлотна шема приказана је на слици 3.1.



Слика 3.1

Вредности топлотних отпорности у шеми једнаке су:

$$R_{str,in} = \frac{1}{\alpha_u S_{in}} \quad (3.1)$$

$$R_{str,out} = \frac{1}{\alpha_s S_{out}} \quad (3.2)$$

$$R_{\lambda,j} = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta_j}{S_j} \quad (3.3)$$

где је  $j = 1, 2, 3, \dots, N+1$ , а површине потребне за њихово израчунавање:

$$S_{in} = \pi D_u H \quad (3.4)$$

$$S_{out} = \pi(D_u + 2N\delta_{Al} + 2(N+1)\delta_i)H \quad (3.5)$$

$$S_j = \pi(D_u + 2(j-1)\delta_{Al} + 2(j-1)\delta_i + \delta_i)H = \pi(D_u + 2(j-1)\delta_{Al} + (2j-1)\delta_i)H \quad (3.6)$$

Снага Цулових губитака у сваком од навојака једнака је

$$P_{g,j} = R_j I^2 \quad (3.7)$$

где је  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ , а отпорност сваког навојака

$$R_j = \rho_{Al} \frac{l_j}{S_p} \quad (3.8)$$

где је површина попречног пресека једног навојака  $S_p = \delta_{Al} H$ , а дужина једног навојака

$$l_j = \pi(D_u + 2(j-1)\delta_{Al} + 2(j-1)\delta_i + \delta_{Al}) \quad (3.9)$$

#### 4. Задатак

Предавања [часови 7-9](#).

Површинска густина снаге зрачења сивог тела рачуна се на основу Штефан-Болцмановог закона:

$$q_s^{st} = \varepsilon \sigma_c T^4 \quad (4.1)$$

где је:

- $\varepsilon$  - коефицијент емисивности сивог тела,
- $\sigma_c = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$  – Штефан - Болцманова константа и
- $T$  – апсолутна температура сивог тела (K).

$$q_s^{st} = 0,7 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (800 + 273,15)^4 = 52,64 \text{ kW/m}^2 \quad (4.2)$$

Јачина зрачења идеалног сивог тела у правцу нормале се може одредити као

$$J_0 = \frac{q_s^{st}}{\pi} = 16,76 \text{ kW/srad} \quad (4.3)$$

А на основу Ламбертовог закона се долази до јачине зрачења у задатом правцу

$$J_{30} = J_0 \cdot \cos 30^\circ = 14,51 \text{ kW/srad} \quad (4.4)$$

#### 5. Задатак

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S (\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right)} = \frac{K_p S (\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)} \quad (5.1)$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 31,35^\circ\text{C} \quad (5.2)$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 62^\circ\text{C} \quad (5.3)$$

Заменом ових вредности у израз (5.1), уз  $P_{hn} = 210 \text{ kW}$  добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 4,672 \frac{\text{kW}}{^\circ\text{C}} \quad (5.4)$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \quad (5.5)$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \quad (5.6)$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{Q_{vn} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn})} = 0,3024 \frac{\text{kWs}}{\text{m}^3\text{ }^\circ\text{C}} \quad (5.7)$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{Q_{un}(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun})} = 1822,57 \frac{kWs}{m^3 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad (5.8)$$

Како је номинална снага хладњака за 30% већа од номиналне снаге губитака имамо да је  $P_h = P_{hn}/1,3 = 161,54 \text{ kW}$ . Проток ваздуха једнак је номиналном  $Q_v = Q_{vn}$ , док је температура опала на  $\vartheta_{hv} = 20^\circ\text{C}$ . Сада, за ову снагу хлађења и овај проток можемо написати израз аналоган изразу (5.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (5.9)$$

На основу израза (5.9) долазимо до:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 38,88^\circ\text{C} \quad (5.10)$$

Проток уља повећао се за 20% на  $Q_v = 1,2 \cdot Q_{vn} = 81,6 \text{ m}^3/\text{h}$ , док је температура уља на уласку у хладњак остала иста  $\vartheta_{tu} = \vartheta_{tn} = 102^\circ\text{C}$ . И за уље се сада може написати израз аналоган изразу (5.10):

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 98,09^\circ\text{C} \quad (5.11)$$

За стварну снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (5.1):

$$P_h = \frac{K_p^z S (\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}} \right)} \quad (5.12)$$

Из претходног израза се добија

$$K_p^z S = \frac{P_h \cdot \ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 2,308 \frac{kW}{^\circ\text{C}}, \quad (5.13)$$

односно

$$\frac{K_p^z S}{K_p S} = \frac{K_p^z}{K_p} = \frac{2,308}{4,672} = 0,494 \quad (5.14)$$

Дакле, услед запрљања дошло је до смањења укупног коефицијента преноса топлоте за 50,6%.



# ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

## Катедра за енергетске претвараче и погоне

### Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута

1.9.2021.

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

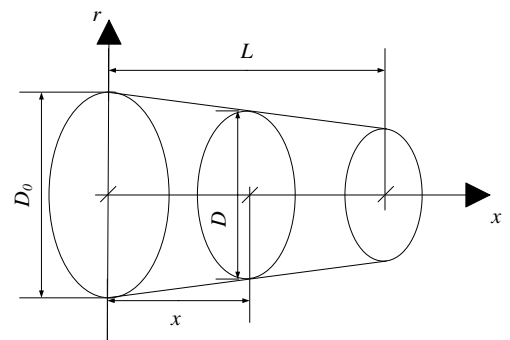
Максимални број поена који се може добити на сваком од питања је 2.

1. Одредити промену процентуалног односа протока воде који дотичу из бојлера и из водоводне мреже за случај да температура воде у водоводној мрежи износи  $15^{\circ}\text{C}$ , температура воде на изласку из славине  $45^{\circ}\text{C}$ , при промени температуре воде у бојлеру од  $90^{\circ}\text{C}$  до  $50^{\circ}\text{C}$ . Густина воде износи  $\rho_v = 1000\text{kg/m}^3$ , специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200\text{J/(kgK)}$ .

2. Одредити дозвољену једносмерну струју кратког споја  $I_{doz}$ , трајања  $t_k = 0,5\text{s}$ , проводника од бабра површине попречног пресека  $95\text{mm}^2$  ако је максимална дозвољена температура изолације  $\vartheta_{doz} = 180^{\circ}\text{C}$ , а кратак спој настаје при температури  $\vartheta_p = 80^{\circ}\text{C}$ . Познате су карактеристике бабра:  $c_{Cu} = 385\text{J/(kg}^{\circ}\text{C)}$ ,  $\rho_{Cu} = 8933\text{kg/m}^3$ , специфична електрична проводност на  $20^{\circ}\text{C}$   $\sigma_{20\text{Cu}} = 56 \cdot 10^6\text{S/m}$  и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром  $\alpha_{Cu20} = 4,29 \cdot 10^{-3}\text{C}^{-1}$ . При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски. При прорачуну снаге генерисања топлоте узети у обзир температурну промену електричне проводности; може се сматрати да струја кратког споја има константну вредност.

3. Написати систем једначина чијим се решавањем може одредити расподела температуре у проводницима намотаја сувог електроенергетског трансформатора. Висина намотаја је  $H = 0,75\text{m}$ , а унутрашњи пречник  $D_u = 363\text{mm}$ . Намотај је фолијског типа и има  $N = 119$  навојака, сваки висине једнаке висини намотаја; дебљина изолације између навојака износи  $\delta_i = 0,046\text{mm}$ , специфична топлотна проводност изолације  $\lambda_i = 0,15\text{W/mK}$ , ширина проводника (алуминијум)  $\delta_{Al} = 0,2\text{mm}$ . Струја кроз проводнике износи  $I = 195\text{A}$ . Слој изолације постоји и на унутрашњој страни кроз унутрашњег навојка и на спољној страни кроз спољашњег навојка. При дефинисању снаге генерисане топлоте у навојцима занемарити ефекат потискивања струје. Вредност специфичне електричне отпорности алуминијума  $\rho_{Al}$  на  $20^{\circ}\text{C}$  износи  $\rho_{Al20} = 2,65 \cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$ , а вредност при температури  $\vartheta$  се добија множењем  $\rho_{Al20}$  са  $(225 + \vartheta)/(225 + 20)$ . Намотај се хлади ваздухом температуре  $20^{\circ}\text{C}$ , при чему коефицијент преласка топлоте струјањем са унутрашње стране површи на ваздух износи  $\alpha_u = 6\text{W/m}^2\text{K}$ , а са спољашње стране површи на ваздух износи  $\alpha_s = 10\text{W/m}^2\text{K}$ . Поред тога, наспрам унутрашње цилиндричне површи, на малом растојању, налази се цилиндрична површ температуре  $\vartheta_{uc} = 75^{\circ}\text{C}$ , а наспрам спољашње цилиндрична површ температуре  $\vartheta_{sc} = 60^{\circ}\text{C}$ . Коефицијент сивоће површи износи  $\varepsilon = 0,8$ .

4. Написати диференцијалну једначину чијим се решавањем може одредити промена температуре дуж ребра за хлађење  $\vartheta(x)$  чији је већи базис ослоњен на тело температуре површи  $\vartheta_b$  (промена температуре ребра по  $r$  координати се може занемарити). Ребро је приказано на слици.  $D = D_0 + a \cdot x$ , где је  $a$  позната негативна константа. Свести израз до коначног облика који претходи самом решавању диференцијалне једначине. Израз мора да садржи само непознату применљиву, променљиву координату  $x$  и константе које се одређују на основу познатих (у тексту задатих) параметара. Такође написати и граничне услове помоћу којих се могу одредити интеграционе константе приликом решавања ове диференцијалне једначине. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре  $\vartheta_a$  износи  $\alpha$ . Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи  $\lambda$ . Сматрајући да је диференцијална једначина решена, односно да је познат израз за промену температуре дуж ребра, написати изразе помоћу којих је могуће израчунати укупну снагу одвођења топлоте струјањем са ребра, као и израз за ефикасност ребра за хлађење.  $\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i}_x$



5. За један трансформатор са ODAF хлађењем одабран је компактан хладњак чија је номинална снага 30% већа од снаге укупних губитака у трансформатору. Сматра се да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља:  $\vartheta_{un} = 102^{\circ}\text{C}$  и  $\vartheta_{hn} = 95,9^{\circ}\text{C}$ , температуре хладног и топлог ваздуха:  $\vartheta_{hn} = 40^{\circ}\text{C}$  и  $\vartheta_{vn} = 64,55^{\circ}\text{C}$ , номинална снага  $P_{hn} = 210\text{kW}$ , проток уља  $Q_{un} = 68\text{m}^3/\text{h}$  и проток ваздуха  $Q_{vn} = 28,29\text{m}^3/\text{s}$ . Колико износе температуре уља на уласку и изласку из хладњака у следећој ситуацији: укупан коефицијент преноса топлоте услед запрљања хладњака у току експлоатације је смањен за 30%, снага губитака једнака номиналној, температура амбијента  $20^{\circ}\text{C}$ , проток ваздуха је једнак номиналном и проток уља 5% већи од номиналног. Параметри уља и ваздуха су исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру.

## 1. Задатак

Нека је:

- $Q_{sl}$  запремински проток воде која се истаче на славини, константне температуре  $45^{\circ}\text{C}$ ,
- $Q_b$  запремински проток воде из бојлера (расте током времена, јер температура воде у бојлеру опада),
- $Q_v$  запремински проток воде из водовода (опада током времена, јер температура воде у бојлеру опада, па је потребно све мање хладне воде).

Снага преноса енергије услед протока воде познатог запреминског протока  $Q$  је сразмеран производу  $\rho Q c_{pv}$  и промени температуре воде  $\Delta\vartheta$ . Једначина мешања воде из бојлера и воде из водоводне мреже:

$$Q_b \cdot \rho(\vartheta_b) \cdot c_{pv} \left( \frac{\vartheta_b + \vartheta_v}{2} \right) \cdot (\vartheta_b - \vartheta_v) + Q_v \cdot \rho(\vartheta_v) \cdot c_{pv}(\vartheta_v) \cdot (\vartheta_v - \vartheta_v) = Q_{sl} \cdot \rho(\vartheta_{sl}) \cdot c_{pv} \left( \frac{\vartheta_{sl} + \vartheta_v}{2} \right) \cdot (\vartheta_{sl} - \vartheta_v) \quad (1.1)$$

По услову задатка се може сматрати да се вредности густине и специфичног масеног топлотног капацитета воде не мењају са температуром, када важи

$$Q_b + Q_v = Q_{sl} \quad (1.2)$$

после чега се једначина (1.1) своди на:

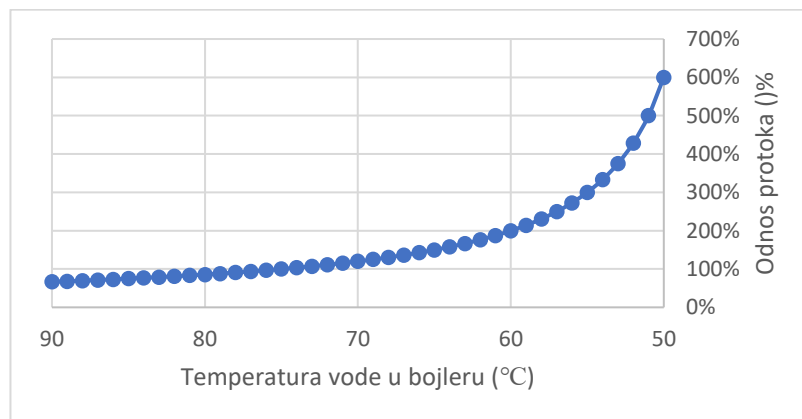
$$Q_b \cdot \vartheta_b + Q_v \cdot \vartheta_v = Q_{sl} \cdot \vartheta_{sl} \quad (1.3)$$

Заменом једначине (1.2) у једначину (1.3) добија се тражени однос:

$$\frac{Q_b}{Q_v} = \frac{\vartheta_{sl} - \vartheta_v}{\vartheta_b - \vartheta_{sl}} \quad (1.4)$$

Заменом бројних вредности добија се тражена зависност (бројне вредности приказане су на слици 1.1):

$$\frac{Q_b}{Q_v} [\%] = \frac{30}{\vartheta_b - 45} \cdot 100 \quad (1.5)$$



Слика 1.1

## 2. Задатак

Пошто се термички процес по настанку кратког споја сматра адијабатским, занемарује се снага којом се топлота размењује са околином у току кратког споја и сматра се да се целокупна топлотна енергија генерисана у том периоду акумулира у проводнику. Оваква претпоставка је при проверама загревања у току кратког споја на страни сигурности, тј. стварно загревање проводника у току кратког споја је мало мање од тако израчунатог.

Снага којом се топлотна енергија акумулира у бакру једнака је снази којом се топлота генерише услед Џулових губитака.

$$P_{gen} = P_{akum} \quad (2.1)$$

Подужна снага којом се топлотна енергија генерише у проводнику дата је изразом

$$P_{gen} = \frac{1}{\sigma_{Cu20}} (1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20)) \frac{l_{doz}^2}{S_{Cu}} \quad (2.2)$$

Подужна снага којом се енергија акумулише у проводнику дата је изразом

$$P_{akum} = C_{Cu}^T \frac{d\vartheta_{Cu}}{dt} \quad (2.3)$$

Подужни топлотни капацитет проводника је једнак

$$C_{Cu}^T = \rho_{Cu} S_{Cu} c_{pCu} = 326,724 \frac{J}{mK} \quad (2.4)$$

Полазећи од претходник израза може се одредити максимална дозвољена струја кратког споја који би трајао  $t_k = 0,5s$ :

$$C_{Cu}^T \frac{d\vartheta_{Cu}}{dt} = \frac{1}{\sigma_{Cu20}} (1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20^\circ C)) \frac{I_{doz}^2}{S_{Cu}} \quad (2.5)$$

$$\frac{d\vartheta_{Cu}}{(1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20^\circ C))} = \frac{1}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} I_{doz}^2 dt \quad (2.6)$$

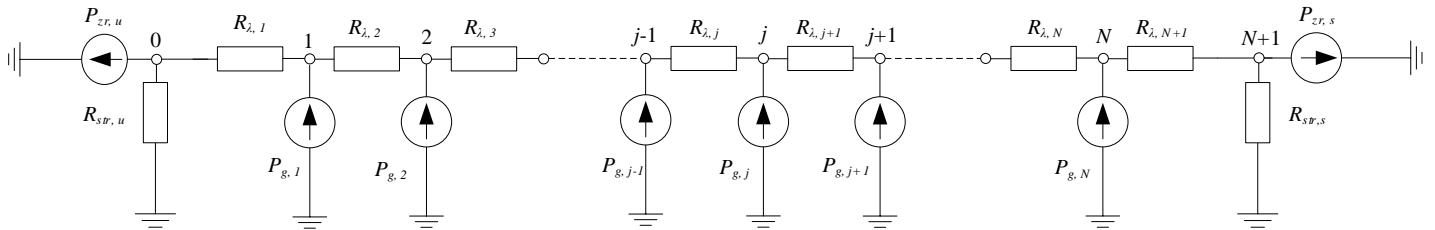
$$\int_{\vartheta_p=80^\circ C}^{\vartheta_{doz}=180^\circ C} \frac{d\vartheta_{Cu}}{(1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{Cu} - 20))} = \int_{t=0}^{t_k=0,5s} \frac{1}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} I_{doz}^2 dt = \frac{1}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} I_{doz}^2 t_k \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\alpha_{Cu20}} \ln \frac{1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_{doz} - 20^\circ C)}{1 + \alpha_{Cu20}(\vartheta_p - 20^\circ C)} = \frac{1}{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}} I_{doz}^2 t_k \quad (2.8)$$

$$I_{doz} = \sqrt{\frac{C_{Cu}^T \sigma_{Cu20} S_{Cu}}{\alpha_{Cu20} t_k} \ln \frac{1 + \alpha_{Cu20}(180^\circ C - 20^\circ C)}{1 + \alpha_{Cu20}(80^\circ C - 20^\circ C)}} = \sqrt{810336447,55 \ln \frac{1.6864}{1.2574}} = 15423,17 A \quad (2.9)$$

### 3. Задатак

Топлотна шема приказана је на слици 3.1.



Слика 3.1

Вредности топлотних отпорности у шеми једнаке су:

$$R_{str,u} = \frac{1}{\alpha_u S_u} \quad (3.1)$$

$$R_{str,s} = \frac{1}{\alpha_s S_s} \quad (3.2)$$

$$R_{\lambda,j} = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta_i}{S_j} \quad (3.3)$$

где је  $j = 1, 2, 3, \dots, N+1$ , а површине потребне за њихово израчунавање:

$$S_u = \pi D_u H \quad (3.4)$$

$$S_s = \pi(D_u + 2N\delta_{Al} + 2(N+1)\delta_i)H \quad (3.5)$$

$$S_j = \pi(D_u + 2(j-1)\delta_{Al} + 2(j-1)\delta_i + \delta_i)H = \pi(D_u + 2(j-1)\delta_{Al} + (2j-1)\delta_i)H \quad (3.6)$$

Снага Џулових губитака у сваком од навојака једнака је

$$P_{g,j} = R_j I^2 \quad (3.7)$$

где је  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ , а отпорност сваког навојка

$$R_j = \rho_{Al, \vartheta_j} \frac{l_j}{S_p} = \rho_{Al, 20^\circ C} \frac{225 + \vartheta_j}{225 + 20} \cdot \frac{l_j}{S_p} \quad (3.8)$$

где је површина попречног пресека једног навојка  $S_p = \delta_{Al} H$ , а дужина једног навојка

$$l_j = \pi(D_u + 2(j-1)\delta_{Al} + 2(j-1)\delta_i + \delta_{Al}) \quad (3.9)$$

С обзиром да се површи температура  $\vartheta_{uc} = 75^\circ\text{C}$  и  $\vartheta_{sc} = 60^\circ\text{C}$  налазе на веома малом одстојању од површи намотаја, може се усвојити претпоставка да су фактори виђења између њих једнаки 1, тако да снаге којима се топлота зрачењем одводи са спољашње и унутрашње површине намотаја

$$P_{zr,u} = \varepsilon \sigma_c ((\vartheta_0 + 273,15)^4 - (\vartheta_{uc} + 273,15)^4) S_u \quad (3.10)$$

$$P_{zr,s} = \varepsilon \sigma_c ((\vartheta_{N+1} + 273,15)^4 - (\vartheta_{sc} + 273,15)^4) S_s \quad (3.11)$$

Снаге којима се топлота одводи струјањем са спољашње и унутрашње површине намотаја су:

$$P_{str,u} = \frac{\vartheta_0 - 20^\circ\text{C}}{R_{str,u}} \quad (3.12)$$

$$P_{str,s} = \frac{\vartheta_{N+1} - 20^\circ\text{C}}{R_{str,s}} \quad (3.13)$$

Систем од  $N+2$  једначине чијим се решавањем може одредити расподела температуре у проводницима намотаја:

- За чвор 0:

$$P_{zr,u} + P_{str,u} + \frac{\vartheta_0 - \vartheta_1}{R_{\lambda,1}} = 0 \quad (3.14)$$

- За чвор  $N+1$ :

$$P_{zr,s} + P_{str,s} + \frac{\vartheta_{N+1} - \vartheta_N}{R_{\lambda,N+1}} = 0 \quad (3.15)$$

- За чворове  $j = 1, 2, 3, \dots, N$ :

$$\frac{\vartheta_{j-1} - \vartheta_j}{R_{\lambda,j}} + \frac{\vartheta_{j+1} - \vartheta_j}{R_{\lambda,j+1}} + P_{g,j} = 0 \quad (3.16)$$

#### 4. Задатак

Површинска густина снаге провођења рачуна се по формули:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \text{grad}\vartheta = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \right) \quad (4.1)$$

Пошто се температура ребра мења само дуж  $x$ -осе тј. важи  $\vec{q}_s = \vec{q}_s(x) = \text{const}(r, \varphi)$ , израз (4.1) се своди на:

$$\vec{q}_{s,x} = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \quad (4.2)$$

Флуks вектора површинске густине снаге кроз површ пречника  $D(x)$ :

$$q(x) = \vec{q}_{s,x} \cdot \vec{S}(x) = q_{s,x} \cdot \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x \cdot S(x) = -\lambda \cdot \frac{(D_0 + a \cdot x)^2 \pi}{4} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (4.3)$$

Диференцирањем по  $x$  координати израза (4.3) добија се израз за снагу провођења на делићу ребра, на одстојању  $x$  од координатног почетка, и дебљине  $dx$ :

$$\frac{\partial q(x)}{\partial x} dx = -\frac{\lambda\pi}{4} \left[ 2 \cdot (D_0 + a \cdot x) \cdot a \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \right] dx \quad (4.4)$$

Са површине овог делића постоји одвођење топлоте струјањем:

$$dq_{str}(x) = \alpha \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \cdot \pi (D_0 + a \cdot x) \cdot dx \quad (4.5)$$

Израз за биланс снаге на овом делићу гласи:

$$dq_{str}(x) = -\frac{\partial q(x)}{\partial x} dx \quad (4.6)$$

Заменом израза (4.4) и (4.5) у израз (4.6) добија се тражена диференцијална једначина:

$$\alpha \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) = \frac{\lambda}{4} \left[ 2 \cdot a \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + (D_0 + a \cdot x) \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \right] \quad (4.7)$$



која се компактније може записати као:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + A \cdot \frac{d\vartheta}{dx} + B \cdot \vartheta(x) + C = 0 \quad (4.8)$$

где су  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$A = \frac{2 \cdot a}{D_0 + a \cdot x} \quad (4.9)$$

$$B = -\frac{4 \cdot \alpha}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)} \quad (4.10)$$

$$C = \frac{4 \cdot \alpha \cdot \vartheta_a}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)} \quad (3.11)$$

Гранични услови:

$$\vartheta(x = 0) = \vartheta_b \quad (4.12)$$

$$-\lambda \frac{d\vartheta}{dx}(x = L) = \alpha \cdot (\vartheta(x = L) - \vartheta_a) \quad (4.13)$$

Уколико је познат начин промене температуре дуж ребра ( $\vartheta(x)$ ), укупна снага која се са ребра одводи струјањем рачуна се као:

$$q_{uk} = -\lambda \cdot \frac{D_0^2 \pi}{4} \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(x = 0) \quad (4.14)$$

Ефикасност ребра за хлађење дефинише се као однос снаге којом се топлота односи са реалног ребра и снаге којом би се топлота односила са површи омотача цилиндричног ребра за хлађење чија би температура била  $\vartheta_b$ :

$$\eta = \frac{q_{uk}}{\alpha S_{rebra}(\vartheta_b - \vartheta_a)} \quad (4.15)$$

где је  $S_{rebra}$ :

$$S_{rebra} = \int_{x=0}^L dS + \frac{(D_0 + a \cdot L)^2 \pi}{4} = \int_{x=0}^L (D_0 + a \cdot x) \cdot \pi \cdot dx + \frac{(D_0 + a \cdot L)^2 \pi}{4} = \pi \left( D_0 L + \frac{aL^2}{2} \right) + \frac{(D_0 + a \cdot L)^2 \pi}{4} \quad (4.16)$$

## 5. Задатак

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S (\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right)} = \frac{K_p S (\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)} \quad (5.1)$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 31,35^\circ\text{C} \quad (5.2)$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 62^\circ\text{C} \quad (5.3)$$

Заменом ових вредности у израз (5.1), уз  $P_{hn} = 210 \text{ kW}$  добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 4,672 \frac{\text{kW}}{^\circ\text{C}} \quad (5.4)$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \quad (5.5)$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \quad (5.6)$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{Q_{vn} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn})} = 0,3024 \frac{\text{kW}}{\text{m}^3 \text{C}} \quad (5.7)$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{Q_{un}(\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun})} = 0.5063 \frac{kWs}{m^3 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad (5.8)$$

Како је номинална снага хладњака за 30% већа од номиналне снаге губитака имамо да је  $P_h = P_{hn}/1,3 = 161,54 \text{ kW}$ . Проток ваздуха једнак је номиналном  $Q_v = Q_{vn}$ , док је температура опала на  $\vartheta_{hv} = 20^\circ\text{C}$ . Сада, за ову снагу хлађења и овај проток можемо написати израз аналоган изразу (5.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (5.9)$$

На основу израза (5.9) долазимо до:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 38,88^\circ\text{C} \quad (5.10)$$

Проток уља повећао се за 5% на  $Q_u = 1,05 \cdot Q_{un} = 71,4 \text{ m}^3/\text{h}$ , па и за уље се сада може написати израз аналоган изразу (5.10):

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} \quad (5.11)$$

За стварну снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (5.1):

$$P_h = \frac{K_p^z S (\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}} \right)} \quad (5.12)$$

Услед задрљања дошло је до смањења укупног коефицијента преноса топлоте:

$$K_p^z S = 0,7 \cdot K_p S = 3,27 \frac{kW}{^\circ\text{C}} \quad (5.13)$$

Заменом израза (5.10), (5.11) и (5.13) у (5.12), као и бројних вредности за  $P_h$  и  $\vartheta_{hv}$ , добија се једначина, чијим се решавањем добија температура уља на уласку у хладњак:

$$161,54 = \frac{3,27 \cdot \left( \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - 38,88 - \vartheta_{tu} + 20 \right)}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - 38,88}{\vartheta_{tu} - 20} \right)} \quad (5.14)$$

$$161,54 = \frac{3,27 \cdot (\vartheta_{tu} - 4,47 - 38,88 - \vartheta_{tu} + 20)}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - 4,47 - 38,88}{\vartheta_{tu} - 20} \right)} \quad (5.15)$$

$$161,54 = \frac{-76,3545}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - 43,35}{\vartheta_{tu} - 20} \right)} \quad (5.16)$$

$$\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - 43,35}{\vartheta_{tu} - 20} \right) = \frac{-76,3545}{161,54} = -0,47267 \quad (5.17)$$

$$\frac{\vartheta_{tu} - 43,35}{\vartheta_{tu} - 20} = e^{-0,47267} = 0,62 \quad (5.18)$$

$$\vartheta_{tu} = \frac{43,35 - 20 \cdot 0,62}{1 - 0,62} = 81,45^\circ\text{C} \quad (5.19)$$

Температура уља на изласку из хладњака је:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 81,45 - 4,47 = 76,98^\circ\text{C} \quad (5.20)$$



Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута

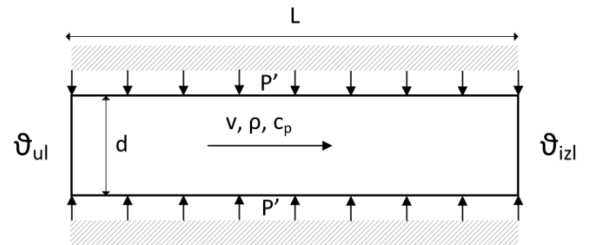
22.9.2021.

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

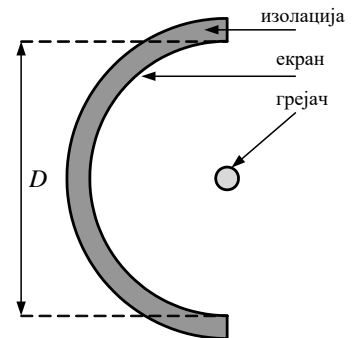
Максимални број поена који се може добити на сваком од питања је 2.

1. Раван хомоген зид сачињен од гвожђа дебљине  $\delta_{Fe} = 8 \text{ mm}$  загрева се услед генерисања топлоте по запремини снагом чија се запреминска густина мења на начин:  $q_v(x) = q_{v0} \cdot e^{-x/\delta}$  ( $q_{v0} = 200 \cdot 10^3 \text{ W/m}^3$ ,  $\delta = 5 \text{ mm}$ ). Са унутрашње стране зида нанет је слој фарбе дебљине  $\delta_{fi} = 0,1 \text{ mm}$ , а са спољашње слој цинка дебљине  $\delta_{Zn} = 0,08 \text{ mm}$  и фарбе дебљине  $\delta_{fs} = 0,15 \text{ mm}$ . Специфична топлотна проводност фарбе износи  $\lambda_f = 0,2 \text{ W/(mK)}$  и много је мања од вредности за гвожђе и цинк. Одредити температуру површи унутрашње стране зида која је у додиру са уљем. Коefицијент преласка топлоте струјањем према уљу температуре  $\vartheta_u = 70^\circ\text{C}$  износи  $\alpha_u = 65 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ , а према амбијенталном ваздуху температуре  $\vartheta_a = 20^\circ\text{C}$  износи  $\alpha_a = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ .

2. Израчунати вредност температуре уља на излазу из цеви дужине  $L = 2 \text{ m}$  и унутрашњег пречника  $d = 1 \text{ cm}$ , која се загрева подужном снагом  $P' = 1000 \text{ W/m}$ . Цев је идеално топлотно изолована од околине. Температура уља на уласку у цев је  $\vartheta_{ul} = 20^\circ\text{C}$ , а његова брзина струјања на уласку у цев  $v = 25 \text{ cm/s}$ . Густина уља при  $20^\circ\text{C}$  износи  $\rho = 980 \text{ kg/m}^3$ , а температурна зависност специфичног топлотног капацитета гласи  $c_p(\text{J/kgK}) = 2200 + 3.6 \cdot \vartheta$ , где је  $\vartheta$  температура у  $^\circ\text{C}$ . При решавању задатка сматрати да је вредност  $c_p$  константна, одређена према средњој температури уља на уласку и изласку из цеви.



3. На слици је приказан штапни грејач дужине  $L = 80 \text{ cm}$ , пречника  $d = 1 \text{ cm}$  и снаге  $1 \text{ kW}$ , са цилиндричним екраном пречника  $D = 10 \text{ cm}$ . Спољашња површ екрана је идеално топлотно изолована. Уколико је температура амбијента  $20^\circ\text{C}$ , одредити температуре грејача и екрана. Занемарити пренос топлоте струјањем са екрана и грејача на ваздух и ефекте крајева. Емисивности површи грејача и екрана износе  $0,95$  и  $0,2$ , респективно.

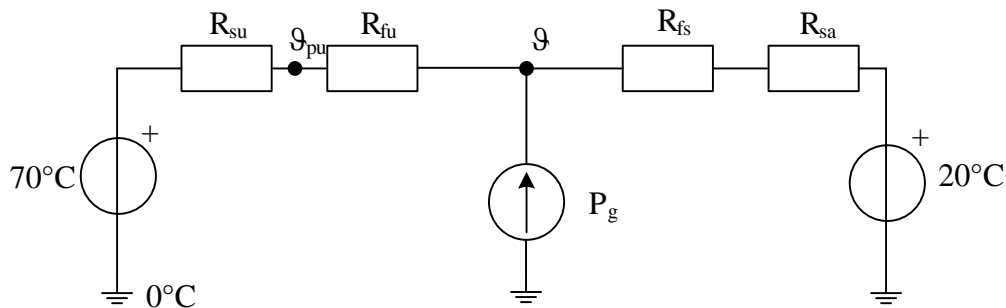


4. Дефинисати Biot-ов број. Дати његову општу математичку формулацију. Како се Biot-ов број користи при процени могућности да се при прорачуну температуре нека запремина може посматрати као изотермичка?

5. За један трансформатор са ODAF хлађењем одабран је компактан хладњак чија је номинална снага  $30\%$  већа од снаге укупних губитака у трансформатору. Сматра се да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља:  $\vartheta_{un} = 102^\circ\text{C}$  и  $\vartheta_{hn} = 95,9^\circ\text{C}$ , температуре хладног и топлог ваздуха:  $\vartheta_{hv} = 40^\circ\text{C}$  и  $\vartheta_{vn} = 64,55^\circ\text{C}$ , номинална снага  $P_{hn} = 210 \text{ kW}$ , проток уља  $Q_{un} = 68 \text{ m}^3/\text{h}$  и проток ваздуха  $Q_{vn} = 28,29 \text{ m}^3/\text{s}$ . Колико износе температуре уља на уласку и изласку из хладњака у следећој ситуацији: укупан коefицијент преноса топлоте услед запрљања хладњака у току експлоатације је смањен за  $30\%$ , снага губитака једнака номиналној, температура амбијента  $20^\circ\text{C}$ , проток ваздуха је једнак номиналном и проток уља  $5\%$  мањи од номиналног. Параметри уља и ваздуха су исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру.

## 1. Задатак

Одговарајућа топлотна шема приказана је на слици 1.1:



Слика 1.1

$R_{fu}$  - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз унутрашњи слој фарбе

$R_{fs}$  - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз спољашњи слој фарбе

$R_{su}$  - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка уљу

$R_{sa}$  - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка ваздуху (амбијенту)

$P_g$  - снага генерисања топлоте у зиду (гвожђе дебљине 8 mm)

$\vartheta_{pu}$  - температура површи унутрашње стране зида

Вредности параметара топлотне шеме могу се одредити на следећи начин:

$$R_{fu} = \frac{\delta_{fu}}{\lambda_f S} = 0,0005/S \quad (1.1)$$

$$R_{fs} = \frac{\delta_{fs}}{\lambda_f S} = 0,00075/S \quad (1.2)$$

$$R_{su} = \frac{1}{\alpha_u S} = 0,01538/S \quad (1.3)$$

$$R_{sa} = \frac{1}{\alpha_a S} = 0,2/S \quad (1.4)$$

$$P_g = \int_V q_v(x) dV = \int_{x=0}^{\delta_{Fe}} q_v(x) S dx = \int_{x=0}^{\delta_{Fe}} q_{v0} e^{-x/\delta} S dx = q_{v0} S \delta \left(1 - e^{-\delta_{Fe}/\delta}\right) = 798,1 \cdot S \quad (1.5)$$

Снага губитака генерисаних у зиду се делом одводи ка уљу, а делом ка амбијенту. На основу тога може се написати следећа једначина:

$$P_g = \frac{\vartheta - \vartheta_u}{R_{fu} + R_{su}} + \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R_{fs} + R_{sa}} \quad (1.6)$$

$$798,1 = \frac{\vartheta - 70^\circ\text{C}}{0,0005 + 0,01538} + \frac{\vartheta - 20^\circ\text{C}}{0,00075 + 0,2} \quad (1.7)$$

Решавањем једначине (1.7) добија се вредност температуре у средини запремине зида  $\vartheta = 78,084^\circ\text{C}$ . Температура површи зида која је у додиру са уљем је:

$$\vartheta_{pu} = \vartheta - \frac{\vartheta - \vartheta_u}{R_{fu} + R_{su}} \cdot R_{fu} = 77,83^\circ\text{C} \quad (1.8)$$

## 2. Задатак

Целокупна топлотна енергија генерисана у цеви се преноси ка уљу и изазива пораст његове температуре дуж правца струјања  $x$ :

$$P'x = \rho c_p Q (\vartheta(x) - \vartheta_{ul}) \quad (2.1)$$

где је

$$Q = vS = v\pi \frac{d^2}{4} = 0,25 \cdot \pi \cdot \frac{0,01^2}{4} = 0,00001963 \text{ m}^3/\text{s} \quad (2.2)$$

Температура уља на изласку добија се за  $x=L$ . Заменом израза за зависност специфичног топлотног капацитета од температуре у (2.2) добија се:

$$\frac{P'L}{\rho Q} = (2200 + 3,6 \frac{\vartheta_{izl} + \vartheta_{ul}}{2}) (\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) \quad (2.3)$$

$$\frac{P'L}{\rho Q} = 2200(\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) + 1,8(\vartheta_{izl}^2 - \vartheta_{ul}^2) \quad (2.4)$$

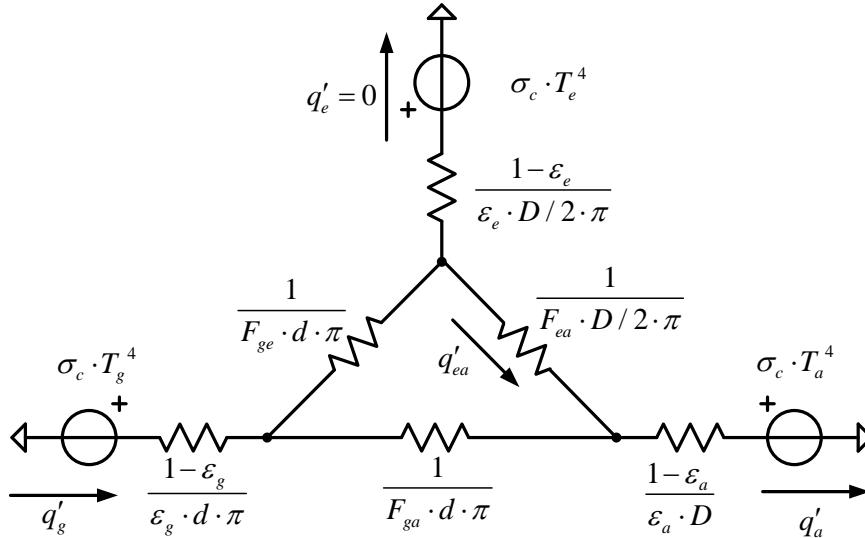
$$\vartheta_{izl}^2 + \frac{2200}{1,8} \vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}^2 - \frac{2200}{1,8} \vartheta_{ul} - \frac{P'L}{1,8\rho Q} = 0 \quad (2.5)$$

$$\vartheta_{izl}^2 + 1222,22\vartheta_{izl} - 82602,31 = 0 \quad (2.6)$$

Решавањем квадратне једначине (2.6) добија се температура уља на изласку  $\vartheta_{izl} = 64,21^\circ\text{C}$ .

### 3. Задатак

Задатак се може решити применом радијационе шеме. С обзиром да се радијациона шема може формирати искључиво за затворен систем површи, он ће се формирати додавањем фиктивне површи која одговара амбијенту ( $\varepsilon_a = 1$ ). На тај начин се добија радијациона шема са три чвора (грејач, екран, амбијент) приказана на слици 3.1.



Слика 3.1

Вредности фактора виђења између појединих површи одређују се под претпоставком да су и екран и грејач довољно дугачки и да се ефекти крајева могу занемарити. Уколико је претходни услов испуњен, у радијационој шеми фигуришу само подужне вредности.

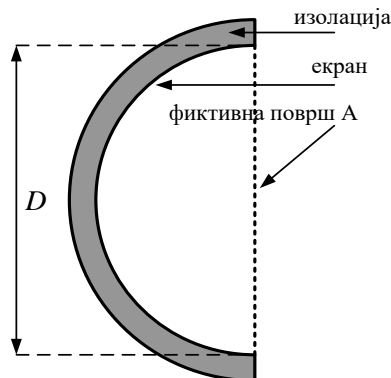
Због конвексности површи грејача, његов сопствени фактор виђења је једнак нули. Фактори виђења екрана и амбијента од стране грејача ( $F_{ge}$  и  $F_{ga}$ ) су једнаки (пошто се и екран и амбијент из центра грејача виде под углом од 180 степени) и износе:

$$F_{ga} = F_{ge} = \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

Фактор виђења грејача од стране екрана (иста вредност је за фактор виђења грејача од стране амбијента) износи:

$$F_{eg} = F_{ge} \cdot \frac{S_g}{S_e} = F_{ge} \cdot \frac{d \cdot \pi \cdot L}{\frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi \cdot L} = F_{ge} \cdot \frac{2 \cdot d}{D} = \frac{d}{D} = 0,1 \quad (3.2)$$

Сопствени фактор виђења екрана  $F_{ee}$  се може израчунати полазећи од  $F_{ee} + F_{ea} + F_{eg} = 1$ . Збир  $F_{ea} + F_{eg}$  представља фактор виђења фиктивне површи А (за њега ће се у даљем тексту користити ознака  $F_{eA}$ ), приказане на слици 3.2. Површ А је конвексна, из чега се закључује да је њен сопствени фактор виђења једнак нули и да сва снага емитована са А доспева на екран. На основу тога се закључује да је фактор виђења екрана од стране површи А једнак 1, из чега се одређују фактор виђења површи А од стране екрана и тражени сопствени фактор виђења екрана.



Слика 3.2

$$F_{eA} = F_{Ae} \cdot \frac{S_A}{S_e} = F_{Ae} \cdot \frac{D \cdot L}{\frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi \cdot L} = \frac{2}{\pi} \cdot F_{Ae} = \frac{2}{\pi} \quad (3.3)$$

$$F_{ee} = 1 - F_{eA} = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi} \approx 0,3634 \quad (3.4)$$

Фактор виђења амбијента од стране екрана добија се на следећи начин:

$$F_{ea} = 1 - F_{eg} - F_{ee} \approx 0,5366 \quad (3.5)$$

Пошто је задња површ екрана идеално топлотно изолована и занемарено струјање са екрана на ваздух, снага зрачења која се предаје екрану једнака је оној која се са њега емитује, из чега се закључује да је укупна снага која се размењује са екраном једнака нули. То за последицу има да је грана која представља површ екрана у радијационој шеми у прекиду. Укупан отпор у радијационој шеми између грејача и амбијента износи:

$$R_{zr\_uk} = \frac{1 - \varepsilon_g}{\varepsilon_g \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi} \parallel \left( \frac{1}{F_{ge} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} D \cdot \pi} \right) = 36,219 \text{ m}^{-1} \quad (3.6)$$

Подужна снага којом се енергија односи са грејача једнака је подужној снази којом се топлота генерише у грејачу. На основу тога могуће је одредити температуру грејача:

$$\sigma_c \cdot T_g^4 - \sigma_c \cdot T_a^4 = R_{zr\_uk} \cdot q'_g \quad (3.7)$$

$$T_g = \sqrt[4]{\frac{R_{zr\_uk} \cdot q'_g}{\sigma_c} + T_a^4} = \sqrt[4]{\frac{R_{zr\_uk} \cdot P_g}{\sigma_c \cdot L_g} + T_a^4} = 947,47 \text{ K} \quad (3.8)$$

Подужна снага којом се топлота размењује између екрана и амбијента износи

$$q'_{ea} = q'_g \cdot \frac{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi}}{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ge} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} D \cdot \pi}} = \frac{P_g}{L_g} \cdot \frac{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi}}{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ge} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} D \cdot \pi}} = 571,73 \frac{\text{W}}{\text{m}} \quad (3.9)$$

Температура екрана ( $q_e' = 0$ ,  $\varepsilon_a = 1$ ) добија се такође из радијационе шеме:

$$\sigma_c \cdot T_e^4 - \sigma_c \cdot T_a^4 = \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi} \cdot q'_{ea} \quad (3.10)$$

$$T_e = \sqrt[4]{\frac{q'_{ea}}{\sigma_c \cdot F_{ea} \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi} + T_a^4} = 597 \text{ K} \quad (3.10)$$

#### 4. Задатак

Casovi\_10\_do\_12.docx, стране 13 и 14.

#### 5. Задатак

На основу извођења са часова предавања од 16 до 18 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S (\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right)} = \frac{K_p S (\Delta \vartheta_{izl} - \Delta \vartheta_{ul})}{\ln \left( \frac{\Delta \vartheta_{izl}}{\Delta \vartheta_{ul}} \right)} \quad (5.1)$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta \vartheta_{izl} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 31,35^\circ\text{C} \quad (5.2)$$

$$\Delta \vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 62^\circ\text{C} \quad (5.3)$$

Заменом ових вредности у израз (5.1), уз  $P_{hn} = 210 \text{ kW}$  добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln \left( \frac{\Delta \vartheta_{izl}}{\Delta \vartheta_{ul}} \right)}{(\Delta \vartheta_{izl} - \Delta \vartheta_{ul})} = 4,672 \frac{\text{kW}}{^\circ\text{C}} \quad (5.4)$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \quad (5.5)$$

$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \quad (5.6)$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{Q_{vn} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn})} = 0,3024 \frac{kWs}{m^3 \cdot ^\circ C} \quad (5.7)$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{Q_{un} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun})} = 1822,57 \frac{kWs}{m^3 \cdot ^\circ C} \quad (5.8)$$

Како је номинална снага хладњака за 30% већа од номиналне снаге губитака имамо да је  $P_h = P_{hn}/1,3 = 161,54 \text{ kW}$ . Проток ваздуха једнак је номиналном  $Q_v = Q_{vn}$ , док је температура опала на  $\vartheta_{hv} = 20^\circ C$ . Сада, за ову снагу хлађења и овај проток можемо написати израз аналоган изразу (5.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (5.9)$$

На основу израза (5.9) долазимо до:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 38,88^\circ C \quad (5.10)$$

Проток уља смањено се за 5% на  $Q_v = 0,95 \cdot Q_{vn} = 64,6 \text{ m}^3/\text{h}$ , па и за уље се сада може написати израз аналоган изразу (5.10):

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} \quad (5.11)$$

За стварну снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (5.1):

$$P_h = \frac{K_p^z S (\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}} \right)} \quad (5.12)$$

Услед задрљања дошло је до смањења укупног коефицијента преноса топлоте:

$$K_p^z S = 0,7 \cdot K_p S = 3,27 \frac{kW}{^\circ C} \quad (5.13)$$

Заменом израза (5.10), (5.11) и (5.13) у (5.12), као и бројних вредности за  $P_h$  и  $\vartheta_{hv}$ , добија се једначина, чијим се решавањем добија температура уља на уласку у хладњак:

$$161,54 = \frac{3,27 \cdot \left( \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - 38,88 - \vartheta_{tu} + 20 \right)}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} - 38,88}{\vartheta_{tu} - 20} \right)} \quad (5.14)$$

$$161,54 = \frac{3,27 \cdot (\vartheta_{tu} - 4,94 - 38,88 - \vartheta_{tu} + 20)}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - 4,94 - 38,88}{\vartheta_{tu} - 20} \right)} \quad (5.15)$$

$$161,54 = \frac{-77,8914}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - 43,82}{\vartheta_{tu} - 20} \right)} \quad (5.16)$$

$$\ln \left( \frac{\vartheta_{tu} - 43,82}{\vartheta_{tu} - 20} \right) = \frac{-77,8914}{161,54} = -0,48218 \quad (5.17)$$

$$\frac{\vartheta_{tu} - 43,82}{\vartheta_{tu} - 20} = e^{-0,48218} = 0,6174 \quad (5.18)$$

$$\vartheta_{tu} = \frac{43,82 - 20 \cdot 0,6174}{1 - 0,6174} = 82,26^\circ C \quad (5.19)$$

Температура уља на изласку из хладњака је:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 82,26 - 4,94 = 77,32^\circ C \quad (5.20)$$



Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

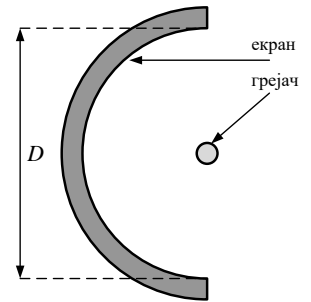
Испит траје максимално 180 минута

29.9.2021.

Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

Максимални број поена који се може добити на сваком од питања је 2.

1. Извести израз за ефикасност ребра за хлађење ( $\eta$ ) којим се одводи топлота са тела температуре  $\vartheta$ . Ребро је кружно попречног пресека пречника  $D$  и дужине  $L$ , а хлади се струјањем ваздуха температуре  $\vartheta_a$ . Топлотна проводности материјала од кога је сачињено ребро износи  $\lambda$ . Користити гранични услов да је снага која се одводи струјањем са базиса ребра који се хлади једнака нули. Ребро за хлађење се може користити у режимима да преко њега струји ваздух покретан вентилатором или да се хлади природним струјањем ваздуха. Користећи позив на математичке изразе објаснити због чега  $\eta$  зависи од режима хлађења.



2. На слици је приказан штапни грејач дужине  $L = 80$  cm, пречника  $d = 1$  cm и снаге 1 kW, са цилиндричним екраном пречника  $D = 10$  cm. Температура амбијента износи  $20^\circ\text{C}$ . Емисивности површи грејача и екрана износе 0,95 и 0,2, респективно. Сматрати да је температура по запремини танког екрана константна. Занемарити пренос топлоте струјањем са екрана и грејача на ваздух и ефекте крајева. Нацртати радијациону шему којом се моделује пренос топлоте и израчунати њене параметре.

3. Дефинисати *Biot*-ов број. Дати његову општу математичку формулацију. Како се *Biot*-ов број користи при процени могућности да се при прорачуну температуре нека запремина може посматрати као изотермичка?

4. Која су два ефекта којима се смањује температура изолације кабла који се полаже у тлу, а који се постижу постављањем слоја материјала погодних карактеристика непосредно око кабла. Након постављања овог слоја, кабловски канал се затрпава оригиналним ископом земље.

5. Посматрајмо електроотпорну грејну плочу стакло-керамичког шпорета снаге  $P = 1200$  W, пречника  $D_{gp} = 14$  cm. На грејну плочу се поставља метална посуда истог пречника, запремине  $V = 2$  l, потпуно испуњена водом. Специфични топлотни капацитет материјала од кога је сачињена шерпа износи  $c_{ps} = 474$  J/(kg K), а густина  $\rho_s = 8700$  kg/m<sup>3</sup>. Дебљина дна и поклопца (може се сматрати да су они облика диска), и зидова (облика шупљег цилиндра) износи  $\delta = 2$  mm. Густина воде  $\rho_v = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200$  J/(kgK). Време загревања воде од почетне температуре  $20^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$  износи 11 min. Колико би износило време загревања за идентичне услове, са једином разликом да запремина шерпе, потпуно испуњене водом, износи  $V' = 3$  l? Сматрати да је једини топлотни отпор преносу топлоте струјање са спољне површи шерпе на околни ваздух температуре  $20^\circ\text{C}$ , при чему је коефицијент преласку топлоте струјањем константан и исти за обе посуде. Топлотни капацитет грејача и плоче шпорета износи  $C_g = 450$  J/K.



## 1. Задатак

Површинска густина снаге провођења рачуна се по формули:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \text{grad}\vartheta = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \right) \quad (1.1)$$

Пошто се температуре ребра мења само дуж  $x$ -осе тј. важи  $\vec{q}_s = \vec{q}_s(x) = \text{const}(r, \varphi)$ , израз (3.1) се своди на:

$$\vec{q}_{s,x} = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \quad (1.2)$$

Флукс вектора површинске густине снаге кроз површ пречника  $D$ :

$$q(x) = \vec{q}_{s,x} \cdot \vec{S}(x) = q_{s,x} \cdot \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x \cdot S(x) = -\lambda \frac{D^2\pi}{4} \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (1.3)$$

Диференцирањем по  $x$  координати израза (1.3) добија се израз за биланс снаге провођења на делићу ребра, на одстојању  $x$  од координатног почетка, и дебљине  $dx$ :

$$\frac{dq(x)}{dx} = -\lambda \frac{D^2\pi}{4} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \quad (1.4)$$

Са површине, овог истога, делића постоји одвођење топлоте струјањем:

$$dq_{str}(x) = \alpha \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \cdot D\pi \cdot dx \quad (1.5)$$

Израз за биланс снаге на овом делићу гласи:

$$dq_{str}(x) = -dq(x) \quad (1.6)$$

Заменом израза (1.4) и (1.5) у израз (1.6) добија се тражена диференцијална једначина:

$$\alpha \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) = \frac{\lambda D}{4} \frac{d^2\vartheta}{dx^2} \quad (1.7)$$

која се може записати као:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{4\alpha}{\lambda D} (\vartheta(x) - \vartheta_a) = 0 \quad (1.8)$$

Опште решење диференцијалне једначине је

$$\vartheta(x) = C_1 \cdot e^{m \cdot x} + C_2 \cdot e^{-m \cdot x} + \vartheta_a \quad (1.9)$$

где је

$$m = \sqrt{\frac{4\alpha}{\lambda D}} \quad (1.9)$$

Гранични услови:

$$\vartheta(x=0) = \vartheta \quad (1.12)$$

$$-\lambda \frac{d\vartheta}{dx}(L) = 0 \quad (1.13)$$

Заменом општег решења диференцијалне једначине у изразе за граничне услове и њиховим решавањем по  $C_1$  и  $C_2$  добијају се интеграционе константе:

$$C_1 = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} \quad (1.14)$$

$$C_2 = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} e^{2mL} \quad (1.15)$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} e^{mx} + \frac{(\vartheta - \vartheta_a)e^{2mL}}{1 + e^{2mL}} e^{-mx} + \vartheta_a = (\vartheta - \vartheta_a) \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)} + \vartheta_a \quad (1.16)$$

Уколико је познат начин промене температуре дуж ребра ( $\vartheta(x)$ ), укупна снага која се са ребра одводи струјањем рачуна се као:

$$q_{uk} = -\lambda \cdot \frac{D^2\pi}{4} \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(x=0) \quad (1.17)$$

$$q_{uk} = m \frac{\lambda D^2\pi}{4} \frac{\vartheta - \vartheta_a}{1 + e^{2mL}} (e^{2mL} - 1) = m \frac{\lambda D^2\pi}{4} (\vartheta - \vartheta_a) \tanh(mL) \quad (1.18)$$

Ефикасност ребра за хлађење дефинише се као однос снаге којом се топлота односи са реалног ребра и снаге којом би се топлота односила са површи омотача цилиндричног ребра за хлађење чија би температура била  $\vartheta$ :

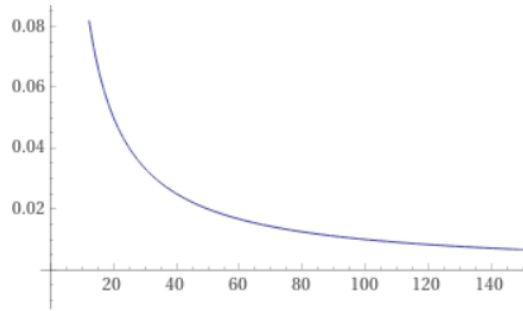
$$\eta = \frac{q_{uk}}{\alpha S_{rebrra}(\vartheta - \vartheta_a)} = \frac{m \frac{\lambda D^2\pi}{4} (\vartheta - \vartheta_a) \tanh(mL)}{\alpha(DL\pi + D^2\pi/4)(\vartheta - \vartheta_a)} = \frac{m \frac{\lambda D}{4} \tanh(mL)}{\alpha(L + D/4)} = \frac{m \frac{\alpha}{m^2} \tanh(mL)}{\alpha(L + D/4)} = \frac{\tanh(mL)}{m(L + D/4)} \quad (1.19)$$

Ефикасност ребра зависи од вредности од коефицијента преноса топлоте струјањем (индиректно преко  $m$ , које расте са порастом  $\alpha$ ). При принудном струјању  $\alpha$  је веће.

Функција:

$$f(m) = \frac{\tanh(m)}{m} \quad (1.20)$$

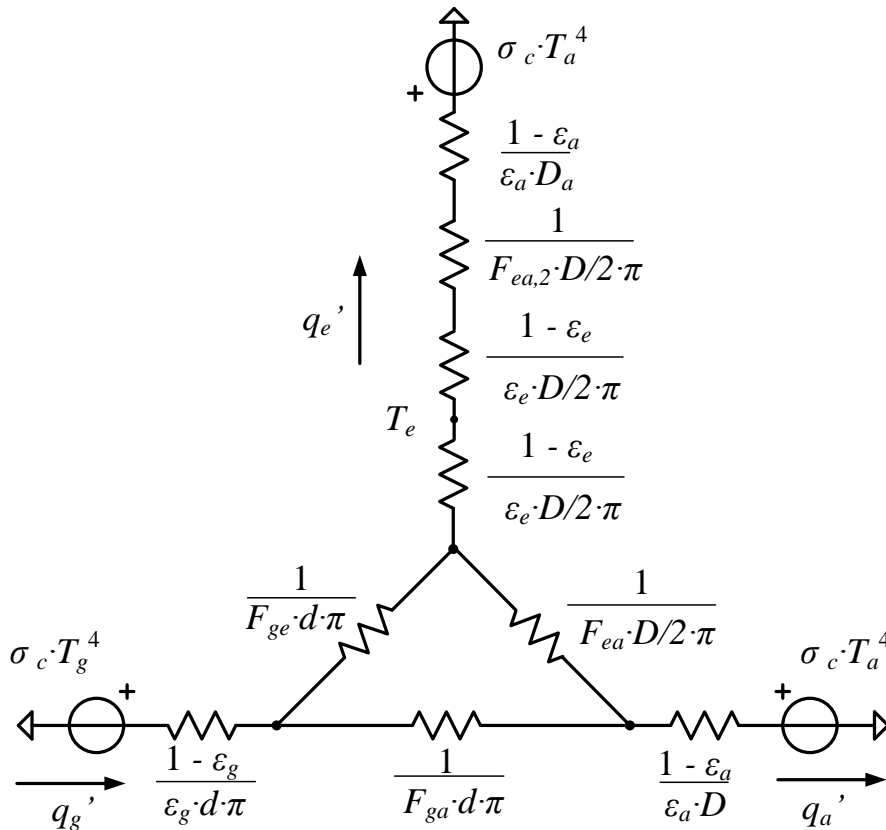
која описује промену ефикасности ребра са променом  $\alpha$  тј.  $m$  је опадајућа за позитивно  $x$  (слика 1.1). На основу тога закључујемо да ефикасност ребра опада са повећањем коефицијента преноса топлоте струјањем тј. са преласком са природног на принудно струјање.



Слика 1.1

## 2. Задатак

Задатак се може решити применом радијационе шеме. С обзиром да се радијациона шема може формирати искључиво за затворен систем површи, он ће се формирати додавањем фиктивне површи која одговара амбијенту ( $\varepsilon_a = 1$ ). На тај начин се добија радијациона шема са три чвора (грејач, екран, амбијент) приказана на слици 2.1.



Слика 2.1

Вредности фактора виђења између појединих површи одређују се под претпоставком да су и екран и грејач довољно дугачки и да се ефекти крајева могу занемарити. Уколико је претходни услов испуњен, у радијационој шеми фигуришу само подужне вредности.

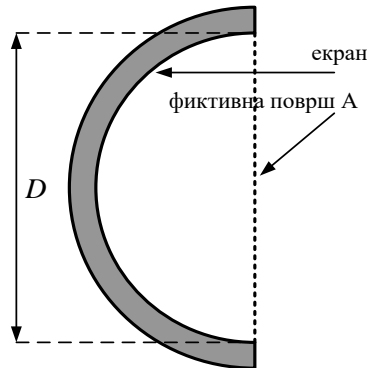
Због конвексности површи грејача, његов сопствени фактор виђења је једнак нули. Фактори виђења екрана и амбијента од стране грејача ( $F_{ge}$  и  $F_{ga}$ ) су једнаки (пошто се и екран и амбијент из центра грејача виде под углом од 180 степени) и износе:

$$F_{ga} = F_{ge} = \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

Фактор виђења грејача од стране екрана (иста вредност је за фактор виђења грејача од стране амбијента) износи:

$$F_{eg} = F_{ge} \cdot \frac{S_g}{S_e} = F_{ge} \cdot \frac{d \cdot \pi \cdot L}{\frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi \cdot L} = F_{ge} \cdot \frac{2 \cdot d}{D} = \frac{d}{D} = 0,1 \quad (2.2)$$

Сопствени фактор виђења екрана  $F_{ee}$  се може израчунати полазећи од  $F_{ee} + F_{ea} + F_{eg} = 1$ . Збир  $F_{ea} + F_{eg}$  представља фактор виђења фиктивне површи А (за њега ће се у даљем тексту користити ознака  $F_{eA}$ ), приказане на слици 2.2. Површ А је конвексна, из чега се закључује да је њен сопствени фактор виђења једнак нули и да сва снага емитована са А доспева на екран. На основу тога се закључује да је фактор виђења екрана од стране површи А једнак 1, из чега се одређују фактор виђења површи А од стране екрана и тражени сопствени фактор виђења екрана.



Слика 2.2

$$F_{eA} = F_{Ae} \cdot \frac{S_A}{S_e} = F_{Ae} \cdot \frac{D \cdot L}{\frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi \cdot L} = \frac{2}{\pi} \cdot F_{Ae} = \frac{2}{\pi} \quad (2.3)$$

$$F_{ee} = 1 - F_{eA} = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi} \approx 0,3634 \quad (2.4)$$

Фактор виђења амбијента од стране екрана добија се на следећи начин:

$$F_{ea} = 1 - F_{eg} - F_{ee} \approx 0,5366 \quad (2.5)$$

Пошто је температура екрана константа, сва топлота која се апсорбује на унутрашњој површи екрана, одводи се зрачењем са спољашње површи екрана ка амбијенту (на радијационој шеми ово је описано граном која из чвора  $T_e$  иде вертикално на горе). Фактор виђења између спољашње површи екрана и амбијента једнак је  $F_{ea,2} = 1$ .

### 3. Задатак

Casovi\_10\_do\_12.docx, стране 13 и 14.

### 4. Задатак

1. Смањење контактнoг топлотног отпора на спољашњој површи изолације кабла, због бољег налегања додатог слоја тла.
2. Смањење топлотног отпора преносу топлоте провођењем, због боље топлотне проводности додатог слоја тла.

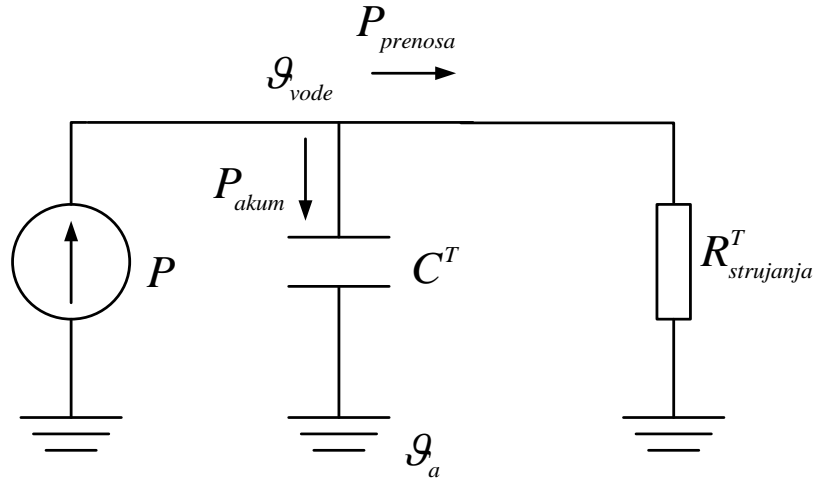
### 5. Задатак

Биланс снаге за посматрани систем (топлотна шема приказана на слици 5.1) је:

$$P = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (5.1)$$

где је

- $P$  - укупна снага којом се енергија генерише у грејачу,
- $P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у плочи, шерпи и води, и
- $P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује струјањем са околином.



Слика 5.1

Укупна снага којом се енергија акумулише у плочи, шерпи и води израчунава се као

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (5.2)$$

док се снага којом се енергија размењује са околином прорачунава коришћењем следећег израза:

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R_{str}^T} \quad (5.3)$$

Са  $\theta$  је означен пораст температуре воде, шерпе и плоче у односу на амбијент. Коначно, заменом израза (5.2) и (5.3) у (5.1), добијамо диференцијалну једначину:

$$C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R_{str}^T} = P \quad (5.4)$$

$$R_{str}^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R_{str}^T \cdot P \quad (5.5)$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R_{str}^T \cdot P \quad (5.6)$$

где је са  $\tau$  означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R_{str}^T \cdot C^T \quad (5.7)$$

Решење диференцијалне једначине (5.6) гласи:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (5.8)$$

где је са  $\theta_0$  означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са  $\theta_\infty = P \cdot R_{str}^T$  пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго и када не би не би долазило до кључања воде на 100°C, што у стварности није случај).

Топлотни капацитет воде, посуде и грејне плоче износи:

$$C^T = C_v^T + C_s^T + C_g^T = \rho_v \cdot V \cdot c_{pv} + \rho_s \cdot V_s \cdot c_{ps} + C_g \quad (5.9)$$

Висина посуде износи:

$$H = \frac{V}{S} = \frac{V}{\frac{\pi(D_{gp} - 2\delta)^2}{4}} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\frac{(0,14 - 2 \cdot 0,002)^2 \cdot \pi}{4}} = 0,1377 \text{ m} \quad (5.10)$$

где је  $S$  унутрашња површина посуде. Запремина материјала утрошеног при производњи посуде једнака је:

$$V_s = 2 \cdot V_{baze} + V_{omotača} = 2 \cdot \frac{0,14^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0,002 + \left( \frac{0,14^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(0,14 - 2 \cdot 0,002)^2 \cdot \pi}{4} \right) \cdot 0,1377 = 0,000180952 \text{ m}^3 \quad (5.11)$$

Топлотни капацитет воде, посуде и грејне плоче једнак је:

$$C^T = 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4200 + 8700 \cdot 0,000180952 \cdot 474 + 450 = 9596,21 \text{ J/K} \quad (5.12)$$

Отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R_{str}^T = \frac{1}{\alpha \cdot S_s} \quad (5.13)$$

где је  $\alpha$  коефицијент преласка топлоте струјањем који је потребно одредити, а  $S_s$  спољашња површина посуде (која је у додиру са ваздухом) тј. површина омотача посуде и поклопца:

$$S_s = \pi D_{gp}(H + 2\delta) + \frac{\pi D_{gp}^2}{4} = 0,077707 \text{ m}^2 \quad (5.14)$$

Заменом (5.14) у (5.13) добија се:

$$R_{str}^T = \frac{12,87}{\alpha} \quad (5.15)$$

По тексту задатка, време потребно да вода у шерпи запремине 2 l прокључа је 11 min, па на основу једначине (5.8) важи:

$$\theta(t = 11 \text{ min}) = 100^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = (20^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) \cdot e^{-\frac{12,87}{\alpha} \cdot \frac{11 \cdot 60}{9596,21}} + \frac{12,87}{\alpha} \cdot 1200 \cdot \left(1 - e^{-\frac{12,87}{\alpha} \cdot \frac{11 \cdot 60}{9596,21}}\right) \quad (5.16)$$

$$80^\circ\text{C} = \frac{15442,68}{\alpha} \cdot \left(1 - e^{-\frac{12,87}{\alpha} \cdot \frac{11 \cdot 60}{9596,21}}\right) \quad (5.17)$$

Решавањем једначине (5.17) добија се вредност коефицијента преласка топлоте струјањем  $\alpha = 11,69 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .

Висина посуде запремине 3 l износи:

$$H = \frac{V}{S} = \frac{V}{\frac{\pi(D_{gp} - 2\delta)^2}{4}} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{(0,14 - 2 \cdot 0,002)^2 \cdot \pi} = 0,2065 \text{ m} \quad (5.10)$$

где је  $S$  унутрашња површина посуде. Запремина материјала утрошеног при производњи посуде једнака је:

$$V_s = 2 \cdot V_{baze} + V_{omotača} = 2 \cdot \frac{0,14^2 \cdot \pi}{4} \cdot 0,002 + \left(\frac{0,14^2 \cdot \pi}{4} - \frac{(0,14 - 2 \cdot 0,002)^2 \cdot \pi}{4}\right) \cdot 0,2065 = 0,000240641 \text{ m}^3 \quad (5.11)$$

Топлотни капацитет воде, посуде и грејне плоче једнак је:

$$C^T = 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 4200 + 8700 \cdot 0,000240641 \cdot 474 + 450 = 14042,36 \text{ J/K} \quad (5.12)$$

Отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R_{str}^T = \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = \frac{1}{\alpha \cdot \pi D_{gp}(H + 2\delta) + \frac{\pi D_{gp}^2}{4}} = \frac{1}{11,69 \cdot 0,10798} = 0,79219 \text{ K/W} \quad (5.13)$$

Време за које ће вода у већој посуди прокључати израчунава се по формули (добијеној на основу једначине (5.8)):

$$t^* = -\tau \cdot \ln \frac{\theta_\infty - 80^\circ\text{C}}{\theta_\infty - 0} = R_{str}^T \cdot C^T \cdot \ln \frac{R_{str}^T \cdot P}{R_{str}^T \cdot P - 80^\circ\text{C}} = 16,3 \text{ min} \quad (5.14)$$