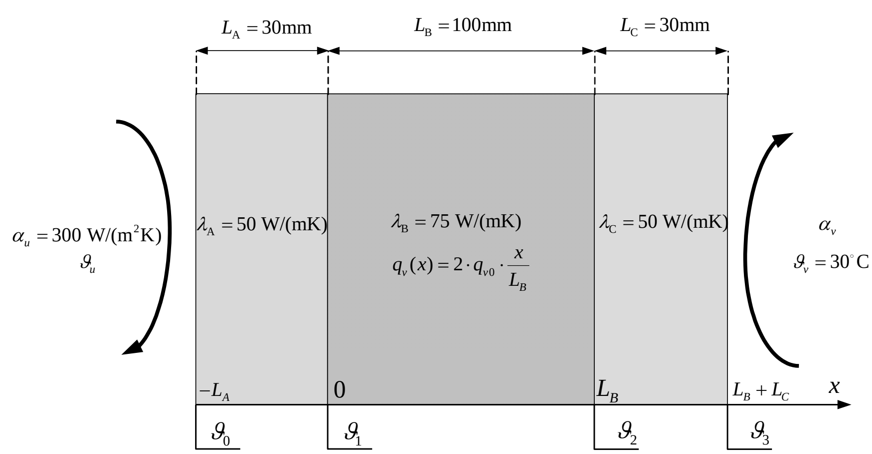
**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

## Први колоквијум (први термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

*Колоквијум траје максимално 150 минута* 16. 11. 2013.
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

1. Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала A, B и C. У слоју B се по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v(x) = 2 \cdot q_{v0} \cdot \dfrac{x}{L_B}$ ($q_{v0} = 250 \cdot 10^3$ W/m$^3$). Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици. Гранична површ слоја A се хлади уљем непознате температуре ($\vartheta_u$), уз коефицијент преноса топлоте струјањем $\alpha_u = 300$ W/(m$^2$K), а гранична површ слоја C се хлади водом температуре $\vartheta_v = 30^\circ$C, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ($\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta| / 20)^{0.25}$ ($\alpha_{v0} = 1000$ W/(m$^2$K) ).




Одредити непознату температуру уља тако да се тачно четвртина укупне снаге генерисане у слоју B преноси на уље. Колико износе температуре $\vartheta_0$, $\vartheta_1$, $\vartheta_2$ $\vartheta_3$? /2.5 поена/
Колико износи и максимална температура слоја B. /0.5 наградних поена/

2. Одредити укупни топлотни отпор између флуида који великом брзином протиче кроз металну цев кружног попречног пресека спољашњег пречника 40 mm и амбијенталног ваздуха. Може се сматрати да је отпор преласку топлоте струјањем са флуида на унутрашњи зид цеви занемарљиво мали, као и отпор провођењу топлоте кроз цев. Око цеви се поставља слој изолације топлотне проводности $\lambda = 0.2$ W / (m K) и дебљине 10 mm. Коефицијент преласка топлоте са спољне површи изолације на околни ваздух износи $\alpha = 8.5$ W / (m$^2$ K). Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\,\vartheta = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial z}\vec{i}_z$. /2.5 поена/

3. Ако је потребно време загревања воде у бојлеру (са 20 $^0$C на 75 $^0$C) запремине 80 литара грејачем снаге 2 kW 175 минута, после ког времена од искључења грејача ће температура воде у бојлеру да опадне са почетних 75 $^0$C на 45 $^0$C? Сматрати да је температура амбијента 20 $^0$C и да је снага преноса топлоте од воде ка амбијенту сразмерна разлици температуре воде и амбијента. Густина воде износи $\rho_v = 1000$ kg/m$^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200$ J/(kgK), специфични топлотни капацитет металног казана $c_{pk} = 474$ J/(kg K), а његова тежина $c_{pk} = 20$ kg. Топлотни капацитет изолације се може занемарити. /2.5поена/

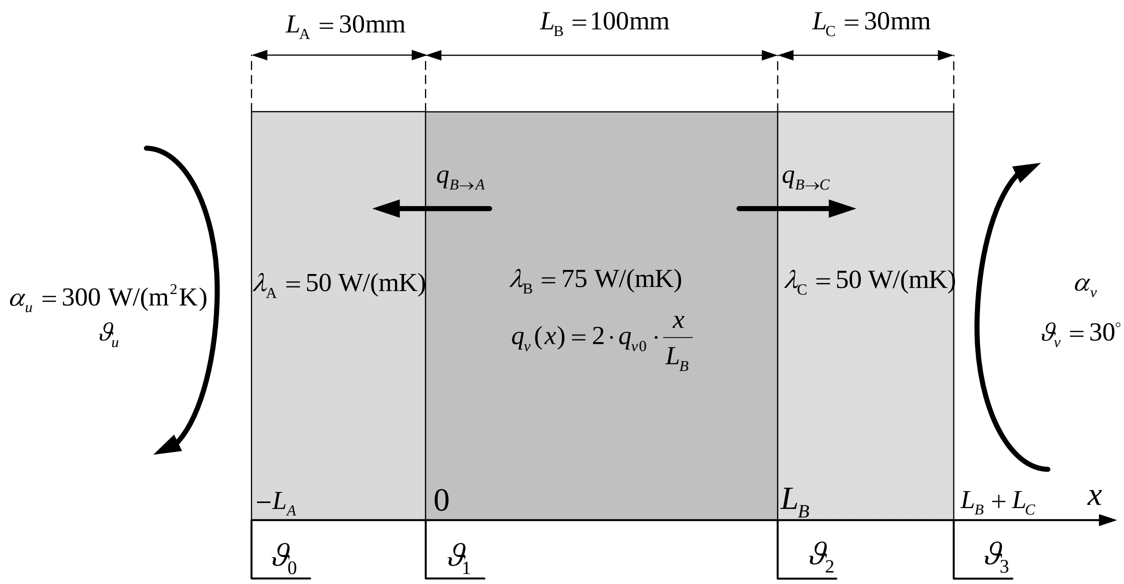
4. Написати дефинициони израз за фактор виђења између површи за коју се може сматрати да је "тачкаста" и површи коначне величине. Полазећи од опште дефиниције фактора виђења између две површи, објаснити који је критеријум да се нека површ може сматрати тачкастом. /2.5 поена/

*Решења задатака:*

**1. задатак**

Укупна снага којом се топлота генерише у области B добија се интеграцијом запреминске густине снаге по запремини области:

$$q_{genB} = \iiint_B q_v \cdot dV = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x) \cdot S \cdot dx = \frac{q_{v0} \cdot S}{L_B}(L_B^2 - 0) = q_{v0} \cdot S \cdot L_B \tag{1.1}$$




**Слика 1**

На основу услова задатка да се четвртина снаге генерисане у области B преноси на уље, снаге којима се енергија преноси из области B ка области A ($q_{B\to A}$) и из области B ка области C ($q_{B\to C}$) (слика 1) износе:

$$\begin{aligned} q_{B\to A} &= \frac{1}{4} \cdot q_{genB} = \frac{1}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B \\ q_{B\to C} &= q_{genB} - q_{B\to A} = \frac{3}{4} \cdot q_{genB} = \frac{3}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B \end{aligned} \tag{1.2}$$

С обзиром да се посматра устаљено стање, без генерисања топлоте у области C, целокупна снага која се из области B пренесе ка области C се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура $\vartheta_3$ $\left(\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v\right)$:

$$q_{strujanja\_v} = q_{B\to C} = \alpha_v(\theta) \cdot S \cdot \theta = \frac{\alpha_{v0} \cdot S}{20^{0.25}} \cdot \theta^{1.25} \tag{1.3}$$

$$\theta = \left(\frac{q_{B\to C} \cdot 20^{0.25}}{\alpha_{v0} \cdot S}\right)^{0.8} = \left(\frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot 20^{0.25}}{4 \cdot \alpha_{v0}}\right)^{0.8} = 19\text{K} \tag{1.4}$$

$$\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v \Rightarrow \vartheta_3 = \theta + \vartheta_v = 49^\circ\text{C} \tag{1.5}$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = q_{B\to C} \cdot R_C^T = q_{B\to C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} \tag{1.6}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + q_{B\to C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} = \vartheta_3 + \frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot L_C}{4 \cdot \lambda_C} = 60.25^\circ\text{C} \tag{1.7}$$

Расподела температуре у области B добија се решавањем опште температурне једначине која за поменуту област има следећи облик:

$$\lambda_B \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\frac{q_v(x)}{\lambda_B} = -\frac{2 \cdot q_{v0} \cdot x}{\lambda_B \cdot L_B} \tag{1.9}$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_{v0} \cdot x^3}{3 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot x + C_2 \tag{1.10}$$

Интеграционе константе које фигуришу у (1.10) могу се одредити из граничних услова за десну граничну површ слоја B (на тој граничној површи познајемо и вредност температуре и њен градијент – у овом случају извод по x координати).

$$\begin{aligned} &\vartheta(L_B\_) = \vartheta_2 \\ &-\lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(L_B\_) \cdot S = q_{B \to C} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Након одређивања интеграционих константи, и уврштавањем њихових вредности ($C_1$=***, $C_2$=***) у једначину (1.10) може се добити температура $\vartheta_1$.

$$\vartheta_1 = \vartheta(0) = C_2 = 63.027^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.12}$$

Остале непознате температуре се добијају на следећи начин:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = R_A^T \cdot q_{B \to A} \Rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_1 - R_A^T \cdot q_{B \to A} = 59.277^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.13}$$

$$q_{B \to A} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_u) \Rightarrow \vartheta_u = \vartheta_0 - \frac{q_{B \to A}}{\alpha_u \cdot S} = 38.44^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.14}$$

Вредност x координате на којој се постиже максимална температура у области B ($x^*$) може се добити диференцирањем расподеле температуре која је дата изразом (1.10) и изједначавањем добијеног израза са нулом. Потом се заменом из (1.10) за тако добијену вредност $x^*$ добија максимална температура у области B.

$$x^* = \frac{L_B}{2} = 50\mathrm{mm} \tag{1.15}$$

$$\vartheta_{\max B} = \vartheta(x^*) = 65.806^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.16}$$

## <u>2. задатак</u>

Укупан топлотни отпор је збир топлотних отпора провођењу кроз изолацију и струјању на спољашњој површи изолације.

Топлотни отпор изолације по јединици дужине износи:

$$R_{izol}^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) = 0.3227 \text{ Km/W} \tag{1.17}$$

Топлотни отпор услед струјања на спољашњој површи изолације износи:

$$R_{strujanja}^T = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} = 0.6241 \text{ Km/W} \tag{1.18}$$

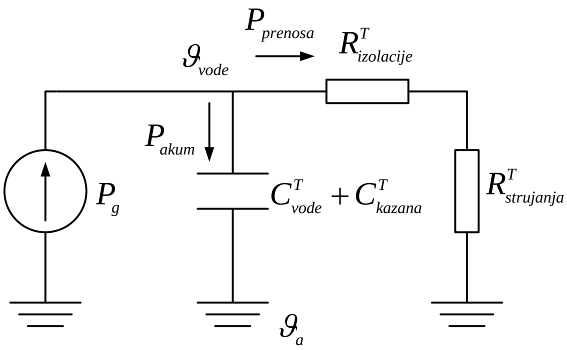
Укупан топлотни отпор износи:

$$R^T = R_{strujanja}^T + R_{izol}^T = 0.9468 \text{ Km/W} \tag{1.19}$$

За извођење израза (1.17) видети задатак 3 са рачунских вежби.

**3. задатак**

Топлотна шема која описује наведени проблем је приказана на слици 2.




**Слика 2**

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C^T_{kazana} + C^T_{vode} = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 345.48 \text{ kJ/K} \tag{1.20}$$

Промена пораста температуре воде у бојлеру у односу на амбијент описана је следећом диференцијалном једначином:

$$C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} = P_g \tag{1.21}$$

Срећивање једначине (1.21) се добија:

$$R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R^T \cdot P_g \tag{1.22}$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \tag{1.23}$$

где је са τ означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T \cdot C^T \tag{1.24}$$

Решење диференцијалне једначине (1.23) гласи:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{1.25}$$

$\theta_0$ - пораст температуре воде у тренутку $t$=0

$\theta_{stac}$ - пораст температуре воде у устаљеном стању које би наступило када би загревање трајало неограничено дуго.

У посматраном случају загревања воде са 20°C на 75 °C, величине које фигуришу у изразу (1.25) износе:

$$\theta_0 = 0\text{K} \tag{1.26}$$

$$\theta_{stac} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \tag{1.27}$$

Заменом (1.26) и (1.27) у (1.25) и посматрањем тренутка у коме вода достиже температуру 75 °C (тренутак у коме се грејач искључује – 175 минута након почетка загревања), може се одредити временска константа загревања, а самим тим и топлотни отпор према амбијенту.

$$\theta(t^*) = \theta^* = 55\text{K} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) \tag{1.28}$$

Једначина (1.28) је трансцедентна по τ и може се решити итеративним поступком, датим једначином (1.29).

$$\tau_{k+1} = \frac{C^T \cdot \theta^*}{P_g \cdot (1 - \exp(-\frac{t^*}{\tau_k}))} \tag{1.29}$$

Узимањем почетног погађања τ=3h, након довољног броја итерација добија се приближна вредност временске константе:

$$\tau = 14.333\text{h} \tag{1.30}$$

Време хлађења воде са 75°C на 45 °C одређује се помоћу следећег израза (изведен у задатку 6 са рач. вежби):

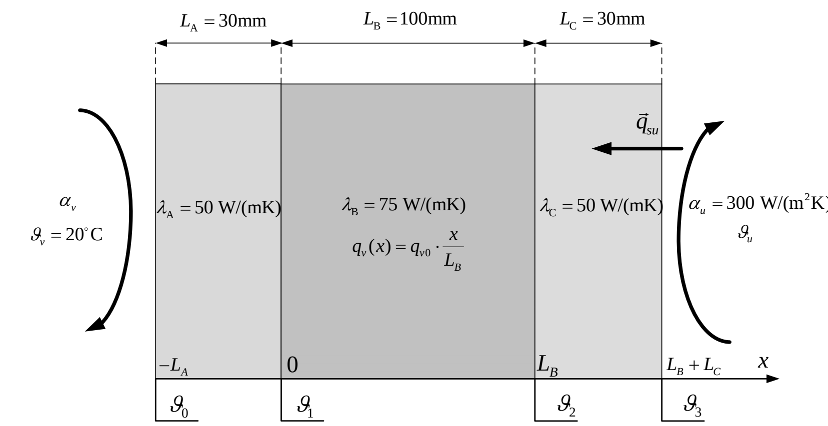
$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_{stac}}{\theta^* - \theta_{stac}} = 14.333\text{h} \cdot \ln \frac{55 - 0}{25 - 0} = 11.3\text{h} \tag{1.31}$$

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

## Први колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

*Колоквијум траје максимално 150 минута* 2. 12. 2013.
*За сваки задатак се добија 2.5 поена*
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*



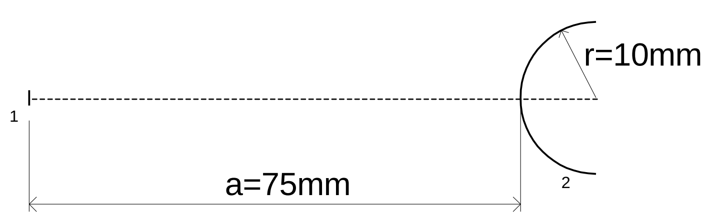

1. Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала A, B и C. У слоју B се по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v(x) = q_{v0} \cdot \frac{x}{L_B}$ ($q_{v0} = 200 \cdot 10^3\ \text{W/m}^3$). Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици 1. Гранична површ слоја A се хлади водом температуре $\vartheta_v = 20^\circ\text{C}$, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ($\theta = \vartheta_0 - \vartheta_v$) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta| / 20)^{0.25}$ $\left(\alpha_{v0} = 1000\ \text{W/(m}^2\text{K)}\right)$. Гранична површ слоја C се загрева уљем непознате температуре ($\vartheta_u$), уз коефицијент преноса топлоте струјањем $\alpha_u = 300\ \text{W/(m}^2\text{K)}$. Познато је да се топлотна енергија преноси са уља на зид површинском густином снаге $q_{su} = 10\ \text{kW/m}^2$.

Одредити температуру уља ($\vartheta_u$), температуру граничне површи слоја C која се загрева уљем ($\vartheta_3$), температуре леве и десне граничне површи слоја B ($\vartheta_1$ и $\vartheta_2$), температуру граничне хлађене површи слоја A ($\vartheta_0$) и максималну температуру слоја B.

2. Извести израз за топлотни отпор између унутрашње површи двослојног сферног зида (полупречник унутрашње лопте $r_u$) и флуида који струја са спољашње површи сферичног зида (полупречник спољашње лопте $r_s$). Топлотна проводност материјала од кога је сачињен зид у зони између $r_u$ и $r_z$ износи $\lambda_1$, а у зони између $r_z$ и $r_s$ износи $\lambda_2$. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње стране сфере на флуид износи $\alpha$. Израз за градијент у сферном координатном систему: $grad\,\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin\theta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi$

3. Навести карактеристике идеалног сивог тела.

4. Одредити фактор виђења дела лопте (површ 2) са површи 1. Површ 1 се може сматрати бесконачно малом. Задатак решити посматрањем равне површи диска добијене еквивалентирањем задатог дела површи лопте диском за који би се имао исти фактор виђења.



*Решења задатака:*

**1. задатак**

Укупна снага којом се топлота генерише у области B добија се интеграцијом запреминске густине снаге по запремини области:

$$q_{genB} = \iiint_B q_v \cdot dV = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x) \cdot S \cdot dx = \frac{q_{v0} \cdot S}{2L_B}(L_B^2 - 0) = \frac{q_{v0} \cdot S \cdot L_B}{2} \qquad (1.32)$$

Снага којом се топлота преноси са уља на зид износи:

$$q_{ulja} = q_{su} \cdot S \qquad (1.33)$$

Снага којом се топлота преноси од области B ка области A, и даље ка води, једнака је збиру снаге којом се топлота генерише у области B и снаге којом се топлота преноси са уља на зид.

$$q_{B\to A} = q_{genB} + q_{ulja} = \frac{q_{v0} \cdot S \cdot L_B}{2} + q_{su} \cdot S \qquad (1.34)$$

С обзиром да се посматра се устаљено стање, без генерисања топлоте у области A, целокупна снага која се из области B пренесе ка области A се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура $\vartheta_0$ $\left(\theta = \vartheta_0 - \vartheta_v\right)$:

$$q_{strujanja\_v} = q_{B\to A} = \alpha_v(\theta) \cdot S \cdot \theta = \frac{\alpha_{v0} \cdot S}{20^{0.25}} \cdot \theta^{1.25} \qquad (1.35)$$

$$\theta = \left(\frac{q_{B\to A} \cdot 20^{0.25}}{\alpha_{v0} \cdot S}\right)^{0.8} = \left(\frac{(\frac{q_{v0} \cdot L_B}{2} + q_{su}) \cdot 20^{0.25}}{\alpha_{v0}}\right)^{0.8} = 20\mathrm{K} \qquad (1.36)$$

$$\theta = \vartheta_0 - \vartheta_v \Rightarrow \vartheta_0 = \theta + \vartheta_v = 40^{\circ}\mathrm{C} \qquad (1.37)$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = q_{B\to A} \cdot R_A^T = q_{B\to A} \cdot \frac{L_A}{\lambda_A \cdot S} \qquad (1.38)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + q_{B\to A} \cdot \frac{L_A}{\lambda_A \cdot S} = \vartheta_0 + (\frac{q_{v0} \cdot L_B}{2} + q_{su}) \cdot \frac{L_A}{\lambda_A} = 52^{\circ}\mathrm{C} \qquad (1.39)$$

Расподела температуре у области B добија се решавањем опште температурне једначине која за поменуту област има следећи облик:

$$\lambda_B \cdot \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \qquad (1.40)$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\frac{q_v(x)}{\lambda_B} = -\frac{q_{v0} \cdot x}{\lambda_B \cdot L_B} \qquad (1.41)$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_{v0} \cdot x^3}{6 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot x + C_2 \qquad (1.42)$$

Интеграционе константе које фигуришу у (1.42) могу се одредити из граничних услова за леву граничну површ слоја B (на тој граничној површи познајемо и вредност температуре и њен градијент – у овом случају извод по x координати).

$$\begin{aligned} &\vartheta(0) = \vartheta_1 \\ &\lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(0) \cdot S = q_{B\to A} \end{aligned} \qquad (1.43)$$

$$\vartheta(0) = -\frac{q_{v0} \cdot 0^3}{6 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \vartheta_1 = 52^{\circ}\mathrm{C} \qquad (1.44)$$

$$\lambda_B \cdot S \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(0) = \lambda_B \cdot S \cdot (-\frac{q_{v0} \cdot 0^2}{2 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1) = \frac{q_{v0} \cdot S \cdot L_B}{2} + q_{su} \cdot S \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{q_{v0} \cdot L_B}{2 \cdot \lambda_B} + \frac{q_{su}}{\lambda_B} = 266.67\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \quad (1.45)$$

Уврштавањем вредности интеграционих константи у једначину (1.42) може се добити температура $\vartheta_2$.

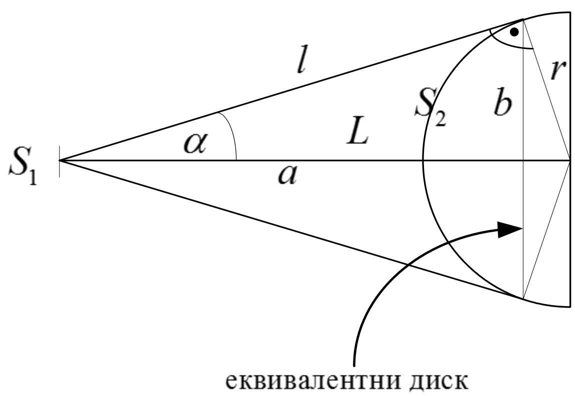
$$\vartheta_2 = \vartheta(L_B) = -\frac{q_{v0} \cdot L_B^2}{6 \cdot \lambda_B} + C_1 \cdot L_B + C_2 = 74.22^{\circ}\mathrm{C} \qquad (1.46)$$

Остале непознате температуре се добијају на следећи начин:

$$\vartheta_3 - \vartheta_2 = R_C^T \cdot q_{ulja} \Rightarrow \vartheta_3 = \vartheta_2 + R_C^T \cdot q_{ulja} = 80.22^{\circ}\mathrm{C} \qquad (1.47)$$

$$q_{ulja} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_u - \vartheta_3) \Rightarrow \vartheta_u = \vartheta_3 + \frac{q_{ulja}}{\alpha_u \cdot S} = 113.55^{\circ}\mathrm{C} \qquad (1.48)$$

**4. задатак**




Еквивалентни диск за који се од стране мале површи има исти фактор виђења као за полусферу, приказан је на слици; овај диск се са мале површи види под истим просторним углом као површ полусфере. Полупречник еквивалентног диска ($b$) и његово растојање од мале површи ($L$) рачунају се на следећи начин:

$$l = \sqrt{(a+r)^2 - r^2} = \sqrt{a^2 + 2ar} \qquad (1.49)$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{a+r} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2+2ar}}{a+r} \qquad (1.50)$$

$$b = l \cdot \sin\alpha = \sqrt{a^2+2ar} \cdot \frac{r}{a+r} \qquad (1.51)$$

$$L = l \cdot \cos\alpha = \sqrt{a^2+2ar} \cdot \frac{\sqrt{a^2+2ar}}{a+r} = \frac{a^2+2ar}{a+r} \qquad (1.52)$$

Израз за фактор виђења диска пречника $b$ са мале површи лоциране на оси диска на растојању $L$ гласи (видети задатак 24 из збирке):

$$F_{1\to 2} = \frac{4b^2}{4L^2 + 4b^2} = \frac{\frac{(a^2+2ar)\cdot r^2}{(a+r)^2}}{\frac{(a^2+2ar)^2}{(a+r)^2} + \frac{(a^2+2ar)\cdot r^2}{(a+r)^2}} = \frac{r^2}{a^2+2ar+r^2} = \frac{r^2}{(a+r)^2} = 0.01384 \qquad (1.53)$$

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Други колоквијум (први термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Колоквијум траје максимално 150 минута* 30. 12. 2013.
*За сваки задатак се добија 2.5 поена*
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

1. Поставити диференцијалну једначину и граничне услова за ребро за хлађење квадратног попречног пресека странице $a = 3$ cm, дужине $L = 10$ cm, направљено од материјала специфичне топлотне проводности $\lambda$ = 177 W / (m K). Температура површи тела које се хлади ребром износи $\vartheta_b$ = 150 $^0$C. Ребро се хлади природним струјањем ваздуха температуре $\vartheta_a$ = 20 $^0$C, при чему је коефицијент преласка топлоте са површи омотача ребра, температуре $\vartheta$, $\alpha_o = C_1\,(\vartheta - \vartheta_a)^{n1}$. Коефицијент преласка топлоте са вертикалне површи квадрата странице $a$ температуре $\vartheta$ износи $\alpha_k = C_2\,(\vartheta - \vartheta_a)^{n2}$.

2. Одредити дозвољену једносекундну струју кратког споја за проводник од бакра површине попречног пресека 95 mm$^2$ ако је максимална температура изолације 180 °C, а кратак спој настаје у хладном стању (температура 20°C). Познате су карактеристике бакра: $c_{Cu}$ = 390 J/(kg $^0$C), $\rho_{Cu}$ = 8900 kg/m$^3$, специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\,Cu}$=56×10$^6$ S / m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{Cu20}$=3.9×10$^{-3}$°C$^{-1}$. При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски.

3. Полазећи од познатог дијаграма расподеле температуре уља и намотаја по висини трансформатора са ODAF хлађењем када се он хлади помоћу 5 хладњака (укључене пумпе и вентилатори на 5 хладњака), нацртати дијаграм расподеле температура када се укључи још један (шести) хладњак (са својим пумпама и вентилаторима). Сматрати да су губици при радном режиму са 5 и са 6 хладњака исти. Усвојити следеће апроксимације и претпоставке: а) да се проток уља кроз сваки од хладњака не мења после укључења шестог хладњака, б) да се однос протока уља кроз намотаје не мења са променом укупног протока уља, в) да је снага преноса топлоте преко хладњака при константном протоку сразмерна порасту температуре горњег уља у односу на амбијент, г) да је количник (разлика средње температуре намотаја и средње температуре уља у намотају) / (снага губитака у намотају) приближно обрнуто сразмеран брзини струјања уља на степен 0.7, д) да се фактор најтоплије тачке намотаја не мења са укључењем шестог хладњака, ђ) да се физичке карактеристике уља не мењају у радном режиму хлађења са 5 и са 6 хладњака. Препорука: као прву тачку дијаграма за случај 6 хладњака формирати температуру уља на уласку у радијатор – при томе користити став в). Неопходно је навести вредност сваке компоненте (разлике температура) на дијаграму, при чему их треба исказати преко познатих вредности разлика температура за случај да се трансформатор хлади помоћу пет хладњака.

4. Објаснити како се отпорност намотаја практично користи за мерење средње температуре намотаја. Нацртати начин везивања и написати преносну функцију аналогног RC филтра за елиминисање шума при мерењу једносмерне струје код UI методе континуираног праћења отпора краткоспојеног намотаја трансформатора током огледа загревања.

*Решења задатака:*

**1. задатак**

Биланс снага за елементарни део ребра дужине $dx$ гласи:

$$q(x+dx)+dq_{strujanja}=q(x) \tag{1.54}$$

$q(x)$ – снага која се преноси провођењем кроз попречни пресек ребра на позицији $x$
$dq_{strujanja}$ – елементарна снага која се струјањем одводи са омотача ребра дужине $dx$
Снага која се одводи струјањем са елементарног дела ребра дужине $dx$ описана је следећим изразом:

$$dq_{strujanja}=\alpha_0\cdot(\vartheta(x)-\vartheta_a)\cdot dS=C_1\cdot(\vartheta(x)-\vartheta_a)^{n1+1}\cdot 4a\cdot dx \tag{1.55}$$

Заменом (1.55) у (1.54) добија се следећа једначина:

$$\frac{q(x+dx)-q(x)}{dx}=-4a\cdot C_1\cdot(\vartheta(x)-\vartheta_a)^{n1+1} \tag{1.56}$$

$$\frac{dq}{dx}=-4a\cdot C_1\cdot(\vartheta(x)-\vartheta_a)^{n1+1} \tag{1.57}$$

Снага која се преноси провођењем кроз попречни пресек ребра дата је следећим изразом:

$$q=-\lambda\cdot\frac{d\vartheta}{dx}\cdot S=-\lambda\cdot a^2\cdot\frac{d\vartheta}{dx} \tag{1.58}$$

Заменом (1.58) у једначину (1.57) добија се диференцијална једначина која описује промену температуре дуж ребра:

$$\begin{aligned}&\frac{dq}{dx}=\frac{d}{dx}(-\lambda\cdot a^2\cdot\frac{d\vartheta}{dx})=-\lambda\cdot a^2\cdot\frac{d^2\vartheta}{dx^2}=-4a\cdot C_1\cdot(\vartheta(x)-\vartheta_a)^{n1+1}\\&\frac{d^2\vartheta}{dx^2}=\frac{4C_1}{\lambda\cdot a}\cdot(\vartheta(x)-\vartheta_a)^{n1+1}\end{aligned} \tag{1.59}$$

Гранични услови се за крајеве ребра и гласе:

$$\begin{aligned}&\vartheta(x=0)=\vartheta_b\\&\alpha_k\cdot(\vartheta(x=L)-\vartheta_a)=C_2\cdot(\vartheta(x=L)-\vartheta_a)^{n2+1}=-\lambda\frac{d\vartheta}{dx}(x=L)\end{aligned} \tag{1.60}$$

**2. задатак**

Пошто се термички процес по настанку кратког споја сматра адијабатским, занемарује се снага којом се топлота размењује са околином у току кратког споја и сматра да се целокупна топлотна енергија генерисана у том периоду акумулира у проводнику. Оваква претпоставка је при проверама загревања у току кратког споја на страни сигурности, тј. стварно загревање проводника у току кратког споја је мало мање од тако израчунатог.
Снага којом се топлотна енергија акумулира у бакру једнака је снази којом се топлота генерише услед Џулових губитака.

$$P_{akum}=P_{gen} \tag{1.61}$$

Подужна снага којом се топлотна енергија генерише у проводнику дата је изразом

$$P_{gen}=\frac{1}{\sigma_{Cu20}}\cdot(1+\alpha_{Cu20}\cdot(\vartheta_{Cu}-20))\cdot\frac{I_{1s\max}^2}{S_{Cu}} \tag{1.62}$$

Подужна снага којом се енергија акумулише у проводнику дата је изразом

$$P_{akum}=C_{Cu}^T\cdot\frac{d\vartheta_{Cu}}{dt} \tag{1.63}$$

Подужни топлотни капацитет проводника је једнак

$$C_{Cu}^T=\rho_{Cu}\cdot S_{Cu}\cdot c_{pCu}=329.745\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mK}} \tag{1.64}$$

Из претходник израза се добија диференцијална једначина која описује промену температуре бакарног проводника. То је уједно и температура најтоплијих тачака изолације (тачке на унутрашњој површи изолације уз сам проводник).

$$C_{Cu}^{T}\cdot\frac{d\vartheta_{Cu}}{dt}=\frac{1}{\sigma_{Cu20}}\cdot(1+\alpha_{Cu20}\cdot(\vartheta_{Cu}-20))\cdot\frac{I_{1s\max}^{2}}{S_{Cu}} \tag{1.65}$$

$$\frac{d\vartheta_{Cu}}{(1+\alpha_{Cu20}\cdot(\vartheta_{Cu}-20))}=\frac{1}{C_{Cu}^{T}\cdot\sigma_{Cu20}\cdot S_{Cu}}\cdot I_{1s\max}^{2}\cdot dt \tag{1.66}$$

$$\int_{\vartheta_{Cu}=20}^{\vartheta_{\max}}\frac{d\vartheta_{Cu}}{(1+\alpha_{Cu20}\cdot(\vartheta_{Cu}-20))}=\int_{t=0}^{t_{ks}}\frac{1}{C_{Cu}^{T}\cdot\sigma_{Cu20}\cdot S_{Cu}}\cdot I_{1s\max}^{2}\cdot dt=\frac{1}{C_{Cu}^{T}\cdot\sigma_{Cu20}\cdot S_{Cu}}\cdot I_{1s\max}^{2}\cdot t_{ks} \tag{1.67}$$

$$\frac{1}{\alpha_{Cu20}}\cdot\ln\frac{1+\alpha_{Cu20}\cdot(\vartheta_{\max}-20)}{1+\alpha_{Cu20}\cdot(20-20)}=\frac{1}{\alpha_{Cu20}}\cdot\ln(1+\alpha_{Cu20}\cdot(\vartheta_{\max}-20))=\frac{1}{C_{Cu}^{T}\cdot\sigma_{Cu20}\cdot S_{Cu}}\cdot I_{1s\max}^{2}\cdot t_{ks} \tag{1.68}$$

$$I_{1s\max}=\sqrt{\frac{C_{Cu}^{T}\cdot\sigma_{Cu20}\cdot S_{Cu}}{\alpha_{Cu20}\cdot t_{ks}}\cdot\ln(1+\alpha_{Cu20}\cdot(\vartheta_{\max}-20))}=14768\text{ A} \tag{1.69}$$

**3. задатак**

По укључењу шестог хладњака, повећава се укупан проток уља кроз хладњаке, а самим тим и кроз намотаје. Укупна снага којом се топлотна енергија преноси ка амбијенту одређена је укупном снагом губитака у трансформатору и остаје иста без обзира на број хладњака који су активни. Под претпоставком да хладњаци равномерно деле укупну снагу, снага која се преноси кроз сваки од хладњака у наведеним случајевима износи:

$$P_{hl5}=\frac{P_{gub}}{5}$$
$$P_{hl6}=\frac{P_{gub}}{6} \tag{1.70}$$

Користећи претпоставку в) да је снага преноса топлоте преко једног хладњака при константном протоку сразмерна порасту температуре горњег уља у односу на амбијент, може се израчунати однос пораста температуре горњег уља у наведена два случаја.

$$\frac{\theta_{gu6}}{\theta_{gu5}}=\frac{P_{hl6}}{P_{hl5}}=\frac{\frac{P_{gub}}{6}}{\frac{P_{gub}}{5}}=\frac{5}{6}\quad\Rightarrow\quad\theta_{gu6}=\frac{5}{6}\cdot\theta_{gu5} \tag{1.71}$$

Снага која се преноси кроз сваки хладњак може се за сваки од наведених случајева израчунати користећи једначину која важи за отворен систем са константним протоком:

$$P_{hl5}=m_{thl5}\cdot c_{p}\cdot(\vartheta_{gu5}-\vartheta_{du5})=m_{thl5}\cdot c_{p}\cdot(\theta_{gu5}-\theta_{du5}) \tag{1.72}$$

$$P_{hl6}=m_{thl6}\cdot c_{p}\cdot(\theta_{gu6}-\theta_{du6}) \tag{1.73}$$

Проток уља кроз сваки хладњак појединачно није промењен укључењем шестог хладњака (претпоставка а)).

$$m_{thl5}=m_{thl6} \tag{1.74}$$

Дељењем једначине (1.72) једначином (1.73), добија се релативна промена вертикалног градијента температуре уља за два наведена случаја:

$$\frac{P_{hl6}}{P_{hl5}}=\frac{m_{thl6}\cdot c_{p}\cdot(\theta_{gu6}-\theta_{du6})}{m_{thl5}\cdot c_{p}\cdot(\theta_{gu5}-\theta_{du5})}=\frac{\theta_{gu6}-\theta_{du6}}{\theta_{gu5}-\theta_{du5}}=\frac{5}{6} \tag{1.75}$$

Однос протока уља кроз намотаје у два посматрана случаја једнак је односу укупних протока уља кроз хладњаке у тим случајевима:

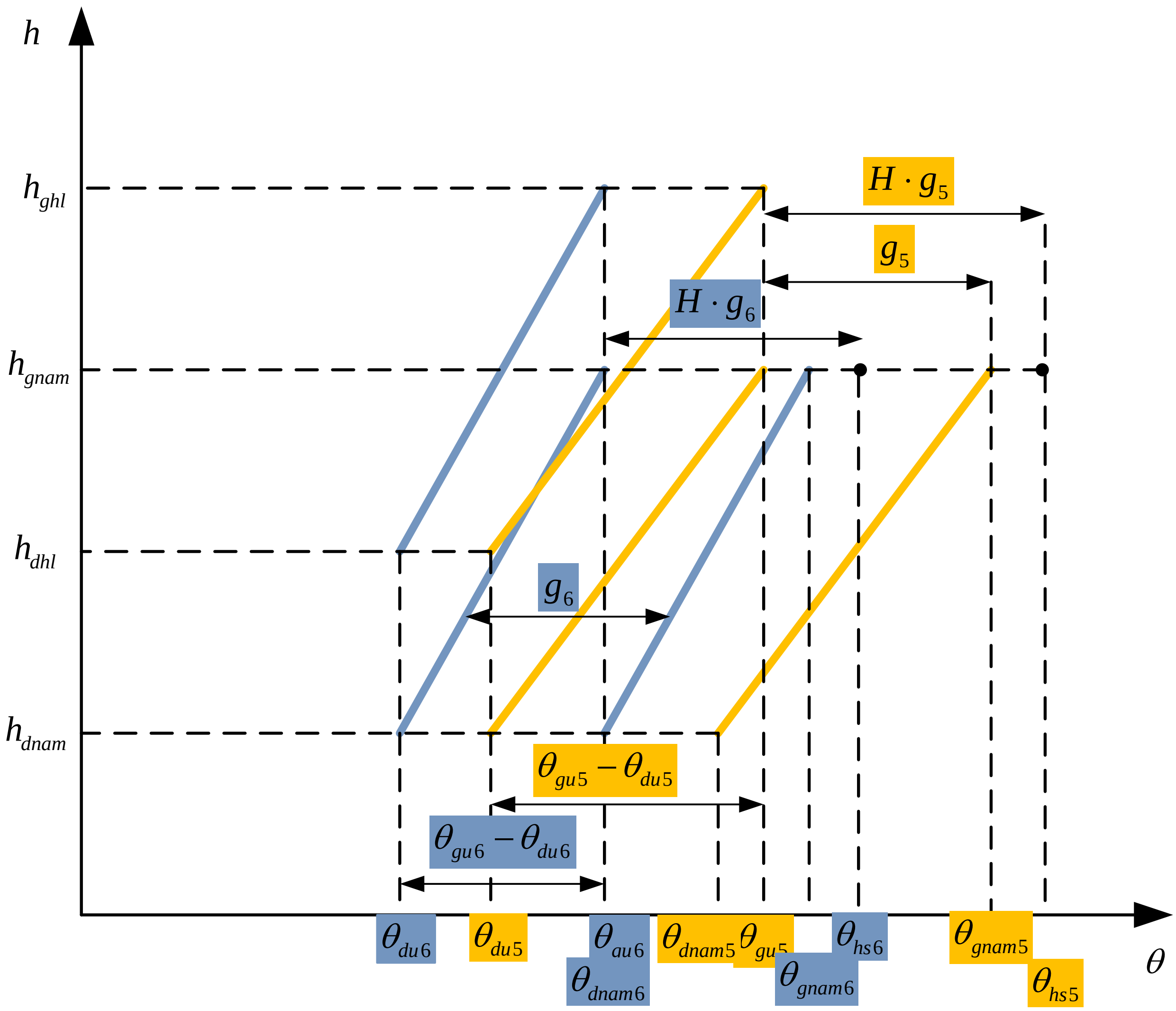
$$\frac{m_{tnam6}}{m_{tnam5}}=\frac{m_{thl6uk}}{m_{thl5uk}}=\frac{6\cdot m_{thl6}}{5\cdot m_{thl5}}=\frac{6}{5} \tag{1.76}$$

При константној густини уља (претпоставка ђ)), брзина струјања уља кроз намотаје сразмерна је одговарајућем протоку уља кроз намотаје:

$$\frac{v_{unam6}}{v_{unam5}}=\frac{m_{tnam6}}{m_{tnam5}}=\frac{6}{5} \tag{1.77}$$

Користећи претпоставку г) може се одредити релативна промена разлике средњих температуре намотаја и уља ($g$) након укључења шестог хладњака.

$$\frac{\dfrac{g_6}{P_{gubCu}}}{\dfrac{g_5}{P_{gubCu}}}=\frac{g_6}{g_5}=\left(\frac{v_{unam5}}{v_{unam6}}\right)^{0.7}=\left(\frac{5}{6}\right)^{0.7}=0.8802 \tag{1.78}$$



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Други колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Колоквијум траје максимално 150 минута* 17. 1. 2014.
*За сваки задатак се добија 2.5 поена*
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

1. Извести израз за снагу хлађења преко размењивача топлоте између два флуида. Преко ког параметра на снагу утиче врста флуида? Преко којих параметра на снагу утиче брзина флуида? При објашњењу поћи од претпоставке да су температуре оба флуида на уласку у размењивач фиксиране - хладног флуида $\vartheta_h$ и топлог флуида $\vartheta_t$.

2. Одредити дозвољену струју кратког споја коју проводнник од бакра површине попречног пресека 95 mm$^2$ може да поднесе у трајању од 500 ms ако је максимална температура изолације 180 °C, а кратак спој настаје: а) у хладном стању (температура 20°C) и б) при номиналном оптерећењу (температура 100°C). Познате су карактеристике бакра: $c_{Cu}$ = 390 J/(kg $^0$C), $\rho_{Cu}$ = 8900 kg/m$^3$, специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\,Cu}$=56×10$^6$ S / m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{Cu20}$=3.9×10$^{-3}$°C$^{-1}$. При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски.

3. Полазећи од познатог дијаграма расподеле температуре уља и намотаја по висини трансформатора са ODAF хлађењем када се он хлади помоћу 5 хладњака (укључене пумпе и вентилатори на 5 хладњака), нацртати дијаграм расподеле температура када се укључи још један (шести) хладњак (са својим пумпама и вентилаторима). Сматрати да су губици при радном режиму са 5 и са 6 хладњака исти. Усвојити следеће апроксимације и претпоставке: а) да се проток уља кроз сваки од хладњака не мења после укључења шестог хладњака, б) да се однос протока уља кроз намотаје не мења са променом укупног протока уља, в) да је снага преноса топлоте преко хладњака при константном протоку сразмерна разлици средње температуре уља у хладњаку и температуре амбијента, г) да је количник (разлика средње температуре намотаја и средње температуре уља у намотају) / (снага губитака у намотају) приближно обрнуто сразмеран брзини струјања уља на степен 0.7, д) да се фактор најтоплије тачке намотаја не мења са укључењем шестог хладњака, ђ) да се физичке карактеристике уља не мењају у радном режиму хлађења са 5 и са 6 хладњака. Препорука: као прву тачку дијаграма за случај 6 хладњака формирати средњу температуру уља у радијатору – при томе користити став в). Неопходно је навести вредност сваке компоненте (разлике температура) на дијаграму, при чему их треба исказати преко познатих вредности разлика температура за случај да се трансформатор хлади помоћу пет хладњака.

4. Нацртати топлотну шему енергетског уљног трансформатора са три чвора (сваком од два намотаја је придружен по један чвор у топлотној шеми - чвор 1 и чвор 2) и објаснити њене елементе. Да ли се и због чега мењају губици у намотајима током прелазног топлотног процеса при константном релативном струјном оптерећењу $K$? Полазећи од дефиниције топлотног отпора (топлотне проводности) објаснити због чега се мења топлотна проводност између чвора 3 и референтног чвора, који се налази на температури амбијента (она се може сматрати константном), када се искључи половина вентилатора који су били у раду.

*Решења задатака:*

**2. задатак**

Видети решење 2. задатка са колоквијума одржаног 30.12.2013.

**3. задатак**

Видети решење 3. задатка са колоквијума одржаног 30.12.2013.

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

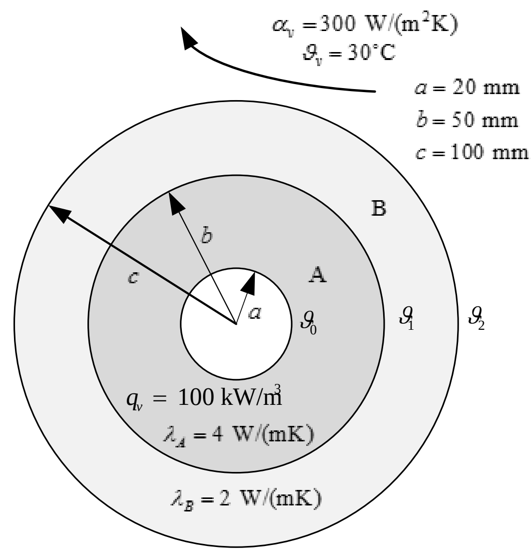
**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

---

**Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута* 27. 1. 2014.

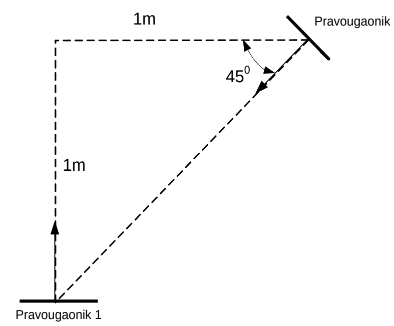
*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*




1. Цилиндрична структура приказана на слици се састоји из концентричних слојева A и B. У слоју A се генерише топлота равномерно по запремини запреминском густином снаге $q_v = 100 \cdot 10^3$ W/m$^3$. Гранична површ слоја B се хлади водом температуре $\vartheta_v = 30^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$, уз коефицијент преласка топлоте струјањем $\alpha_v = 300\ \mathrm{W/(m^2K)}$, док је гранична површ слоја A идеално топлотно изолована.
Одредити температуре $\vartheta_0$, $\vartheta_1$ $\vartheta_2$, као и средњу и максималну температуру слоја A. Општа температурне једначине у цилиндричном координатном систему гласи

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\cdot r\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)+q_V=\rho\cdot c_p\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\ .$$

2. Посматрајмо два мала правоугаоника (1 – површи 3 cm$^2$ и 2 – површи 1 cm$^2$) које се у почетном положају налазе у паралелним равнима на растојању 1 m. Означимо снагу преноса од површи 1 ка површи 2 у овом случају са $P_1$. Правоугаоник 2 се транслаторно помери за 1 m паралелно дужој страници, а затим ротира тако да нормале на површи, усмерене од стране површи која зрачи, заклапају угао од 135$^0$. На које растојање од правоугаоника 2 треба да се помери правоугаоник 1 да би снага која пада на површ 2 била једнака снази која је на њега падала у почетном положају?




3. Одредити дозвољену струју кратког споја коју проводнник од бакра површине попречног пресека 95 mm$^2$ може да поднесе у трајању од 500 ms ако је максимална температура изолације 180 °C, а кратак спој настаје: а) у хладном стању (температура 20°C) и б) при номиналном оптерећењу (температура 100°C). Познате су карактеристике бакра: $c_{Cu}$ = 390 J/(kg $^0$C), $\rho_{Cu}$ = 8900 kg/m$^3$, специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\ Cu}$=56×10$^6$ S / m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{Cu20}$=3.9×10$^{-3}$°C$^{-1}$. При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски.

4. Полазећи од познатог дијаграма расподеле температуре уља и намотаја по висини трансформатора са ODAF хлађењем када се он хлади помоћу 5 хладњака (укључене пумпе и вентилатори на 5 хладњака), нацртати дијаграм расподеле температура када се укључи још један (шести) хладњак (са својим пумпама и вентилаторима). Сматрати да су губици при радном режиму са 5 и са 6 хладњака исти. Усвојити следеће апроксимације и претпоставке: а) да се проток уља кроз сваки од хладњака не мења после укључења шестог хладњака, б) да се однос протока уља кроз намотаје не мења са променом укупног протока уља, в) да је снага преноса топлоте преко хладњака при константном протоку сразмерна разлици средње температуре уља у хладњаку и температуре амбијента, г) да је количник (разлика средње температуре намотаја и средње температуре уља у намотају) / (снага губитака у намотају) приближно обрнуто сразмеран брзини струјања уља на степен 0.7, д) да се фактор најтоплије тачке намотаја не мења са укључењем шестог хладњака, ђ) да се физичке карактеристике уља не мењају у радном режиму хлађења са 5 и са 6 хладњака. Препорука: као прву тачку дијаграма за случај 6 хладњака формирати средњу температуру уља у радијатору – при томе користити став в). Неопходно је навести вредност сваке компоненте (разлике температура) на дијаграму, при чему их треба исказати преко познатих вредности разлика температура за случај да се трансформатор хлади помоћу пет хладњака.

5. Нацртати топлотну шему енергетског уљног трансформатора са три чвора (сваком од два намотаја је придружен по један чвор у топлотној шеми - чвор 1 и чвор 2) и објаснити њене елементе. Да ли се и због чега мењају губици у намотајима током прелазног топлотног процеса при константном релативном струјном оптерећењу $K$? Полазећи од дефиниције топлотног отпора (топлотне проводности) објаснити због чега се мења топлотна проводност између чвора 3 и референтног чвора, који се налази на температури амбијента (она се може сматрати константном), када се искључи половина вентилатора који су били у раду.

*Решења задатака*

**1. задатак**

Због симетрије структуре и материјала, извора топлоте и граничних услова, температура зависи само од радијалне координате у цилиндричном координатном систему:

$$\vartheta = \vartheta(r) \tag{1.79}$$

Пренос топлоте провођењем описан је вектором површинске густине снаге који се може одредити применом *Fourier*-овог закона. Пошто се температура мења само по радијалној координати, пренос топлоте се обавља само у радијалном правцу, односно вектор површинске густине снаге има само радијалну компоненту:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot grad(\vartheta) = -\lambda \cdot \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\vec{i}_z \right) = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\vec{i}_r \tag{1.80}$$

Топлотна проводност која фигурише у изразу (1.80) мења се у зависности од слоја који се посматра.

Унутрашња površ слоја А је идеално топлотно изолована, те се у устаљеном стању целокупна енергија генерисана у слоју А преноси провођењем кроз слој В и струјањем са граничне површи слоја В на воду. Снага којом се топлотна енергија генерише у слоју А износи:

$$P_{genA} = \iiint_{V_A} q_V \cdot dV = \int_{r=a}^{b} q_V \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot dr = q_V \cdot 2\pi \cdot L \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_{a}^{b} = q_V \cdot 2\pi \cdot L \cdot \left( \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = q_V \cdot \pi \cdot L \cdot (b^2 - a^2) \tag{1.81}$$

Снага одвођења топлоте струјањем са граничне површи слоја В зависи од разлике температура граничне површи ($\vartheta_2$) и воде:

$$P_{strB} = \alpha_v \cdot S_{strB} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_v) = \alpha_v \cdot 2 \cdot \pi \cdot c \cdot L \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_v) \tag{1.82}$$

Пошто у слоју В нема извора топлоте, снага одвођења топлоте струјањем са граничне површи слоја В и воде у устаљеном стању је једнака снази топлотних извора у слоју А.

$$P_{strB} = P_{gen\,A} \tag{1.83}$$

Заменом израза за снагу топлотних извора у слоју А (1.81) и снагу одвођења топлоте струјањем са граничне површи слоја В (1.82) у једнакост (1.83), може се израчунати температура граничне површи:

$$\alpha_v \cdot 2 \cdot \pi \cdot c \cdot L \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_v) = q_V \cdot \pi \cdot L \cdot (b^2 - a^2) \;\Rightarrow\; \vartheta_2 = \frac{q_V \cdot (b^2 - a^2)}{2 \cdot \alpha_v \cdot c} + \vartheta_v = 33.5^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.84}$$

Да би се добила промена температуре у слоју В, посматра се цилиндрична површ полупречника $r$ која лежи у слоју В и концентрична је граничним површинама. Снага којом се топлота преноси кроз посматрану површ једнака је флуксу вектора површинске густине снаге кроз ту површ, и дата је изразом:

$$P_{prenosaB} = \iint_S \vec{q}_S \cdot d\vec{S} = \iint_S -\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \cdot \vec{i}_r \cdot \vec{i}_r \cdot dS = \iint_S -\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \cdot dS \tag{1.85}$$

Температура зависи само од радијалне координате, те и парцијални изводи температуре зависе само од радијалне координате. Последица тога је да парцијални извод температуре, који фигурише у (1.85), има константну вредност на цилиндричној површи по којој се врши интеграција, те може изаћи изван интеграла.

$$P_{prenosaB} = -\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \cdot \iint_S dS = -\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \cdot S = -2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \tag{1.86}$$

Снага којом се топлота преноси кроз посматрану површ независна је од њеног пречника (док год површ лежи у области В) и једнака је снази извора топлоте у области А.

$$P_{prenosaB} = P_{genA} \tag{1.87}$$

Заменом израза (1.81) и (1.86) у (1.87), добија се диференцијална једначина из које је могуће одредити расподелу температуре у слоју В:

$$P_{genA} \cdot dr = -2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot d\vartheta \;\Rightarrow\; d\vartheta = -\frac{P_{genA} \cdot dr}{2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot L \cdot r} \tag{1.88}$$

Интеграцијом десне стране једначине (1.88) по $r$ у границама од $b$ до $r$, а леве стране једначине по $\vartheta$ у границама од $\vartheta(b)$ до $\vartheta(r)$, добија се расподела температуре у слоју В:

$$\int_{\vartheta(r)}^{\vartheta(c)} d\vartheta = -\int_{r}^{c} \frac{P_{genA} \cdot dr}{2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot L \cdot r} \;\Rightarrow\; \vartheta(c) - \vartheta(r) = \vartheta_2 - \vartheta(r) = -\frac{P_{genA}}{2 \cdot \lambda_B \cdot \pi \cdot L} \ln\left(\frac{c}{r}\right) \tag{1.89}$$

$$\vartheta(r)=\vartheta_2+\frac{P_{genA}}{2\cdot\lambda_B\cdot\pi\cdot L}\ln\left(\frac{c}{r}\right) \tag{1.90}$$

Заменом $r=b$ у једначини (1.90), може се одредити температура раздвојне површи слојева А и В ($\vartheta_1$):

$$\vartheta_1=\vartheta_2+\frac{P_{genA}}{2\cdot\lambda_B\cdot\pi\cdot L}\ln\left(\frac{c}{b}\right)=\vartheta_2+\frac{q_V\cdot(b^2-a^2)}{2\cdot\lambda_B}\ln\left(\frac{c}{b}\right)=69.89^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.91}$$

Да би се дошло до расподеле температуре у слоју А, посматра се цилиндрична површ полупречника $r$, аналогно као што је учињено за слој В. Снага којом се топлота преноси кроз дату површ износи:

$$P_{prenosaA}(r)=\iint_S \vec{q}_S\cdot d\vec{S}=-2\cdot\lambda_A\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial r} \tag{1.92}$$

Снага којом се топлота преноси кроз посматрану цилиндричну површ једнака је снази којом се топлота генерише унутар те површи, дате изразом:

$$P_{genA}(r)=\iiint_{V_A} q_V\cdot dV=\int_{r=a}^{r} q_V\cdot 2\pi\cdot r\cdot L\cdot dr=q_V\cdot 2\pi\cdot L\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_a^r=q_V\cdot 2\pi\cdot L\cdot\left(\frac{r^2}{2}-\frac{a^2}{2}\right)=q_V\cdot\pi\cdot L\cdot(r^2-a^2) \tag{1.93}$$

Изједначавањем снага из (1.93) и (1.92), добија се диференцијална једначина чијим решавањем се добија расподела температуре у слоју А:

$$-2\cdot\lambda_A\cdot\pi\cdot r\cdot L\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial r}=q_V\cdot\pi\cdot L\cdot(r^2-a^2)\ \Rightarrow\ d\vartheta=-\frac{q_V}{2\cdot\lambda_A}\cdot\left(r-\frac{a^2}{r}\right)dr \tag{1.94}$$

Интеграцијом десне стране једначине (1.94) по $r$ у границама од $a$ до $r$, а леве стране једначине по $\vartheta$ у границама од $\vartheta(a)$ до $\vartheta(r)$, добија се расподела температуре у слоју В:

$$\int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(r)} d\vartheta=-\int_a^r\frac{q_V}{2\cdot\lambda_A}\cdot\left(r-\frac{a^2}{r}\right)dr\ \Rightarrow\ \vartheta(r)-\vartheta(a)=\vartheta(r)-\vartheta_0=-\frac{q_V}{2\cdot\lambda_A}\cdot\left(\frac{r^2}{2}-a^2\ln(r)\right)\Big|_a^r \tag{1.95}$$

$$\vartheta(r)=\vartheta_0-\frac{q_V}{2\cdot\lambda_A}\cdot\left(\frac{r^2-a^2}{2}-a^2\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) \tag{1.96}$$

Заменом $r=b$ у једначини (1.96), може се одредити температура унутрашње граничне површи слоја А ($\vartheta_0$):

$$\vartheta_0=\vartheta_1+\frac{q_V}{2\cdot\lambda_A}\cdot\left(\frac{b^2-a^2}{2}-a^2\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)=78.43^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.97}$$

Средња вредност температуре у слоју А одређује се на следећи начин:

$$\vartheta_{Asr}=\frac{1}{V_A}\cdot\iiint_{V_A}\vartheta\cdot dV=\frac{1}{(b^2-a^2)\cdot\pi\cdot L}\cdot\int_{r=a}^{b}\left(\vartheta_0-\frac{q_V}{2\cdot\lambda_A}\cdot\left(\frac{r^2-a^2}{2}-a^2\ln\left(\frac{r}{a}\right)\right)\right)\cdot 2\cdot\pi\cdot L\cdot r\cdot dr \tag{1.98}$$

$$\vartheta_{Asr}=\frac{1}{(b^2-a^2)}\cdot\left(\vartheta_0\cdot r^2+\frac{q_V}{\lambda_A}\cdot\left(-\frac{r^4}{8}+\frac{a^2\cdot r^2}{4}+a^2\left(\frac{r^2}{2}\cdot\ln\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{r^2}{4}\right)\right)\right)\Big|_a^b \tag{1.99}$$

$$\vartheta_{Asr}=\vartheta_0+\frac{q_V}{\lambda_A\cdot(b^2-a^2)}\cdot\left(-\frac{b^4-a^4}{8}+\frac{a^2\cdot b^2}{2}\cdot\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)=74.82^{\circ}\mathrm{C} \tag{1.100}$$

**2. задатак**

Површинска густина снаге зрачења са површи извора износи:

$$q_s=\varepsilon\cdot\sigma_c\cdot T^4 \tag{1.101}$$

Јачина зрачења по јединици површине извора у правцу нормале на површ извора износи (видети задатак 18 из збирке):

$$I_{n,S}=\frac{q_s}{\pi}=\frac{\varepsilon\cdot\sigma_c\cdot T^4}{\pi} \tag{1.102}$$

Пошто идеално сиво тело зрачи дифузионо, јачина зрачења у произвољном правцу који са нормалом на површ извора заклапа угао φ, дата је следећим изразом:

$$I_{\varphi,S} = I_{n,S} \cdot \cos\varphi \tag{1.103}$$

Део снаге зрачења површи 1 која пада на површ 2 износи:

$$P_{1\to2} = I_{\varphi,S} \cdot S_1 \cdot \omega_{1\to2} \tag{1.104}$$

Са $\omega_{1\text{->}2}$ означен је просторни угао под којим се површ 2 види са површи 1, док је са φ означен угао између нормале на површ 1 и праве која повезује површи 1 и 2. Просторни угао $\omega_{1\text{->}2}$ дефинисан је следећим изразом:

$$\omega_{1\to2} = \frac{S_2 \cdot \cos\psi}{l_{12}{}^2} \tag{1.105}$$

$\psi$ – угао између нормале на површ 2 и праве која повезује површи 1 и 2

$l_{12}$ – растојање између површи 1 и површи 2

У случају када се површи налазе једна наспрам друге на растојању $l_{12}^{(1)}$=1m, снага зрачења површи 1 која пада на површ 2 износи:

$$P_{1\to2} = I_{\mathrm{n},S} \cdot \cos 0 \cdot S_1 \cdot \frac{S_2 \cdot \cos 0}{l_{12}^{(1)2}} = \frac{I_{\mathrm{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(1)2}} \tag{1.106}$$

Након што се површ 2 помери и заротира, а површ 1 приближи површи 2 на растојање $l_{12}^{(2)}$, снага зрачења површи 1 која пада на површ 2 износи:

$$P_{1\to2} = I_{\mathrm{n},S} \cdot \cos 45^{\mathrm{o}} \cdot S_1 \cdot \frac{S_2 \cdot \cos 0}{l_{12}^{(2)2}} = \frac{I_{\mathrm{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(2)2}\sqrt{2}} \tag{1.107}$$

Да би снага зрачења у оба случаја имала исту вредност, растојање између површи у 2. случају мора бити:

$$\frac{I_{\mathrm{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(1)2}} = \frac{I_{\mathrm{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(2)2}\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; l_{12}^{(2)} = \frac{l_{12}^{(1)}}{\sqrt[4]{2}} = 0.841\ \mathrm{m} \tag{1.108}$$

**<u>3. задатак</u>**

Видети решење 2. задатка са колоквијума одржаног 30.12.2013.

**<u>4. задатак</u>**

Видети решење 3. задатка са колоквијума одржаног 30.12.2013.

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

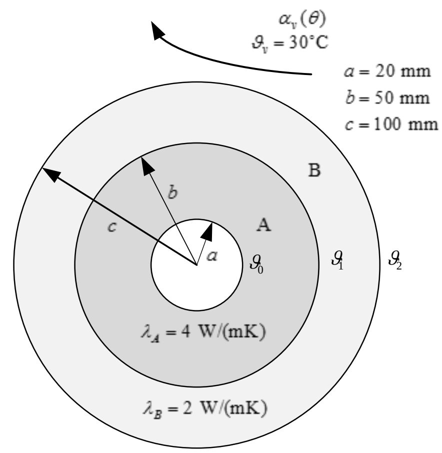
**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

---

**Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици**

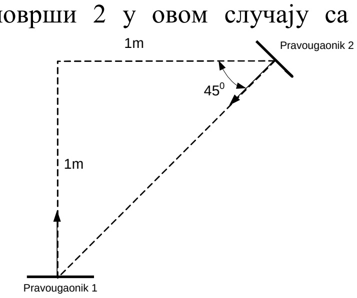
*Испит траје максимално 180 минута* 09. 02. 2014.

*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*




1. Цилиндрична структура приказана на слици се састоји из концентричних слојева A и B. У слоју A се генерише топлота равномерно по запремини запреминском густином снаге $q_v = 100 \cdot 10^3$ W/m$^3$. Гранична површ слоја B се хлади водом температуре $\vartheta_v = 30^{\circ}$C, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ($\theta = \vartheta_2 - \vartheta_v$) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta| / 20)^{0.25}$ $\left(\alpha_{v0} = 300 \text{ W/(m}^2\text{K)}\right)$. Унутрашња гранична површ слоја A је идеално топлотно изолована.
Одредити температуре $\vartheta_0$, $\vartheta_1$ $\vartheta_2$, као и максималну температуру слоја A. Општа температурна једначина у цилиндричном координатном систему гласи $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \dfrac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \phi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \dfrac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + q_v = \rho c_p \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}$.

2. Посматрајмо два мала правоугаоника (1 – површи 3 cm$^2$ и 2 – површи 1 cm$^2$) које се у почетном положају налазе у паралелним равнима на растојању 1 m. Означимо снагу преноса од површи 1 ка површи 2 у овом случају са $P_1$. Правоугаоник 2 се транслаторно помери за 1 m паралелно дужој страници, а затим ротира тако да нормале на површи, усмерене од стране површи која зрачи, заклапају угао од 135$^0$. На које растојање од правоугаоника 1 транслаторно по правцу дужи која их спаја треба да се помери правоугаоник 2 да би снага која пада на површ 2 била једнака снази која је на њу падала у почетном положају?




3. Одредити дозвољену струју кратког споја коју проводнник од бакра површине попречног пресека 95 mm$^2$ може да поднесе у трајању од 500 ms ако је максимална температура изолације 180 °C, а кратак спој настаје: а) у хладном стању (температура 20°C) и б) при номиналном оптерећењу (температура 100°C). Познате су карактеристике бакра: $c_{Cu}$ = 390 J/(kg $^0$C), $\rho_{Cu}$ = 8900 kg/m$^3$, специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\,Cu}$=56×10$^6$ S / m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{Cu20}$=3.9×10$^{-3}$°C$^{-1}$. При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски.

4. Подаци о дистрибутивном енергетском уљном трансформатору: номинална снага 630 kVA, номинални губици услед оптерећења (у намотајима) $P_{Cun}$ = 6.5 kW, номинални губици у празном ходу (у језгру) $P_{Fen}$ = 1.3 kW, номинални пораст температуре горњег уља $\theta_{gun}$ = 55 K, пораст средње температуре намотаја у односу на средњу температуру уља $g_n$ = 20 K, фактор најтоплије тачке $H$ = 1.1, временска константа по којој се приближно може рачунати временски ток промене температуре горњег уља 3 сата, а пораста средње температуре намотаја у односу на средњу температуру уља 5 минута. Однос пораста температуре горњег уља и његове номиналне вредности ($\theta_{gu}$ / $\theta_{gun}$) је једнак количнику губитака и номиналних губитака ($P_{gu}$ / $P_{gun}$) степенованом на 0.8. Идентична зависност важи и за разлику средње температуре намотаја и средње температуре уља ($g$ / $g_n$), при чему је релевантан однос губитака у намотајима ($P_{Cu}$ / $P_{Cun}$). Трансформатор је везан паралелно трансформатору идентичних карактеристика и у дужем периоду напаја потрошњу чија снага износи 800 kW, а фактор снаге 0.9. У једном тренутку долази до квара и испада другог трансформатора, при чему први трансформатор наставља да напаја целокупну потрошњу. Колико дуго је могућ овакав рад (без редукција потрошње) ако су граничне вредности за оптерећење трансформатора у оваквом нужном случају: максимално релативно струјно оптерећење 1.8, максимална температура најтоплије тачке 150 $^0$C и највиша температура горњег уља 115 $^0$C? Температура амбијента износи 30 $^0$C.

5. Нацртати начин везивања и написати преносну функцију аналогног RC филтра за елиминисање шума при мерењу једносмерног напона код UI методе континуираног праћења отпора краткоспојеног намотаја трансформатора током огледа загревања. Колико износи учестаност за коју је дејством филтра напон који се доводи на крајеве волтметра смањује на 1 % у односу на напон на трансформатору?

*Решења задатака*

**1.задатак**

Пошто је унутрашња гранична површ слоја А идеално топлотно изолована, у устаљеном стању се целокупна топлотна енергија генерисана у слоју А преноси струјањем на воду. Снага којом се топлота преноси струјањем на воду у устаљеном стању мора бити једнака снази топлотних извора у слоју А.

$$P_{strB} = P_{gen\,A} \tag{1.109}$$

Снага којом се топлотна енергија генерише у слоју А износи:

$$P_{genA} = \iiint_{V_A} q_V \cdot dV = \int_{r=a}^{b} q_V \cdot 2\pi \cdot r \cdot L \cdot dr = q_V \cdot 2\pi \cdot L \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_a^b = q_V \cdot 2\pi \cdot L \cdot \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = q_V \cdot \pi \cdot L \cdot (b^2 - a^2) \tag{1.110}$$

Снага одвођења топлоте струјањем са граничне површи слоја В зависи од разлике температура граничне површи ($\vartheta_2$) и воде:

$$P_{strB} = \alpha_v(\theta) \cdot S_{strB} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_v) = 2 \cdot \pi \cdot c \cdot L \cdot \alpha_v(\theta) \cdot \theta = 2 \cdot \pi \cdot c \cdot L \cdot \alpha_{v0} \cdot \frac{\theta^{1.25}}{20^{0.25}} \tag{1.111}$$

Заменом (1.110) и (1.111) у (1.109) добија се израз из кога се одређује температура спољашње граничне површи слоја В ($\vartheta_2$):

$$2 \cdot \pi \cdot c \cdot L \cdot \alpha_{v0} \cdot \frac{\theta^{1.25}}{20^{0.25}} = q_V \cdot \pi \cdot L \cdot (b^2 - a^2) \;\Rightarrow\; \theta = \vartheta_2 - \vartheta_v = \left(\frac{q_V \cdot (b^2 - a^2) \cdot 20^{0.25}}{2 \cdot c \cdot \alpha_{v0}}\right)^{0.8} \tag{1.112}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_v + \left(\frac{q_V \cdot (b^2 - a^2) \cdot 20^{0.25}}{2 \cdot c \cdot \alpha_{v0}}\right)^{0.8} = 34.96^\circ\mathrm{C} \tag{1.113}$$

Остатак решења исти је као код 1. задатка са испита одржаног 27. 1. 2014.

**2. задатак**

Видети решење 2. задатка са испита одржаног 27.01.2014.

**3. задатак**

Видети решење 2. задатка са колоквијума одржаног 30.12.2013.

**4. задатак**

Привидна снага потрошње износи:

$$S_{potr} = \frac{P_{potr}}{\cos\varphi_{potr}} = 888.89\ \mathrm{kVA} \tag{1.114}$$

Пре испада другог трансформатора, трансформатори су радили у паралели и сваки трансформатор је био оптерећен половином укупне снаге потрошње (ово важи јер су трансформатори идентични, у општем случају трансформатори деле укупно оптерећење у зависности од односа њихових редних импеданси, односно реактанси расипања, односно напона кратког споја).
Привидна снага првог трансформатора у паралелном раду износила је:

$$S_0 = \frac{S_{potr}}{2} = 444.44\ \mathrm{kVA} \tag{1.115}$$

Релативно струјно оптерећење првог трансформатора тада је износило:

$$\beta_0 = \frac{S_0}{S_n} = 0.7055 \tag{1.116}$$

Сматра се да је пре испада другог трансформатора достигнуто термичко стационарно стање.
Губици у намотајима тада су имали следећу вредност:

$$P_{cu0} = \beta_0^2 \cdot P_{cun} = 3.235\ \mathrm{kW} \tag{1.117}$$

Порасти температура горњег уља у односу на амбијент и средње температуре намотаја у односу на средњу температуру уља у намотајима могу се израчунати из релација које важе за устаљено стање:

$$\frac{\theta_{gu0}}{\theta_{gun}} = \left(\frac{P_{cu0} + P_{fen}}{P_{cun} + P_{fen}}\right)^{0.8} \;\Rightarrow\; \theta_{gu0} = \theta_{gun} \cdot \left(\frac{P_{cu0} + P_{fen}}{P_{cun} + P_{fen}}\right)^{0.8} = 35.64\text{K} \tag{1.118}$$

$$\frac{g_0}{g_n} = \left(\frac{P_{cu0}}{P_{cun}}\right)^{0.8} = \beta_0^{1.6} \;\Rightarrow\; g_0 = \beta_0^{1.6} \cdot g_n = 11.45\text{K} \tag{1.119}$$

Након испада другог трансформатора, први трансформатор преузима напајање целокупне потрошње, те његова привидна снага износи:

$$S_1 = S_{potr} = 888.89 \text{ kVA} \tag{1.120}$$

Релативно струјно оптерећење након испада другог трансформатора износи:

$$\beta_1 = \frac{S_1}{S_n} = 1.4109 \tag{1.121}$$

Губици у намотајима у оваквим условима износе:

$$P_{cu1} = \beta_1^2 \cdot P_{cun} = 12.939 \text{ kW} \tag{1.122}$$

Устаљене вредности пораста температуре горњег уља и намотаја при оваквом оптерећењу износе:

$$\frac{\theta_{gu1}}{\theta_{gun}} = \left(\frac{P_{cu1} + P_{fen}}{P_{cun} + P_{fen}}\right)^{0.8} \;\Rightarrow\; \theta_{gu1} = \theta_{gun} \cdot \left(\frac{P_{cu1} + P_{fen}}{P_{cun} + P_{fen}}\right)^{0.8} = 89.02\text{K} \tag{1.123}$$

$$\frac{g_1}{g_n} = \left(\frac{P_{cu1}}{P_{cun}}\right)^{0.8} = \beta_1^{1.6} \;\Rightarrow\; g_1 = \beta_1^{1.6} \cdot g_n = 34.69\text{K} \tag{1.124}$$

Усваја се да се пораст температуре горњег уља и намотаја у току прелазног процеса мењају по експоненцијалним функцијама:

$$\theta_{gu}(t) = \theta_{gu0} \cdot e^{-t/\tau_u} + \theta_{gu1} \cdot (1 - e^{-t/\tau_u}) \tag{1.125}$$

$$g(t) = g_0 \cdot e^{-t/\tau_{nam}} + g_1 \cdot (1 - e^{-t/\tau_{nam}}) \tag{1.126}$$

Температура горњег уља се у току прелазног процеса мења на следећи начин:

$$\vartheta_{gu}(t) = \vartheta_a + \theta_{gu}(t) = \vartheta_a + \theta_{gu0} \cdot e^{-t/\tau_u} + \theta_{gu1} \cdot (1 - e^{-t/\tau_u}) \tag{1.127}$$

Из једначине (1.127) могуће је израчунати време након кога се достиже максимална дозвољена вредност температуре горњег уља ($\vartheta_{gu\,max}$).

$$(\theta_{gu1} - \theta_{gu0}) \cdot e^{-t_1/\tau_u} = \theta_{gu1} - \vartheta_{gu\max} + \vartheta_a \;\Rightarrow\; t_1 = \tau_u \cdot \ln\left(\frac{\theta_{gu1} - \theta_{gu0}}{\theta_{gu1} - \vartheta_{gu\max} + \vartheta_a}\right) = 7.758 \text{ h} \tag{1.128}$$

При разматрању температура намотаја, сматра се да је вредност пораста средње температуре намотаја у односу на уље достигла вредност која се има у устаљеном стању. Ова претпоставка је оправдана јер је термичка временска константа намотаја много мања од термичке временске константе уља. Температура најтоплије тачке намотаја се у току прелазног процеса мења на следећи начин:

$$\vartheta_{hs}(t) = \vartheta_a + \theta_{gu}(t) + H \cdot g(t) \approx \vartheta_a + \theta_{gu0} \cdot e^{-t/\tau_u} + \theta_{gu1} \cdot (1 - e^{-t/\tau_u}) + H \cdot g_1 \tag{1.129}$$

Из једначине (1.129) може се израчунати време након кога температура најтоплије тачке намотаја достиже највећу дозвољену вредност ($\vartheta_{hs\,max}$).

$$t_2 = \tau_u \cdot \ln\left(\frac{\theta_{gu1} - \theta_{gu0}}{\theta_{gu1} - \vartheta_{hs\max} + \vartheta_a + H \cdot g_1}\right) = 6.019 \text{ h} \tag{1.130}$$

Пошто је $t_2 < t_1$, овакав рад је могућ у трајању од $t_2$=6.019 часова након испада другог трансформатора.

**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ**
**УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

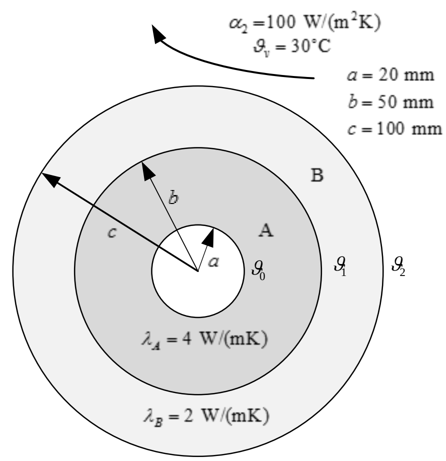
---

**Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици**

*Испит траје максимално 180 минута* 19. 09. 2014.

*Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић*

1. Цилиндрична структура приказана на слици се састоји из концентричних слојева А и B. У слоју А се генерише топлота равномерно по запремини запреминском густином снаге $q_v = 100 \cdot 10^3$ W/m$^3$. Граничне површи слојева А и B се хладе водом температуре $\vartheta_v = 30^{\circ}\mathrm{C}$, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем износи на унутрашњу површ слоја А износи $\alpha_1 = 50 \frac{W}{m^2 K}$, а на спољашњу површ слоја слоја B $\alpha_2 = 100 \frac{W}{m^2 K}$.



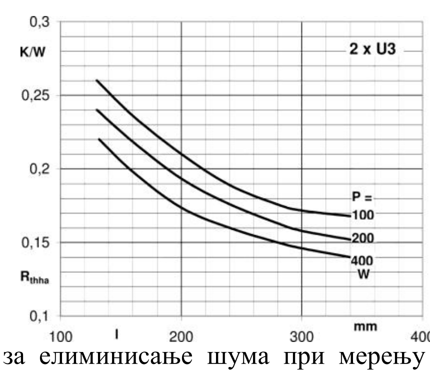

Одредити температуре $\vartheta_0$, $\vartheta_1$ $\vartheta_2$, као и максималну температуру слоја А. Општа температурна једначина у цилиндричном координатном систему гласи

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\, r\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)+q_v=\rho\, c_p\frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

2. Радијатор којим се хлади уље природним струјањем ваздуха има расхладну снагу по јединици површи од око 320 W / m$^2$, при средњој температури плоча радијатора 65 $^0$C. За колико је мања ова густина снаге у односу на ситуацију када би плоче радијатора биле постављене тако да могу слободно да зраче у околни простор температуре 20 $^0$C . Емисивност спољне површи плоче радијатора износи 0.8. Сматрати да је температура читаве површи радијатора 65 $^0$C. Сматрати да је учешће снаге зрачења са спољашње површи радијатора у вредности 320 W / m$^2$ занемарљиво мало.

3. Одредити дозвољену струју кратког споја коју проводнник од бакра површине попречног пресека 95 mm$^2$ може да поднесе у трајању од 500 ms ако је максимална температура изолације 180 °C, а кратак спој настаје: а) у хладном стању (температура 20°C) и б) при номиналном оптерећењу (температура 100°C). Познате су карактеристике бакра: $c_{Cu}$ = 390 J/(kg $^0$C), $\rho_{Cu}$ = 8900 kg/m$^3$, специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\,Cu}$=56×10$^6$ S / m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{Cu20}$=3.9×10$^{-3}$°C$^{-1}$. При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски.

4. На слици је дата зависност топлотног отпора једног хладњака од његове дужине и снаге губитака компоненте коју хлади. За хлађење једне компоненте у којој се генеришу губици снагом 400 W је одабран хладњак дужине 150 mm. Пораст температуре најтоплије тачке компоненте у односу на околни ваздух износи 50 K. Колико би износио овај пораст температуре када да дужина хладњака била дупло већа (300 mm)? Израчунати пораст температуре и за случај хладњака дужине 150 mm и снагу губитака у компоненти од 100 W.




5. Нацртати начин везивања и написати преносну функцију аналогног RC филтра за елиминисање шума при мерењу једносмерног напона код UI методе континуираног праћења отпора краткоспојеног намотаја трансформатора током огледа загревања. Колико износи учестаност за коју је дејством филтра напон који се доводи на крајеве волтметра смањује на 1 % у односу на напон на трансформатору?

*Решења задатака*

**1. задатак**

Због симетрије структуре и материјала, извора топлоте и граничних услова, температура зависи само од радијалне координате у цилиндричном координатном систему:

$$\vartheta = \vartheta(r) \tag{1.131}$$

У устаљеном стању се део топлотне енергије генерисан у слоју А преноси провођењем кроз слој B и струјањем на воду на спољашњој граничној површи слоја B, док се други део директно преноси струјањем на воду на унутрашњој граничној површи слоја А.

Топлотни отпор којим се моделује струјање на унутрашњој граничној површи слоја А износи:

$$R_{strA} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot S_{strA}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_1 \cdot a \cdot L} \tag{1.132}$$

Топлотни отпор провођењу кроз слој B одређен је следећим изразом (видети 3. задатак из материјала за вежбе 1-3):

$$R_{provB} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_B \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{c}{b}\right) \tag{1.133}$$

Топлотни отпор којим се моделује струјање на унутрашњој граничној површи слоја B износи:

$$R_{strB} = \frac{1}{\alpha_2 \cdot S_{strB}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha_2 \cdot c \cdot L} \tag{1.134}$$

Температурна једначина за слој А у устаљеном стању гласи:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + q_v = 0 \tag{1.135}$$

Опште решење једначине (1.135), добијено након две интеграције, има следећи облик:

$$\vartheta(r) = -\frac{q_V \cdot r^2}{4 \cdot \lambda_A} + \frac{C_1}{\lambda} \cdot \ln(r) + C_2 \tag{1.136}$$

Константе које фигуришу у изразу (1.136) одређују се из граничних услова постављених за унутрашњу и спољашњу граничну површ слоја А.

$$\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r}(r=a) \cdot S = \frac{1}{R_{strA}} \cdot (\vartheta(r=a) - \vartheta_1) = \frac{1}{R_1} \cdot (\vartheta(r=a) - \vartheta_1) \tag{1.137}$$

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r}(r=b) \cdot S = \frac{1}{R_{strB} + R_{provB}} \cdot (\vartheta(r=b) - \vartheta_1) = \frac{1}{R_2} \cdot (\vartheta(r=b) - \vartheta_1) \tag{1.138}$$

Заменом израза за температуру и њен парцијални извод из (1.136) у (1.137) и (1.138), добија се систем једначина из кога се могу одредити константе $C_1$ и $C_2$.

$$C_1 = \frac{q_V \cdot \pi \cdot L \cdot (b^2 \cdot R_2 + a^2 \cdot R_1) + \dfrac{q_V \cdot (b^2 - a^2)}{4 \cdot \lambda_A}}{\dfrac{1}{\lambda_A} \cdot \ln\left(\dfrac{b}{a}\right) + 2 \cdot \pi \cdot L \cdot (R_2 + R_1)} = 53.083 \tag{1.139}$$

$$C_2 = \vartheta_v - q_V \cdot a^2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1 + C_1 \cdot \left(-\frac{1}{\lambda_A} \cdot \ln(a) + 2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1\right) + \frac{q_V \cdot a^2}{4 \cdot \lambda_A} = 117.51 \tag{1.140}$$

Највећа температура у слоју А достиже се на границама слоја или у тачкама у којима је парцијални извод температуре по радијалној координати једнак нули (остали парцијални изводи су једнаки нули свуда јер температура зависи само од радијалне координате). Парцијални извод температуре по радијалној координати добија се диференцирањем израза (1.136) и износи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -\frac{q_V \cdot r}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{C_1}{\lambda_A \cdot r} \tag{1.141}$$

Изједначавањем израза (1.141) са нулом добија се позиција тачака у којима је парцијални извод температуре једнак нули:

$$-\frac{q_V \cdot r_0}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{C_1}{\lambda_A \cdot r_0} = 0 \;\Rightarrow\; r_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot C_1}{q_V}} = 0.03258 \text{ m} \tag{1.142}$$

Максимална температура у слоју А износи:

$$\vartheta(r = r_0) = -\frac{q_V \cdot r_0^{\,2}}{4 \cdot \lambda_A} + \frac{C_1}{\lambda} \cdot \ln(r_0) + C_2 = 65.436^\circ\text{C} \tag{1.143}$$

Кроз слој B преноси се целокупна снага генерисана у слоју А у области између цилиндричне површи на којој је температура највећа ($r_0$) и спољашње граничне површи слоја А (цилиндрична површ полупречника $b$):

$$P_{provB} = \int_{r=r_0}^{b} q_V \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dr = q_V \cdot \pi \cdot L \cdot (b^2 - r_0^2) \tag{1.144}$$

Температура спољашње граничне површи слоја B ($\vartheta_2$) израчунава се заменом израза (1.144) у једначину која описује струјање на граничној површи:

$$\vartheta_2 = \vartheta_v + \frac{P_{provB}}{\alpha_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot c \cdot L} = 37.193^\circ\text{C} \tag{1.145}$$

Температура унутрашње граничне површи слоја B ($\vartheta_1$) израчунава се на следећи начин:

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + P_{provB} \cdot R_{provB} = \frac{P_{provB}}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda_B} \cdot \ln\left(\frac{c}{b}\right) = 62.121^\circ\text{C} \tag{1.146}$$

На унутрашњој граничној површи слоја А струјањем се преноси целокупна снага генерисана у слоју А у области између унутрашње граничне површи и цилиндричне површи на којој је температура највећа ($r_0$):

$$P_{strA} = \int_{r=a}^{r_0} q_V \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dr = q_V \cdot \pi \cdot L \cdot (r_0^2 - a^2) \tag{1.147}$$

Температура унутрашње граничне површи слоја А ($\vartheta_0$) израчунава се заменом израза (1.147) у једначину која описује струјање на граничној површи:

$$\vartheta_0 = \vartheta_v + \frac{P_{strA}}{\alpha_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot L} = 63.07^\circ\text{C} \tag{1.148}$$

**<u>2. задатак</u>**

Уколико би се плоче радијатора поставиле тако да могу да зраче у слободан простор, расхладна снага би се повећала за снагу зрачења са површи радијатора. Снага зрачења са површи радијатора износи по јединици површине:

$$P_{zr} = \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot \left(\left(\frac{T}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_a}{100}\right)^4\right) = \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot \left(\left(\frac{\vartheta_{rad} + 273.15}{100}\right)^4 - \left(\frac{\vartheta_a + 273.15}{100}\right)^4\right) = 258 \text{ W/m}^2 \tag{1.149}$$

**<u>3. задатак</u>**

Видети решење 2. задатка са колоквијума одржаног 30. 12. 2013.

**<u>4. задатак</u>**

Видети решење 4. задатка са колоквијума одржаног 14. 06. 2013.