ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

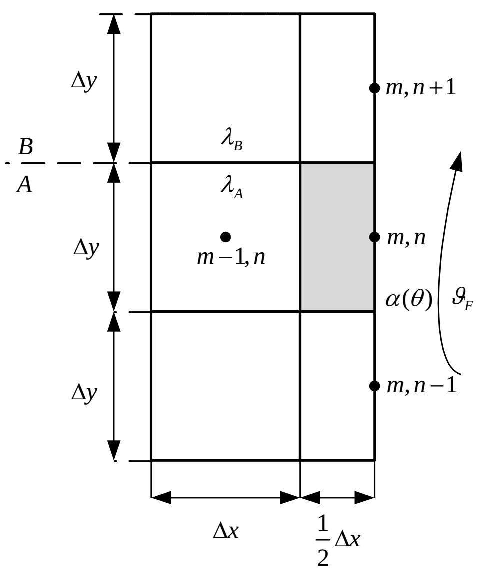
Катедра за енергетске претвараче и погоне

Први колоквијум из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 150 минута
Сваки потпуно тачно решен задатак доноси 2,75 поена 15. 11. 2015.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Дати прецизну дефиницију топлотног отпора између две изотемичке површи (1 поен). Извести израз за топлотни отпор између унутрашње површи сферног тела (полупречник унутрашње лопте r_u) и спољашње површи сферичног тела (полупречник спољашње лопте r_s). Топлотна проводност материјала од кога је сачињено тело у зони између r_u и r_z износи λ_1, а у зони између r_z и r_s износи λ_2. (1.5 поена). Израз за градијент у сферном координатном систему:

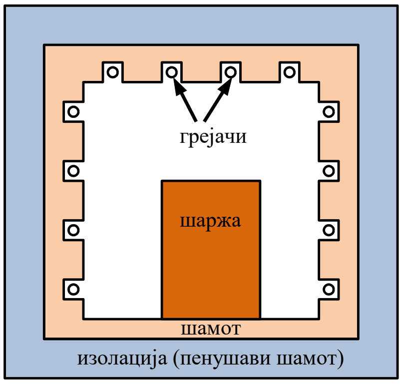
$$grad\,\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi$$



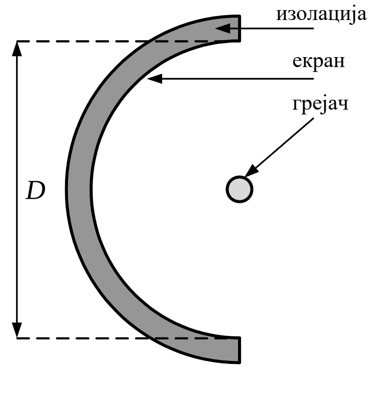
2. Написати једначину енергетског биланса из којих се изводи једначина за експлицитну методу коначних елемената за осенчени елемент топлопроводне средине на слици. Посматрани елемент се налази на граничној површи два материјала A и B различитих специфичних топлотних проводности (λ_A и λ_B), при чему у њему нема генерисања топлоте. Десна гранична површ елемента хлади се природним струјањем флуида температуре ϑ_F, при чему коефицијент преноса топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и флуида (θ) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0}\cdot(|\theta|/20)^{0.25}$

Сматрати да су познати сви подаци о карактеристикама материјала топлопроводне средине, као и температура флуида.

3. Електроотпорна коморна пећ са индиректним загревањем, инсталисане снаге P_n=5kW, састоји се из два слоја: унутрашњег, који носи електроотпорни извор топлоте и кога карактерише велики топлотни капацитет и велика топлотна проводност, и спољашњег, топлотно изолационог, кога карактерише мали топлотни капацитет и мала топлотна проводност. Пораст температуре унутрашњости пећи (пећ је празна и њена снага износи 4 kW) у устаљеном стању износи 1600 K, а после прва два часа рада 800 K. У празну пећ, која се налази на температури амбијента, убацује се челични комад масе 200 kg (специфични топлотни капацитет челика износи 0.48 kJ/(kg K)). Снага грејача се регулише променом ефективне вредности напона. Челични комад се загрева номиналном снагом док се не достигне пораст температуре 1000 K, након чега се тај пораст температуре одржава 1 h. Одредити коефицијент корисног дејства овог процеса и упоредити га са коефицијентом корисног дејства који би се имао уколико би се загревање до жељеног пораста температуре вршило смањеном снагом која износи 4 kW.



4. Да би се постигла боља усмереност зрачења штапног грејача, иза дугачакоg цилиндричног грејача дужине L=80 cm, пречника d=1 cm и снаге 1 kW поставља се цилиндрични екран пречника D=10 cm, као на слици. Спољашња површ екрана је идеално топлотно изолована. Уколико је температура амбијента 20°C, одредити температуре грејача и екрана. Занемарити пренос топлоте струјањем са екрана и грејача на ваздух и ефекте крајева. Емисивности површи грејача и екрана износе 0.95, односно 0.2 респективно. Колико би се промениле тражене температуре ако емисивност екрана износи 0.3?

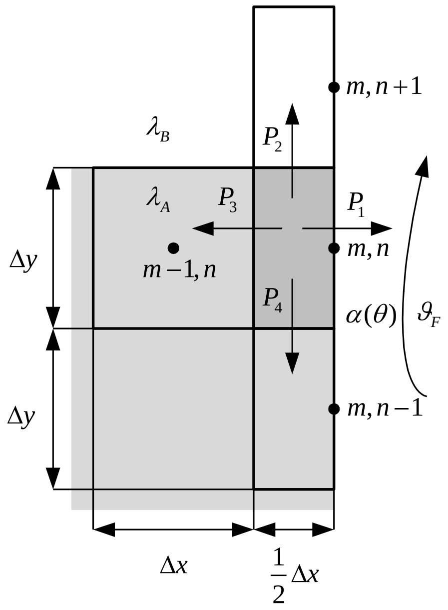


Решења задатака:

1.задатак

Видети решење 2. задатка са првог колоквијума одржаног 28.12.2012.

2.задатак



Једначина по методи коначних елемената за посматрани елемент изводи се из једначине биланса снага за тај елемент, која гласи:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{2.1}$$

P_{gen} - снага којом се топлотна енергија генерише у посматраном елементу
P_{akum} – снага којом се топлотна енергија акумулише у посматраном елементу
$P_{prenosa}$ – снага којом се топлотна енергија преноси од посматраног елемента ка околини
Снага којом се топлотна енергија преноси од посматраног елемента ка околини једнака је суми снага којима се енергија преноси ка сваком од суседних елемената (P_2- P_4) и ка расхладном флуиду (P_1); одговарајуће снаге означене су на слици:

$$P_{prenosa} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \tag{2.2}$$

Снага којом се топлотна енергија преноси струјањем на флуид износи:

$$P_1 = \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_F}{\dfrac{1}{\alpha(\theta)\cdot S_F}} = \alpha(\theta)\cdot S_F \cdot (\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_F) = \frac{\alpha_{v0}\cdot \Delta y \cdot L}{20^{0.25}} \cdot (\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_F)^{1.25} \tag{2.3}$$

$\vartheta_{m,n}{}^p$ – температура елемента на позицији са индексима m и n, у тренутку са индексом p.
Снаге којима се топлотна енергија преноси ка суседним елементима дате су следећим изразима:

$$P_2 = \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n+1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta y/2}{\Delta x/2\cdot L} + \dfrac{1}{\lambda_B}\dfrac{\Delta y/2}{\Delta x/2\cdot L}} = \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n+1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta y}{\Delta x\cdot L} + \dfrac{1}{\lambda_B}\dfrac{\Delta y}{\Delta x\cdot L}} = \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n+1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A} + \dfrac{1}{\lambda_B}} \cdot \frac{\Delta x \cdot L}{\Delta y} \tag{2.4}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m-1,n}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta x}{\Delta y\cdot L}} = (\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m-1,n}^p)\cdot \lambda_A \cdot \frac{\Delta y \cdot L}{\Delta y} \tag{2.5}$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n-1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta y}{\Delta x/2\cdot L}} = (\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n-1}^p)\cdot \lambda_A \cdot \frac{\Delta x \cdot L}{2\cdot \Delta y} \tag{2.6}$$

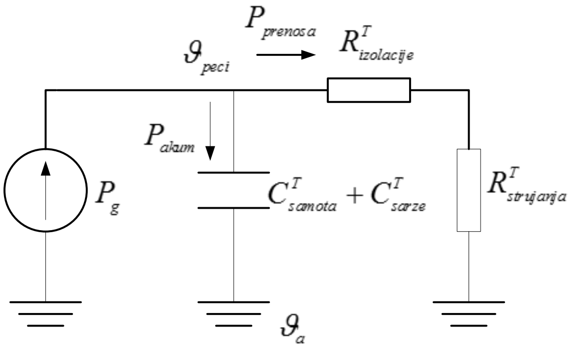
Снаге којима се топлота генерише (по услову задатка q_v=0) и акумулише у посматраном елементу износе:

$$P_{gen} = q_V \cdot V_{m,n} = q_V \cdot \frac{1}{2}\cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \tag{2.7}$$

$$P_{akum} = C_{m,n}^T \cdot \frac{\partial \vartheta_{m,n}}{\partial t} \approx C_{m,n}^T \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{1}{2}\cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \tag{2.8}$$

3.задатак

Унутар пећи одвија се сложени пренос топлоте који укључује пренос топлоте струјањем са грејача на ваздух и са ваздуха на шамот и шаржу, зрачењем са грејача на шаржу, са шарже на шамот и са грејача на шамот, као и провођење топлоте кроз шамот и изолацију и струјање и зрачење ка амбијенту на спољашњој површи пећи. Овако развијен детаљни модел пећи би се састојао из четири чвора којима би биле представљене изотермичке запремине (шаржа, грејач, ваздух, шамот) и захтевао би детаљно познавање унутрашње конструкције пећи и примењених материјала.
Даље решавање задатка приказано је под претпоставком да целокупна унутрашњост пећи представља једну изотермичку запремину и да је уважен пренос топлоте кроз изолацију ка амбијенту. Топлотна шема која одговара овако поједностављеном моделу приказана је на слици.



Укупан топлотни капацитет пећи представља збир топлотних капацитета шамота и шарже. Овај топлотни капацитет зависи од материјала и тежине шарже која се налази у комори пећи.

$$C^T = C^T_{samota} + C^T_{sarze} = C^T_{samota} + m_{sarze} \cdot c_{sarze} \tag{3.1}$$

Промена пораста температуре унутрашњости пећи у односу на амбијент описана је следећом диференцијалном једначином:

$$C^T \cdot \frac{d\theta_{peci}}{dt} + \frac{\theta_{peci}}{R^T} = P_g \tag{3.2}$$

Сређивање једначине (3.2) се добија:

$$R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta_{peci}}{dt} + \theta_{peci} = R^T \cdot P_g \tag{3.3}$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta_{peci}}{dt} + \theta_{peci} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \tag{3.4}$$

где је са τ означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T \cdot C^T \tag{3.5}$$

Решење диференцијалне једначине (3.4) гласи:

$$\theta_{peci}(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \tag{3.6}$$

θ_0 - пораст температуре унутрашњости пећи у тренутку t=0

θ_{stac} - пораст температуре унутрашњости пећи у устаљеном стању које би наступило када би загревање трајало неограничено дуго.
Пораст температуре у устаљеном стању може се одредити на следећи начин:

$$\theta_{stac} = P_g \cdot R^T \tag{3.7}$$

У случају загревања празне пећи, на основу пораста температуре у устаљеном стању може се одредити укупни топлотни отпор ка амбијенту, који представља збир топлотног отпора изолације и топлотног отпора којим је моделовано струјање ка амбијенту.

$$R^T = \frac{\theta_{stac0}}{P_g} = \frac{1600}{4000} = 0.4 \text{ K/W} \tag{3.8}$$

На основу познавања температуре после прва два часа рада са празном пећи, могуће је одредити топлотни капацитет шамота (пошто је топлотни капацитет шарже у том случају једнак нули).

$$\theta(t^*) = 800 \text{ K} = \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) + \theta(0) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} \;\Rightarrow\; \tau = \frac{t^*}{\ln\left(\dfrac{\theta_{stac} - \theta(0)}{\theta_{stac} - \theta(t^*)}\right)} = \frac{2h}{\ln\left(\dfrac{1600-0}{1600-800}\right)} = 2.885h \tag{3.9}$$

$$C_{samota}^{T}=\frac{\tau}{R^{T}}=\frac{2.885\cdot 60\cdot 60\ \text{s}}{0.4\ \text{K/W}}=25965\ \text{J/K} \tag{3.10}$$

Топлотни капацитет шарже износи:

$$C_{sarze}^{T}=m_{sarze}\cdot c_{sarze}=200\cdot 480=96000\ \text{J/K} \tag{3.11}$$

Укупни топлотни капацитет пећи са шаржом износи:

$$C^{T}=C_{samota}^{T}+C_{sarze}^{T}=121965\ \text{J/K} \tag{3.12}$$

Пораст температуре при загревању шарже номиналном снагом, у устаљеном стању би износио:

$$\theta_{stac1}=P_{g1}\cdot R^{T}=5000\cdot 0.4=2000\ \text{K} \tag{3.13}$$

Ако би се загревање вршило смањеном снагом, пораст температуре у устаљеном стању би износио:

$$\theta_{stac2}=P_{g2}\cdot R^{T}=4000\cdot 0.4=1600\ \text{K} \tag{3.14}$$

Ова вредност пораста температуре се неће достићи, јер се шаржа загрева само до достизања пораста температуре од 1000 К.

Временска константа пећи са датом шаржом износи:

$$\tau=R^{T}\cdot C^{T}=0.4\cdot 121965=48786\ \text{s}=13.552\ \text{h} \tag{3.15}$$

Време потребно да се достигне пораст температуре од 1000 К, уколико се загревање врши номиналном снагом, износи:

$$t_{zagr1}=\tau\cdot\ln\left(\frac{\theta_{stac}-\theta(0)}{\theta_{stac}-\theta(t^{*})}\right)=13.552\cdot\ln\left(\frac{2000-0}{2000-1000}\right)=9.394\ \text{h} \tag{3.16}$$

Ако се загревање до жељеног пораста температуре врши смањеном снагом, време загревања износи:

$$t_{zagr2}=\tau\cdot\ln\left(\frac{\theta_{stac2}-\theta(0)}{\theta_{stac2}-\theta(t^{*})}\right)=13.552\cdot\ln\left(\frac{1600-0}{1600-1000}\right)=13.292\ \text{h} \tag{3.17}$$

Након достизања жељеног пораста температуре, да би се исти одржао, потребно је подесити снагу грејача на вредност која је једнака снази топлотних губитака, односно снази којом се топлотна енергија из унутрашњости пећи преноси ка амбијенту:

$$P_{gstac}=\frac{\theta_{stac}}{R^{T}}=\frac{1000}{0.4}=2.5\ \text{kW} \tag{3.18}$$

Уколико се загревање до жељеног пораста температуре врши номиналном снагом, укупна утрошена електрична енергија износи:

$$W_{gr1}=P_{g1}\cdot t_{zagr1}+P_{gstac}\cdot t_{stac}=5\cdot 9.394+2.5\cdot 1=49.47\ \text{kWh} \tag{3.19}$$

Уколико се загревање до жељеног пораста температуре врши смањеном снагом, укупна утрошена електрична енергија износи:

$$W_{gr2}=P_{g2}\cdot t_{zagr2}+P_{gstac}\cdot t_{stac}=4\cdot 13.292+2.5\cdot 1=55.67\ \text{kWh} \tag{3.20}$$

Енергија предата шаржи у току загревања једнака је порасту унутрашње енергије шарже:

$$W_{sarze}=C_{sarze}^{T}\cdot(\theta^{*}-\theta(0))=96000\cdot(1000-0)=96\cdot 10^{6}\ \text{J}=26.67\ \text{kWh} \tag{3.21}$$

Уколико се загревање до жељеног пораста температуре врши номиналном снагом, степен искоришћења износи:

$$\eta_{1}=\frac{W_{sarze}}{W_{gr1}}=\frac{26.67}{49.47}=0.539 \tag{3.22}$$

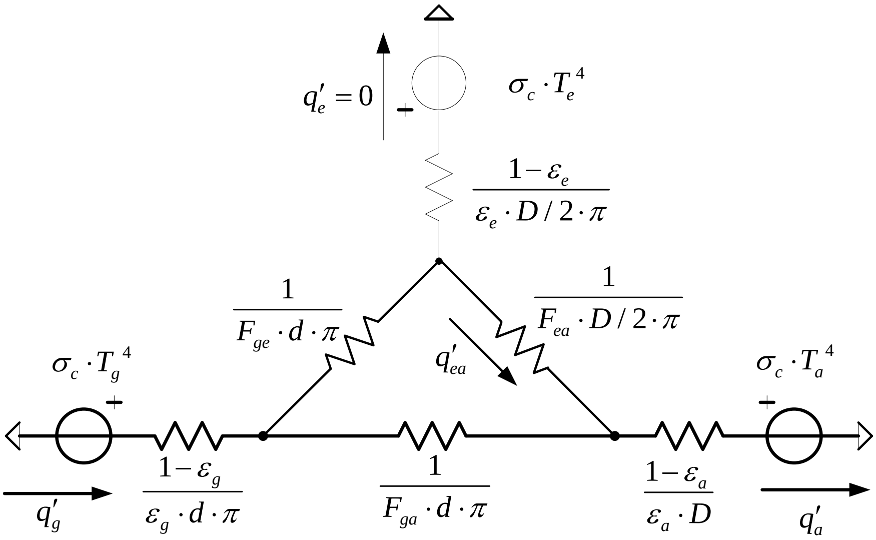
Уколико се загревање до жељеног пораста температуре врши смањеном снагом, степен искоришћења износи:

$$\eta_{2}=\frac{W_{sarze}}{W_{gr2}}=\frac{26.67}{55.67}=0.479 \tag{3.23}$$

Ниска вредност степена искоришћења последица је енергије утрошене на загревање пећи. Уколико би се вршило загревање више шаржи једне након друге, степен искоришћења би био већи јер би унутрашњост пећи била на већој температури при убацивању шарже и била би потребна мања енергија за загревање унутрашњости пећи. Уколико би се више шаржи загревало истовремено, укупна енергија предата шаржама би била већа и то би довело до пораста степена искоришћења.

4.задатак

Овај проблем се може решити постављањем радијационе шеме. Радијациона шема се може поставити искључиво за затворен систем површи, који се добија додавањем фиктивне површи која одговара амбијенту. На тај начин се добија радијациона шема са три чвора (грејач, екран, амбијент) приказана на слици (ε_a=1).



Вредности фактора виђења између појединих површи одређују се под претпоставком да су и екран и грејач довољно дугачки и да се ефекти крајева могу занемарити. Уколико је претходни услов испуњен, у радијационој шеми фигуришу само подужне вредности.

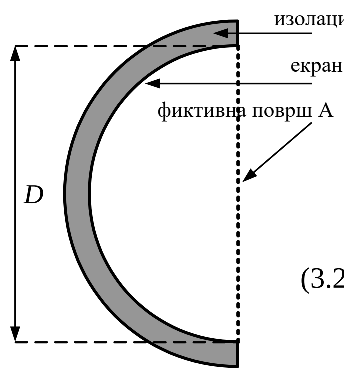
Због конвексности површи грејача, његов сопствени фактор виђења је једнак нули. Фактори виђења екрана и амбијента од стране грејача (F_{ge} и F_{ga}) су једнаки (пошто се и екран и амбијент из центра грејача виде под углом од 180 степени) и износе:

$$F_{ga} = F_{ge} = \frac{1}{2} \tag{3.24}$$

Фактор виђења грејача од стране екрана (иста вредност је за фактор виђења грејача од стране амбијента) износи:

$$F_{eg} = F_{ge} \cdot \frac{S_g}{S_e} = F_{ge} \cdot \frac{d \cdot \pi \cdot L}{\frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi \cdot L} = F_{ge} \cdot \frac{2 \cdot d}{D} = \frac{d}{D} = 0.1 \tag{3.25}$$

Сопствени фактор виђења екрана F_{ee} се може израчунати полазећи од $F_{ee} + F_{ea} + F_{eg} = 1$. Збир $F_{ea} + F_{eg}$ представља фактор виђења фиктивне површи А (за њега ће се у даљем тексту користити ознака F_{eA}), приказане на слици. Површ А је конвексна, из чега се закључује да је њен сопствени фактор виђења једнак нули и да сва снага емитована са А доспева на екран. На основу тога се закључује да је фактор виђења екрана од стране површи А једнак 1, из чега се одређују фактор виђења површи А од стране екрана и тражени сопствени фактор виђења екрана.



$$F_{eA} = F_{Ae} \cdot \frac{S_A}{S_e} = F_{Ae} \cdot \frac{D \cdot L}{\frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi \cdot L} = \frac{2}{\pi} \cdot F_{Ae} = \frac{2}{\pi} \tag{3.26}$$

$$F_{ee} = 1 - F_{eA} = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi} \approx 0.3634 \tag{3.27}$$

Фактор виђења амбијента од стране екрана добија се на следећи начин:

$$F_{ea} = 1 - F_{eg} - F_{ee} \approx 0.5366 \tag{3.28}$$

Пошто је задња површ екрана идеално топлотно изолована и занемарено струјање са екрана на ваздух, снага зрачења која се предаје екрану једнака је оној која се са њега емитује, из чега се закључује да је укупна снага која се размењује са екраном једнака нули. То за последицу има да је грана која представља површ екрана у радијационој шеми у прекиду. Укупан отпор у радијационој шеми између грејача и амбијента износи:

$$R_{zr\_uk} = \frac{1-\varepsilon_g}{\varepsilon_g \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi} \,\|\, \left(\frac{1}{F_{ge} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} D \cdot \pi} \right) = 36.219 \text{ m}^{-1} \tag{3.29}$$

Подужна снага којом се енергија односи са грејача једнака је подужној снази којом се топлота генерише у грејачу. На основу тога могуће је одредити температуру грејача:

$$\sigma_c \cdot T_g^4 - \sigma_c \cdot T_a^4 = R_{zr\_uk} \cdot q'_g \;\Rightarrow\; T_g = \sqrt[4]{\frac{R_{zr\_uk} \cdot q'_g}{\sigma_c} + T_a^4} = \sqrt[4]{\frac{R_{zr\_uk} \cdot P_g}{\sigma_c \cdot L_g} + T_a^4} = 947.47 \text{ K} \tag{3.30}$$

Подужна снага којом се топлота размењује између екрана и амбијента износи

$$q'_{ea} = q'_g \cdot \frac{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi}}{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ge} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} D \cdot \pi}} = \frac{P_g}{L_g} \cdot \frac{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi}}{\frac{1}{F_{ga} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ge} \cdot d \cdot \pi} + \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} D \cdot \pi}} = 571.73 \ \frac{\mathrm{W}}{m}, \tag{3.31}$$

Температура екрана ($q_e' = 0$, ε_a=1) добија се такође из радијационе шеме:

$$\sigma_c \cdot T_e^4 - \sigma_c \cdot T_a^4 = \frac{1}{F_{ea} \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi} \cdot q'_{ea} \ \Rightarrow \ T_e = \sqrt[4]{\frac{q'_{ea}}{\sigma_c \cdot F_{ea} \cdot \frac{1}{2} \cdot D \cdot \pi} + T_a^4} = 597 \ \mathrm{K} \tag{3.32}$$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

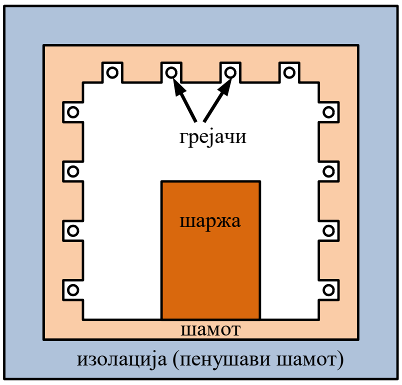
Први колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 150 минута
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

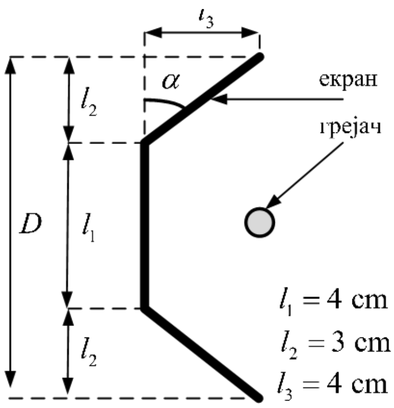
1. Посматрајмо једножилни кабл спољњег пречника 7cm, постављен у земљу. Потребно је одредити пораст температуре спољашње површи изолације кабла у односу на температуру околине, односно процентуалну промену овог пораста температуре за два случаја, када се усвоји да је пречник референтног цилиндра, чија је температура једнака температури амбијента: а) 10 пута, б) 20 пута, већа од пречника кабла. Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\,\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\vec{i}_z$. /2.5 поена/

2. Једна равна вертикална површ се налази на температури а) ϑ_1 = 200 °C, б) ϑ_2 = 900 °C, при чему температура амбијента износи ϑ_a = 20 °C. Коефицијент сивоће плоче износи ε = 0.8., а њена површина 1m^2. У једном случају плоча се хлади природним струјањем ваздуха, при чему се коефицијент прелака топлоте мења по законитости $\alpha_1(\theta) = 7\cdot(\theta/100)^{0.25}$; θ представља разлику температуре плоче и ваздуха. У другом случају принудним струјањем ваздуха, при чему коефицијент преласка топлоте са плоче на ваздух износи α_2=25W/(m^{2}K). Одредити снагу преноса топлоте са површи посматране плоче за четири случаја: за сваку од две наведене температуре при сваком од два наведена начина хлађења. /2.5 поена/

3. Електроотпорна коморна пећ са индиректним загревањем, инсталисане снаге P_n=5kW, састоји се из два слоја: унутрашњег, који носи електроотпорни извор топлоте и кога карактерише велики топлотни капацитет и велика топлотна проводност, и спољашњег, топлотно изолационог, кога карактерише мали топлотни капацитет и мала топлотна проводност. Пораст температуре унутрашњости пећи (пећ је празна и њена снага износи 4 kW) у устаљеном стању износи 1600 K, а после прва два часа рада 800 K. У празну пећ, која се налази на температури амбијента, убацује се челични комад масе 200 kg (специфични топлотни капацитет челика износи 0.48 kJ/(kg K)). Пећ поседује регулатор температуре који а) подешава вредност напона на грејачима тако да се температура одржава на жељеној вредности и б) укључује грејач на номинални напон уколико температура пећи постане мања од жељене за 5 степени, а искључује га уколико температура пећи постане већа од жељене за 5 степени. Колико износи средња снага губитака енергије у устаљеном стању у ова два случаја уколико задата температура износи 700^{o}C, а температура амбијента 20^{o}C? /3 поена/



4. Да би се постигла боља усмереност зрачења штапног грејача, иза дугачаког цилиндричног грејача дужине L=80 cm, пречника d=1 cm и снаге 1 kW поставља се екран чије су облик и димензије приказани на слици. Спољашња површ екрана је идеално топлотно изолована. Уколико је температура амбијента 20^{o}C, одредити температуре грејача и екрана. Занемарити пренос топлоте струјањем са екрана и грејача на ваздух и ефекте крајева. Емисивности површи грејача и екрана износе 0.95, односно 0.2, респективно. Колико би се промениле тражене температуре ако би емисивност екрана износила 0.3? /3 поена/



ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Други колоквијум (први термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

Колоквијум траје максимално 150 минута 27. 12. 2015.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Наћи опште решење диференцијалне једначине (промена температуре по дужини кабла) за једножилни кабл дужине L, кружног попречног пресека електропроводног дела (топлотна проводност материјала λ_p, пречник D) S, у коме се генеришу губици по јединици дужине кабла P_L; дебљина изолације кабла износи δ, топлотна проводност материјала изолације λ_i, а коефицијент преласка топлоте струјањем са површи изолације на ваздух, температуре ϑ_a, α. Поставити граничне услове из којих се могу одредити интеграционе константе за случај да је кабл на оба своја краја прикључен на сабирнице, за које се може сматрати да имају фиксну температуру ϑ_S. 3 поена

2. Одредити дозвољену једносекундну једносмерну струју кратког споја (I_{1sdoz}) проводника од бакра/алуминијума површине попречног пресека 95 mm^2 ако је максимална дозвољена температура изолације 180 °C, а кратак спој настаје при номиналном оптерећењу (температура 100°C). Температура амбијента износи 30°C. Познате су карактеристике бакра/алуминијума: c_{Cu} /c_{Al}=385/903 J/(kg ^{0}C), ρ_{Cu}/ρ_{Al}=8933/2702 kg/m^3, специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\,Cu}$/$\sigma_{20\,Al}$ =56/37.7×10^6 S / m и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром α_{Cu20}/α_{Al20} =4.29/3.86×10^{-3}°C^{-1}. При прорачуну сматрати да је термички процес по настанку кратког споја адијабатски. При прорачуну снаге генерисања топлоте узети у обзир температурну промену електричне проводности; може се сматрати да струја кратког споја има константну вредност. 3 поена

3. Описати типски (према стандардима) оглед загревања енергетског уљног трансформатора. 2.5 поена

4. Извести израз за снагу хлађења преко размењивача топлоте између два флуида. Која су 4 "природна параметра" која се специфицирају у каталогу, која описују радни режим хладњака при коме се има номинална расхладна снага хладњака? 2.5 поена

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

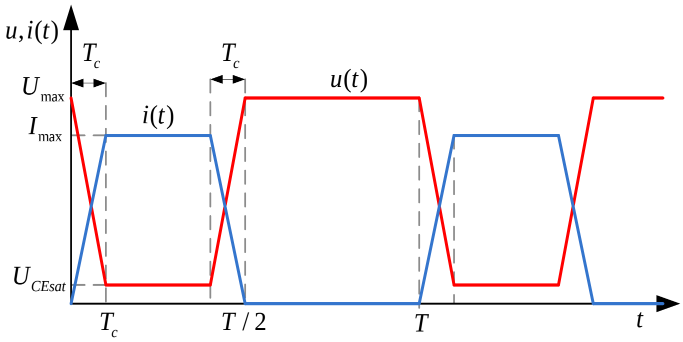
Катедра за енергетске претвараче и погоне

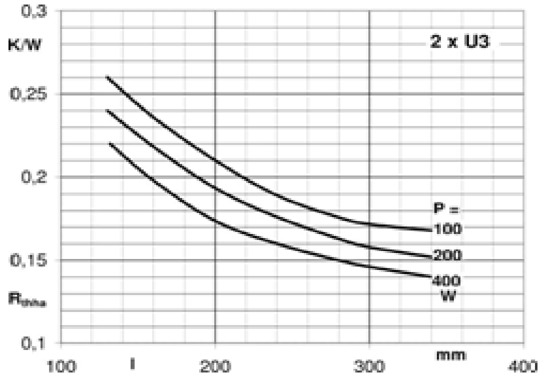
Други колоквијум (други термин) из предмета Термички процеси у електроенергетици

Колоквијум траје максимално 150 минута 23. 01. 2016.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Јако дугачак једножилни кабл прикључен је на сабирнице чија је температура позната и износи ϑ_S. Наћи расподелу температуре дуж кабла за случај да је кабл кружног попречног пресека електропроводног дела (топлотна проводност материјала λ_p, пречника D и површине S) и да се у њему генеришу губици по јединици дужине кабла P_L. Дебљина изолације кабла износи δ, топлотна проводност материјала изолације λ_i, а коефицијент преласка топлоте струјањем са површи изолације на ваздух, температуре ϑ_a, α. Колико износи температура најтоплије тачке изолације? 3 поена

2. Напон и струја IGBT транзистора као елемента једног инвертора приказани су на слици $\left(U_{\max}=600\text{V}, I_{\max}=52\text{A}, T_c=2\mu\text{s}, T=0.2\text{ms}, U_{CEsat}=2\text{V}\right)$. Одредити температуру IGBT транзистора у устаљеном радном режиму, ако се за хлађење 2 транзистора користи хладњак дужине 200mm, чија карактеристика приказана на слици. Отпор провођењу топлоте кроз транзистор износи 0.4 K/W, а температура амбијента 25°C.





2.5 поена

3. Нацртати топлотну шему енергетског уљног трансформатора са три чвора (сваком од два намотаја је придружен по један чвор у топлотној шеми - чвор 1 и чвор 2) и објаснити њене елементе. Да ли се и због чега мењају губици у намотајима током прелазног топлотног процеса при константном релативном струјном оптерећењу K? Полазећи од дефиниције топлотног отпора (топлотне проводности) објаснити због чега се мења топлотна проводност између чвора 3 и референтног чвора, који се налази на температури амбијента (она се може сматрати константном), када се искључи половина вентилатора који су били у раду. 2.5 поена

4. Извести израз за снагу хлађења преко размењивача топлоте између два флуида. Објаснити механизме утицаја, односно рачунског уважавања пада притиска у активном делу трансформатора на проток уља и на коефицијент проласка топлоте кроз хладњак. Да ли ће се, и зашто, променити температуре уља ако се изврши замена уља у трансформатору? Због чега је неопходно периодично чишћење хладњака? 3 поена

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута 23.01.2016.
За сваки потпуно тачно урађени задатак се добија 2 поена
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Написати општу температурну једначину у правоугаоном координатном систему за случај хомогене нелинеарне топлопроводне средине.

2. Одредити фактор виђења дела лопте (површ 2) са површи 1. Површ 1 се може сматрати бесконачно малом.

3. Јако дугачак једножилни кабл прикључен је на сабирнице чија је температура позната и износи ϑ_S. Наћи расподелу температуре дуж кабла за случај да је кабл кружног попречног пресека електропроводног дела (топлотна проводност материјала λ_p, пречника D и површине S) и да се у њему генеришу губици по јединици дужине кабла P_L. Дебљина изолације кабла износи δ, топлотна проводност материјала изолације λ_i, а коефицијент преласка топлоте струјањем са површи изолације на ваздух, температуре ϑ_a, α. Колико износи температура најтоплије тачке изолације?

4. Нацртати топлотну шему енергетског уљног трансформатора са три чвора (сваком од два намотаја је придружен по један чвор у топлотној шеми - чвор 1 и чвор 2) и објаснити њене елементе. Да ли се и због чега мењају губици у намотајима током прелазног топлотног процеса при константном релативном струјном оптерећењу K? Полазећи од дефиниције топлотног отпора (топлотне проводности) објаснити због чега се мења топлотна проводност између чвора 3 и референтног чвора, који се налази на температури амбијента (она се може сматрати константном), када се искључи половина вентилатора који су били у раду.

5. Извести израз за снагу хлађења преко размењивача топлоте између два флуида. Објаснити механизме утицаја, односно рачунског уважавања пада притиска у активном делу трансформатора на проток уља и на коефицијент проласка топлоте кроз хладњак. Због чега је неопходно периодично чишћење хладњака?

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

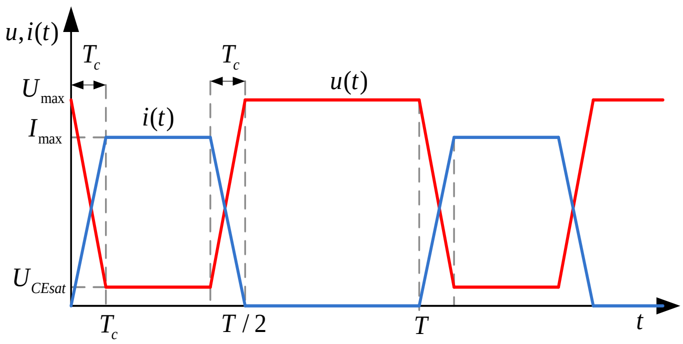
Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

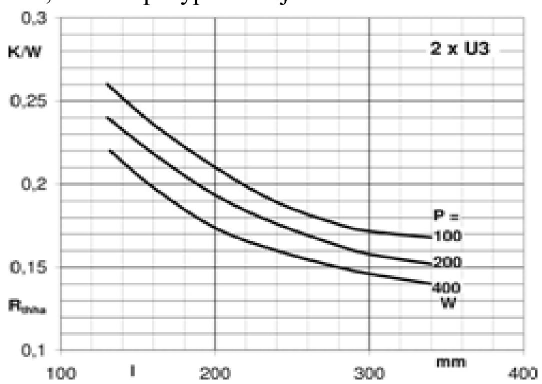
Испит траје максимално 180 минута 13.02.2016.
За сваки потпуно тачно урађени задатак се добија 2 поена
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Написати општу температурну једначину у правоугаоном координатном систему за случај стационарног топлотног процеса у хомогеној нелинеарној топлопроводној средини. Написати гранични услов за случај да се тело преко граничне површи хлади струјањем флуида температуре ϑ_f, при чему коефицијент преласка топлоте са површи тела на флуид износи α. Сматрати да су сви топлотни параметри познати.

2. Одредити фактор виђења малог диска 1 полупречника 5mm (који је много мањи од растојања a), са четвртине сфере 2.

3. Напон и струја IGBT транзистора као елемента једног инвертора приказани су на слици $\left(U_{\max} = 600\text{V}, I_{\max} = 52\text{A}, T_c = 2\mu\text{s}, T = 0.2\text{ms}, U_{CEsat} = 2\text{V}\right)$. Одредити температуру IGBT транзистора у устаљеном радном режиму, ако се за хлађење 2 транзистора користи хладњак дужине 200mm, чија карактеристика приказана на слици. Отпор провођењу топлоте кроз транзистор износи 0.4 K/W, а температура амбијента 25°C.





4. Нацртати топлотну шему двонамотајног енергетског уљног трансформатора са два чвора и објаснити њене елементе. На основу које претпоставке је усвојено да су оба намотаја репрезентују једним чвором? Да ли се и због чега мењају губици у намотајима током прелазног топлотног процеса при константном релативном струјном оптерећењу *K*? Полазећи од дефиниције топлотног отпора (топлотне проводности) објаснити због чега се мења топлотна проводност између чвора 2 (који репрезентује језгро, уље и суд) и референтног чвора, који се налази на температури амбијента (она се може сматрати константном), када се искључи половина вентилатора који су били у раду.

5. Извести израз за снагу хлађења преко елементарног размењивача топлоте између два флуида, са две паралелне цеви кроз које флуиди теку у истом смеру. Написати изразе из којих се може проценити смањење коефицијента проласка топлоте у стању запрљаног хладњака, услед таложења материја на цеви кроз које протиче један од флуида, због чега долази и до смањења коефицијента проласка топлоте и до смањења протока тог флуида. Сматрати да су из каталога (номинални подаци) и из мерења (у погону запрљаног хладњака) доступни оба протока и све 4 температуре флуида.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

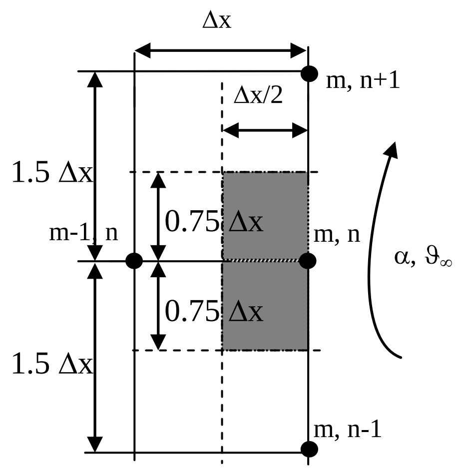
Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 180 минута септембар 2016.
За сваки потпуно тачно урађени задатак се добија 2 поена
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Написати температурну једначину за једнодимензиони пренос топлоте по координати полупречника у цилиндричном координатном систему за случај стационарног топлотног процеса у хомогеној нелинеарној топлопроводној средини. У једначини не смеју да фигуришу изводи чије је вредност једнака нули. Написати гранични услов за случај да се тело преко граничне површи (бесконачно дугачак цилиндар спољњег полупречника R) хлади струјањем флуида температуре ϑ_f, при чему коефицијент преласка топлоте са површи тела на флуид износи α. Сматрати да су сви топлотни параметри познати. Општа температурне једначине у цилиндричном координатном систему гласи $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)+q_v=\rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$.

2. Одредити фактор виђења малог диска 1 полупречника 5mm (који је много мањи од растојања a), са четвртине сфере 2.

3. Написати изразе енергетског биланса из којих се изводе изрази за имплицитну методу коначних елемената за осенчени елемент топлопроводне средине на слици, са усвојеном карактеристичном тачком m, n. Сматрати да су познати сви подаци о карактеристикама материјала топлопроводне средине, запреминска густина константног генерисања топлоте по запремини q_v, као и коефицијент преласка топлоте струјањем α са тела на околни флуид температуре ϑ_∞.



4. Нацртати топлотну шему двонамотајног енергетског уљног трансформатора са три чвора (сваки од намотаја се представља једним чвором) и објаснити њене елементе. На основу које претпоставке се топлотна шема са три чвора може свести на топлотну шему са два чвора, односно да се оба намотаја репрезентују једним чвором? Да ли се и због чега мењају губици у намотајима током прелазног топлотног процеса при константном релативном струјном оптерећењу K? Полазећи од дефиниције топлотног отпора (топлотне проводности) објаснити због чега се мења топлотна проводност између чвора 2 (који репрезентује језгро, уље и суд) и референтног чвора, који се налази на температури амбијента (она се може сматрати константном), када се искључи половина вентилатора који су били у раду.

5. Дати прецизну дефиницију топлотног отпора између две изотемичке површи чврстог тела.

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Термички процеси у електроенергетици

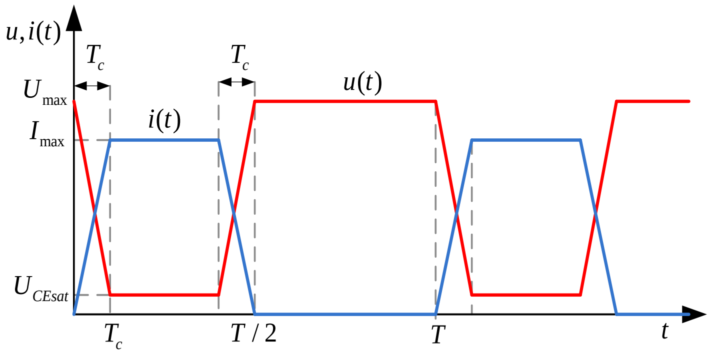
Испит траје максимално 180 минута октобар 2016.
За сваки потпуно тачно урађени задатак се добија 2 поена
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

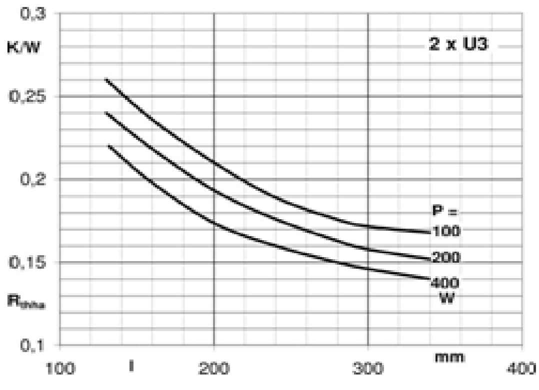
1. Написати температурну једначину за једнодимензиони пренос топлоте по координати полупречника у сферном координатном систему за случај стационарног топлотног процеса у хомогеној нелинеарној топлопроводној средини. У једначини не смеју да фигуришу изводи чије је вредност једнака нули. Написати гранични услов за случај да се тело преко граничне површи (сфера спољњег полупречника R) хлади струјањем флуида температуре ϑ_f, при чему коефицијент преласка топлоте са површи тела на флуид износи α. Сматрати да су сви топлотни параметри познати. Општа температурне једначине у сферном координатном систему гласи

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r^2\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\sin\theta\frac{\partial\vartheta}{\partial\theta}\right)+q_v=\rho c_p\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$

2. Одредити фактор виђења малог диска 1 полупречника 5mm (који је много мањи од растојања a), са четвртине сфере 2.

3. Напон и струја IGBT транзистора као елемента једног инвертора су приказани су на слици $\left(U_{\max}=600\text{V}, I_{\max}=52\text{A}, T_c=2\mu\text{s}, T=0.2\text{ms}, U_{CEsat}=2\text{V}\right)$. Одредити температуру IGBT транзистора у устаљеном радном режиму, ако се за његово хлађење користи хладњак дужине 200mm, чија карактеристика приказана на слици. За хлађење IGBT транзистора се користе два хладњака, тако да се по једном хладњаку одводи половима снаге губитака. Отпор провођењу топлоте кроз транзистор износи 0.4 K/W, а температура амбијента 25°C.





4. Описати оглед загревања према стандарду IEC 60076-2. Због чега је неопходно применити поступак екстраполације криве промене отпорности намотаја након искључења напајања по истеку другог дела огледа загревања?

5. Дефинисати Biot-ов број. Коју информацију даје Biot-ов број и која је његова примена?

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

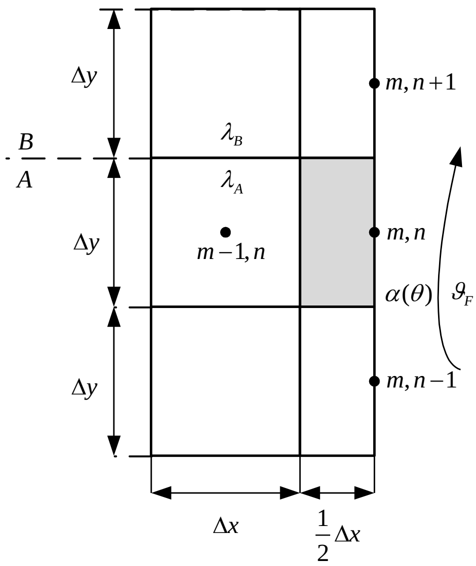
Катедра за енергетске претвараче и погоне

Први колоквијум из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 150 минута
Укупан број поена износи 11 3. 12. 2016.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Дати прецизну дефиницију топлотног отпора између површи чврстог тела и флуида. Топлота се преноси провођењем кроз чврсто тело и струјањем са површи чврстог тела на флуид (α) (1 поен). Извести израз за топлотни отпор између унутрашње површи сферног тела (температуре ϑ_u и полупречника унутрашње лопте r_u) и флуида (температуре ϑ_f) којим се хлади спољашња сферна површ сферног тела (полупречник спољашње лопте r_s). Топлотна проводност материјала од кога је сачињено тело износи λ (1.5 поена). Колико износи температура спољашње сферне површи (ϑ_s) (0.5 поена)? Израз за градијент у сферном координатном систему:

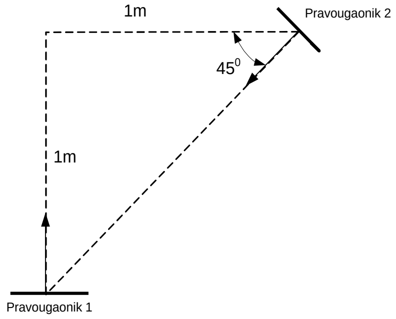
$$grad\,\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r\cdot\sin\theta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi$$



2. Написати једначину енергетског биланса из које се изводи једначина за експлицитну методу коначних елемената за осенчени елемент топлопроводне средине на слици. Посматрани елемент се налази уз граничну површ два материјала A и B различитих специфичних топлотних проводности (λ_A и λ_B), при чему запреминска густина снаге генерисања топлоте у материјалу A износи q_{vA}. Десна гранична површ елемента се хлади природним струјањем флуида температуре ϑ_F, при чему коефицијент преноса топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи (ϑ_p) и флуида ($\theta=\vartheta_p$-ϑ_F) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0}\cdot(|\theta|/20)^{0.25}$. Температура граничне површи (ϑ_p) се одређује као средња вредност температура на граничној површи према флуиду (дискретизација је извршена тако да је висина сваког од делова уз граничну површ иста (Δy); укупна висина површи у додиру са флуидом је једнака $H=N\ \Delta y$). (2.5 поена)
Сматрати да су познати сви подаци о карактеристикама материјала топлопроводне средине, као и температура флуида, као и константа α_{v0}.

3. Вода у бојлеру запремине 80 литара са грејачем снаге 2 kW се загреје са 20 ^{0}C на 75 ^{0}C за 175 минута. Посматрати следећу ситуацију: вода се загреје на 75 ^{0}C, после чега се грејач искључи и остаје трајно искључен. У истом тренутку из бојлера се источи 10 литара мешевине топле и хладне воде (температура хладне воде износи 20 ^{0}C), температуре 55 ^{0}C. После тога нема даље потрошње воде. После ког времена ће температура воде у бојлеру да опадне на 50 ^{0}C? Сматрати да је температура амбијента 20 ^{0}C и да је снага преноса топлоте од воде ка амбијенту сразмерна разлици температуре воде и амбијента. Густина воде износи ρ_v = 1000 kg/m^3, специфични топлотни капацитет воде c_{pv} = 4200 J/(kgK), специфични топлотни капацитет металног казана c_{pk} = 474 J/(kg K), а његова тежина c_{pk} = 20 kg. Топлотни капацитет изолације се може занемарити. (3 поена)

4. Посматрајмо два мала правоугаоника (1 – површи 3 cm^2 и 2 – површи 1 cm^2) која се у почетном положају налазе наспрамно у паралелним равнима на растојању 1 m. Означимо снагу преноса топлоте од површи 1 ка површи 2 у овом случају са P_1. Правоугаоник 2 се помери транслаторно за 1 m паралелно дужој страници, а затим ротира тако да нормале на површи, усмерене од стране површи која зрачи, заклапају угао од 135^0 (ситуација приказана на слици). На које растојање од правоугаоника 2 треба транслаторно по правцу који спаја правоугаонике 1 и 2 померити правоугаоник 1 да би се снага која пада на површ 2 изједначила са снагом P_1? Одредити ово растојање и за случај да се пре транслаторног померања изврши ротација правоугаоника 1 тако да он буде паралелан правоугаонику 2. (2.5 поена)



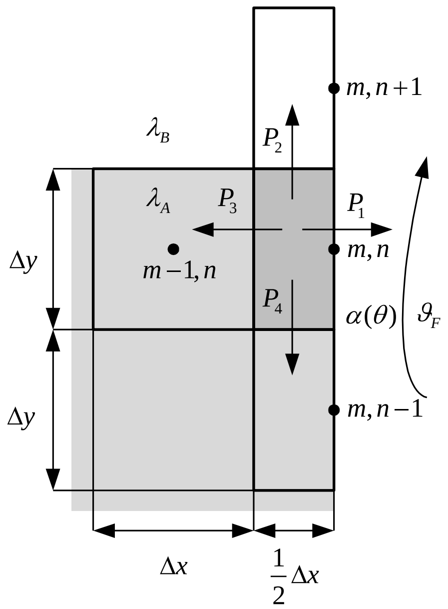
Решења задатака

1. задатак

$$\mathrm{R}^T=\frac{\vartheta_u-\vartheta_f}{q}=R_p^T+R_s^T=\frac{1}{4\cdot\pi\cdot\lambda}\cdot\left(\frac{1}{r_u}-\frac{1}{r_s}\right)+\frac{1}{4\cdot\pi\cdot r_s^2\cdot\alpha}$$

$$\vartheta_s=\vartheta_u-R_p^T\cdot q=\vartheta_u-R_p^T\cdot\frac{\vartheta_u-\vartheta_f}{R_p^T+R_s^T}$$

2. задатак



Једначина по методи коначних елемената за посматрани елемент изводи се из једначине биланса снага за тај елемент, која гласи:

$$P_{gen}=P_{akum}+P_{prenosa} \tag{1.1}$$

P_{gen} - снага којом се топлотна енергија генерише у посматраном елементу
P_{akum} – снага којом се топлотна енергија акумулише у посматраном елементу
$P_{prenosa}$ – снага којом се топлотна енергија преноси од посматраног елемента ка околини
Снага којом се топлотна енергија преноси од посматраног елемента ка околини једнака је суми снага којима се енергија преноси ка сваком од суседних елемената (P_2- P_4) и ка расхладном флуиду (P_1); одговарајуће снаге означене су на слици:

$$P_{prenosa}=P_1+P_2+P_3+P_4 \tag{1.2}$$

Снага којом се топлотна енергија преноси струјањем на флуид износи:

$$P_1=\frac{\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_F}{\dfrac{1}{\alpha(\theta)\cdot S_F}}=\alpha(\theta)\cdot S_F\cdot(\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_F)=\frac{\alpha_{v0}\cdot\Delta y\cdot L}{20^{0.25}}\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}\vartheta_{m,i}^p}{N}-\vartheta_F\right)^{0.25}\cdot(\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_F) \tag{1.3}$$

$\vartheta_{m,n}{}^p$ – температура елемента на позицији са индексима m и n, у тренутку са индексом p.
Снаге којима се топлотна енергија преноси ка суседним елементима дате су следећим изразима:

$$P_2=\frac{\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_{m,n+1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta y/2}{\Delta x/2\cdot L}+\dfrac{1}{\lambda_B}\dfrac{\Delta y/2}{\Delta x/2\cdot L}}=\frac{\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_{m,n+1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta y}{\Delta x\cdot L}+\dfrac{1}{\lambda_B}\dfrac{\Delta y}{\Delta x\cdot L}}=\frac{\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_{m,n+1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}+\dfrac{1}{\lambda_B}}\cdot\frac{\Delta x\cdot L}{\Delta y} \tag{1.4}$$

$$P_3=\frac{\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_{m-1,n}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta x}{\Delta y\cdot L}}=(\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_{m-1,n}^p)\cdot\lambda_A\cdot\frac{\Delta y\cdot L}{\Delta y} \tag{1.5}$$

$$P_4=\frac{\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_{m,n-1}^p}{\dfrac{1}{\lambda_A}\dfrac{\Delta y}{\Delta x/2\cdot L}}=(\vartheta_{m,n}^p-\vartheta_{m,n-1}^p)\cdot\lambda_A\cdot\frac{\Delta x\cdot L}{2\cdot\Delta y} \tag{1.6}$$

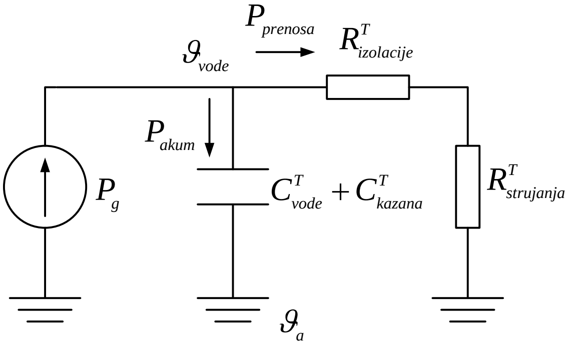
Снаге којима се топлота генерише (по услову задатка q_v=0) и акумулише у посматраном елементу износе:

$$P_{gen} = q_V \cdot V_{m,n} = q_V \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \tag{1.7}$$

$$P_{akum} = C_{m,n}^T \cdot \frac{\partial \vartheta_{m,n}}{\partial t} \approx C_{m,n}^T \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \tag{1.8}$$

<u>3. задатак</u>

Топлотна шема која описује наведени проблем:



Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 345.48 \text{ kJ/K}$$

Промена пораста температуре воде у бојлеру у односу на амбијент описана је следећом диференцијалном једначином:

$$C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} = P_g$$

Срећивање једначине се добија:

$$R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R^T \cdot P_g$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g$$

где је са τ означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T \cdot C^T$$

Решење диференцијалне једначине гласи:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

θ_0 - пораст температуре воде у тренутку t=0

θ_{stac} - пораст температуре воде у устаљеном стању које би наступило када би загревање трајало неограничено дуго.

У посматраном случају загревања воде са 20°C на 75 °C, величине које фигуришу у претходном изразу износе:

$$\theta_0 = 0\text{K}$$

$$\theta_{stac} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g$$

Заменом претходне две вредности у израз за промену температуре и посматрањем тренутка у коме вода достиже температуру 75 °C (тренутак у коме се грејач искључује – 175 минута након почетка загревања), може се одредити временска константа загревања, а потом из ње и топлотни отпор према амбијенту.

$$\theta(t^*) = \theta^* = 55\text{K} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}})$$

Претходна једначина је трансцедентна по τ и може се решити итеративним поступком:

$$\tau_{k+1} = \frac{C^T \cdot \theta^*}{P_g \cdot (1 - \exp(-\frac{t^*}{\tau_k}))}$$

Узимањем почетног погађања τ=3h, након довољног броја итерација добија се приближна вредност временске константе:

$$\tau = 14.333\text{h}$$

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешевине топле и хладне воде температуре 55 ^{0}C:

Енергија коју треба довести (позитиван број) / одвести (негативан број) телу чији топлотни капацитет износи C^T да би јој се температура променила са ϑ_p на ϑ:

$$Q = C^T \cdot (\vartheta - \vartheta_p)$$

За води запремине V, топлотни капацитет износи

$$C^T = \rho \cdot V \cdot c_p$$

(у приближним прорачунима се може сматрати да се ρ и c_p не мењају са температуром)

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешевине топле и хладне воде температуре 55 ^{0}C:

$$345.48\ \text{kJ/K} \cdot (75 - \vartheta_x) = 10^3\text{kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}\text{m}^3 \cdot 4200\,\text{kJ/(kg K)} \cdot (55-20)$$

$$\vartheta_x = 75 - \left(10^3\text{kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}\text{m}^3 \cdot 4200\,\text{kJ/(kg K)} \cdot (55-20)\right) / 345.48\ 10^3\text{J/K} = 70.74^0 C$$

Време хлађења воде са 70.74$^{\text{o}}$C на 50 $^{\text{o}}$C одређује се помоћу следећег израза (изведен у задатку 6 са рач. вежби):

$$t^* = \tau \cdot \ln\frac{\theta_0 - \theta_{stac}}{\theta^* - \theta_{stac}} = 14.333\text{h} \cdot \ln\frac{50.74 - 0}{30 - 0} = 7.53\text{h}$$

<u>4. задатак</u>

Површинска густина снаге зрачења са површи извора износи:

$$q_s = \varepsilon \cdot \sigma_c \cdot T^4$$

Јачина зрачења по јединици површине извора у правцу нормале на површ извора износи (видети задатак 18 из збирке):

$$I_{n,S} = \frac{q_s}{\pi} = \frac{\varepsilon \cdot \sigma_c \cdot T^4}{\pi}$$

Пошто идеално сиво тело зрачи дифузионо, јачина зрачења у произвољном правцу који са нормалом на површ извора заклапа угао φ, дата је следећим изразом:

$$I_{\varphi,S} = I_{n,S} \cdot \cos\varphi$$

Део снаге зрачења површи 1 која пада на површ 2 износи:

$$P_{1\to2} = I_{\varphi,S} \cdot S_1 \cdot \omega_{1\to2}$$

Са $\omega_{1\text{->}2}$ означен је просторни угао под којим се површ 2 види са површи 1, док је са φ означен угао између нормале на површ 1 и праве која повезује површи 1 и 2. Просторни угао $\omega_{1\text{->}2}$ дефинисан је следећим изразом:

$$\omega_{1\to2} = \frac{S_2 \cdot \cos\psi}{l_{12}^{\ 2}}$$

ψ – угао између нормале на површ 2 и праве која повезује површи 1 и 2

l_{12} – растојање између површи 1 и површи 2

У случају када се површи налазе једна наспрам друге на растојању $l_{12}^{(1)}$=1m, снага зрачења површи 1 која пада на површ 2 износи:

$$P_{1\to2} = I_{\text{n},S} \cdot \cos 0 \cdot S_1 \cdot \frac{S_2 \cdot \cos 0}{l_{12}^{(1)2}} = \frac{I_{\text{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(1)2}}$$

Након што се површ 2 помери и заротира, а површ 1 приближи површи 2 на растојање $l_{12}^{(2)}$, снага зрачења површи 1 која пада на површ 2 износи:

$$P_{1\to2} = I_{\text{n},S} \cdot \cos 45^{\text{o}} \cdot S_1 \cdot \frac{S_2 \cdot \cos 0}{l_{12}^{(2)2}} = \frac{I_{\text{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(2)2}\sqrt{2}}$$

Да би снага зрачења у оба случаја имала исту вредност, растојање између површи у 2. случају мора бити:

$$\frac{I_{\mathrm{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(1)2}} = \frac{I_{\mathrm{n},S} \cdot S_1 \cdot S_2}{l_{12}^{(2)2}\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; l_{12}^{(2)} = \frac{l_{12}^{(1)}}{\sqrt[4]{2}} = 0.841\ \mathrm{m}$$

Случај да се пре транслаторног померања изврши ротација правоугаоника 1 тако да он буде паралелан правоугаонику 2:

$$l_{12}^{(3)} = l_{12}^{(1)} = 1\ \mathrm{m}$$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

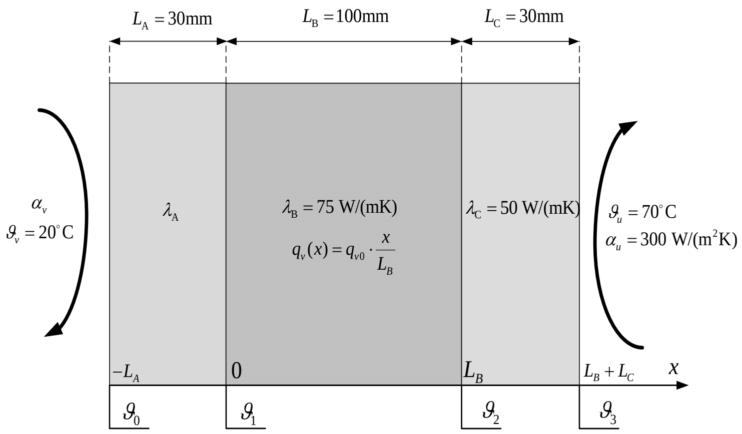
Први колоквијум из предмета Термички процеси у електроенергетици

Испит траје максимално 150 минута
Укупан број поена износи 11 26. 12. 2016.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала A, B и C. У слоју B се по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v(x) = q_{v0} \cdot \dfrac{x}{L_B}$ $\left(q_{v0} = 200 \cdot 10^3\ \mathrm{W/m^3}\right)$.

Специфична топлотна проводност слоја A зависи од температуре:

$\lambda_A = \lambda_{A0}(1 + b \cdot (\vartheta - \vartheta_r)),\ b = 0.005,\ \lambda_{A0} = 50\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}},\ \vartheta_r = 20°C.$



Гранична површ слоја A се је у додиру са водом температуре $\vartheta_v = 20^\mathrm{o}\mathrm{C}$, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ($\theta = \vartheta_0 - \vartheta_v$): $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta| / 20)^{0.25}$ $\left(\alpha_{v0} = 1000\ \mathrm{W/(m^2K)}\right)$. Гранична површ слоја C је у додиру са уљем температуре $\vartheta_u = 70^\mathrm{o}\mathrm{C}$, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем износи $\alpha_u = 300\ \mathrm{W/(m^2K)}$. Одредити температуре граничних површи (ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3) и максималну температуру слоја B. (3 поена)

2. Полазећи од опште форме температурне једначине у цилиндричном координатном систему

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

написати израз за случај стационарног топлотног стања у хомогеној линеарној топлопроводној средини, у којој се температура не мења по координати z. Форма израза не сме да садржи елементе чија је вредност нула. Поред тога, израз не сме да садржи извод производа величина. (2.5 поена)

3. Посматрајмо трофазни суви енергетски трансформатор чије су фазе постављене у исту раван. Трансформатор се хлади ваздухом температуре ϑ_a. Да би се обезбедило да температуре све три фазе буду исте, неопходно је да конструкција средње фазе и две крајње фазе буду различите. Колико износе снаге хлађења са спољних површи средишње фазе (q_1) и крајњих фаза (q_2). Познат је пречник намотаја (D), висина намотаја (H), коефицијент преласка топлоте са површи намотаја на ваздух (α), фактор виђења између две фазе (F_{12}), коефицијент сивоће спољне површи намотаја (ε) и његова температура ϑ_p (температура све три фазе је иста). (3 поена)

4. Једна коцка познатих димензија, направљена од хомогеног материјала познатих топлотних карактеристика, загрева се равномерно по запремини познатом запреминском густином снаге (q_v). Десна вертикална површ је идеално изолована од околине. Коефицијенти преласка топлоте струјањем са горње површи (α_g), доње површи (α_d) и остале три вертикалне површи (α_z) на околни флуид температуре ϑ_f су познати. Запремина је подељена на 11^3 делова, насталих поделом коцке по свакој од оса на 11 делова (9 идентичних делова и 2 дела уз граничне површи чија је ширина једнака половини осталих 9 делова). Написати једначину по експлицитној методи коначних елемената за део коцке који се налази у центру десне вертикалне површи (тачка 11, 6, 6) – суседни делови овом делу су: по x оси, (10, 6, 6), по y оси (11, 5, 6) и (11, 7, 6) и по z оси (11, 6, 5) и (11, 6, 7). Једначину написати за нестационарни топлотни процес. Тачке које репрезентују делове усвојити тако да буду еквидистантне, при чему се прва и последња (11-та) тачка по свакој од оса налазе на граничним површима. Једначину није потребно срећивати у смислу увођења *Fourier*-овог и *Biot*-овог број (2.5 поена)

Решења задатака:

<u>1. задатак</u>

Површинска густина снаге којом се топлота генерише у области B добија се интеграцијом запреминске густине снаге по линијској координати области:

$$q_{genB} = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x)\cdot dx = \frac{q_{v0}}{2L_B}(L_B^2 - 0) = \frac{q_{v0}\cdot L_B}{2} \tag{1.1}$$

Означимо са q_{gl} површинску густину снаге којом се топлота преноси са уља на зид. Ова вредност је непозната - није познат ни њен смер ни алгебарска вредност.

Површинска густина снаге којом се топлота преноси од области B ка области A, и даље ка води, једнака је збиру површинске густине снаге којом се топлота генерише у области B и површинске густине снаге којом се топлота преноси са уља на зид.

$$q_{B\to A} = q_{genB} + q_{gl} = \frac{q_{v0}\cdot L_B}{2} + q_{gl} \tag{1.2}$$

С обзиром да се посматра устаљено стање, без генерисања топлоте у области A, целокупна површинска густина снаге која се из области B пренесе ка области A се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура ϑ_0 ($\theta = \vartheta_0 - \vartheta_v$):

$$q_{strujanja\_v} = q_{B\to A} = \alpha_v(\theta)\cdot\theta = \frac{\alpha_{v0}}{20^{0.25}}\cdot\theta^{1.25} \tag{1.3}$$

Површинска густина снаге којом се топлотна енергија преноси кроз област A иста је у свим њеним пресецима, односно независна је од *x* координате. Површинска густина снаге која се преноси кроз област A може се израчунати као

$$q_{B\to A} = \lambda_A(\vartheta)\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x} \tag{1.4}$$

Температура због симетрије зависи само од x координате, те и топлотна проводност (која је функција температуре) и парцијални извод температуре по x координати зависе само од x координате, што значи да су ове величине константне на површи по којој се врши интеграција и да могу изаћи испред знака интеграла.

Решавањем диференцијалне једначине (1.4), уз замену израза за топлотну проводност датог у поставци задатка, добија се расподела температуре у области A.

$$\begin{aligned}
&q_{B\to A}\cdot dx = \lambda_A(\vartheta)\cdot d\vartheta \;\Rightarrow\; \int_{x=-L_A}^{0} q_{B\to A}\cdot dx = \int_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta_1}\lambda_A(\vartheta)\cdot d\vartheta \;\Rightarrow\\
&\int_{x=-L_A}^{0}\left(\frac{q_{v0}\cdot L_B}{2}+q_{gl}\right)\cdot dx = \int_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta_1}\lambda_{A0}\cdot(1+b(\vartheta-\vartheta_r))\cdot d\vartheta \;\Rightarrow\\
&\int_{x=-L_A}^{0}\left(\frac{q_{v0}\cdot L_B}{2}+q_{gl}\right)\cdot dx = \lambda_{A0}\cdot\int_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta_1}d\vartheta + \lambda_{A0}\cdot\int_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta_1}b(\vartheta-\vartheta_r)\cdot d\vartheta \;\Rightarrow\\
&\int_{x=-L_A}^{0}\left(\frac{q_{v0}\cdot L_B}{2}+q_{gl}\right)\cdot dx = \lambda_{A0}\cdot(\vartheta_1-\vartheta_0) + \lambda_{A0}\cdot b\cdot\int_{\vartheta=\vartheta_0-\vartheta_r}^{\vartheta_1-\vartheta_r} t\cdot dt \;\Rightarrow\\
&\left(\frac{q_{v0}\cdot L_B}{2}+q_{gl}\right)\cdot L_A = \lambda_{A0}\cdot(\vartheta_1-\vartheta_0) + \lambda_{A0}\cdot\frac{b}{2}\cdot\left((\vartheta_1-\vartheta_r)^2-(\vartheta_0-\vartheta_r)^2\right) \;\Rightarrow\\
&\left(\frac{q_{v0}\cdot L_B}{2}+q_{gl}\right)\cdot L_A = \lambda_{A0}\cdot\left((\vartheta_1-\vartheta_0) + b\frac{(\vartheta_1-\vartheta_r)^2}{2} - b\frac{(\vartheta_0-\vartheta_r)^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Расподела температуре у области B добија се решавањем опште температурне једначине која за поменуту област има следећи облик:

$$\lambda_B\cdot\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\frac{q_v(x)}{\lambda_B} = -\frac{q_{v0}\cdot x}{\lambda_B\cdot L_B} \tag{1.7}$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_{v0}\cdot x^3}{6\cdot\lambda_B\cdot L_B} + C_1\cdot x + C_2 \tag{1.8}$$

Интеграционе константе које фигуришу у (1.5) могу се одредити из граничних услова за десну граничну површ слоја B.

$$\begin{aligned} &\vartheta(x = L_B) = \vartheta_2 \\ &-\lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(x = L_B) \cdot S = -q_{gl} \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} &\vartheta(x = L_B) = -\frac{q_{v0} \cdot L_B{}^2}{6 \cdot \lambda_B} + C_1 \cdot L_B + C_2 \\ &-\lambda_B \cdot \left(-\frac{q_{v0} \cdot L_B}{2 \cdot \lambda_B} + C_1 \right) = -q_{gl} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Температура ϑ_1 се може одредити као

$$\vartheta_1 = \vartheta(x = 0) = C_2 \tag{1.11}$$

Даље:

$$\vartheta_3 - \vartheta_2 = R_C^T \cdot q_{gl} \tag{1.12}$$

Услов:

$$q_{gl} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_u - \vartheta_3) \tag{1.13}$$

Број непознатих величина: 7 (ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, q_{gl}, C_1, C_2)

Број једначина: 7 ((1.3), (1.5), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13))

Mathcad програм:

Ulazni podaci:

$tu := 70 \qquad tv := 20$

$\alpha u := 300$

$\lambda B := 75 \qquad \lambda C := 50$

$LA := 0.03 \qquad LB := 0.1 \qquad LC := 0.03$

$$\alpha R(x) := 1000\left(\frac{x}{20}\right)^{0.25}$$

$\lambda A0 := 50 \qquad b := 0.005 \qquad tref := 20$

$$\lambda A(x) := \lambda A0 \cdot [1 + b\cdot(x - tref)]$$

$qv0 := 200000$

$$qv(x) := qv0\cdot\frac{x}{0.1}$$

Iz zakona prelaska toplote strujanjem na desnoj graničnoj površi:

$$t3(qgl) := tu - \frac{qgl}{\alpha u}$$

Iz zakona prenosa toplote provođenjem kroz sloj C:

$$t2(qgl) := t3(qgl) - \frac{LC}{\lambda C}\cdot qgl$$

Iz graničnih uslova za desnu graničnu površ sloja B
(nakon rešenja opšte temperaturne jednačine za sloj B):

$$C1(qgl) := \frac{\left(qv0\cdot\frac{LB}{2} + qgl\right)}{\lambda B}$$

$$C2(qgl) := \left(t2(qgl) - qv0\cdot\frac{LB^2}{6\cdot\lambda B}\right) - C1(qgl)\cdot LB$$

Iz rešenja opšte temperatutne jednačine za sloj B, za x=0

$$t1(qgl) := C2(qgl)$$

$qgl := 100($ $\quad t0 := 3($ Poč etna vrednost promenljivih koje se pojavljuju kao nepoznate u sistemu jednač ina
(qg1 - snaga prenosa toplote od ulja ka granič noj površ i sloja C)

Poč etak bloka u kome se reš ava sistem jednač ina

Given

$$\left(qv0\cdot\frac{LB}{2} + qgl\right)\cdot LA = \lambda A0\cdot\left[(t1(qgl) - t0) + \frac{b}{2}\cdot\left[(t1(qgl) - tref)^2 - (t0 - tref)^2\right]\right]$$

$$(t0 - tv)\cdot\alpha R(t0 - tv) = qv0\cdot\frac{LB}{2} + qgl$$

$$pom := Find(qgl, t0)$$

Kraj bloka u kome se reš ava sistem jednač ina

$$qgl := pom_0 \qquad t0 := pom_1 \qquad qv0\cdot\frac{LB}{2} = 1\times 10^4$$

$$pom = \begin{pmatrix} 2.262\times 10^3 \\ 33.523 \end{pmatrix}$$

$$(t0) = 33.523$$

Određ ivanje ostalih temperatura

$$t3(qgl) = 62.458$$

$$t2(qgl) = 61.101$$

$$C1(qgl) = 163.499$$

$$C2(qgl) = 40.307$$

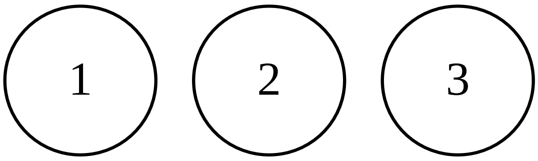
$$t1(qgl) = 40.307$$

2. задатак

$$\lambda\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\phi^2}\right)+q_v=0$$

3. задатак

Посматрајмо трофазни суви енергетски трансформатор чије су фазе постављене у исту раван. Трансформатор се хлади ваздухом температуре ϑ_a. Да би се обезбедило да температуре све три фазе буду исте, неопходно је да конструкција средње фазе и две крајње фазе буду различите. Колико износе снаге хлађења са спољних површи средишње фазе (q_1) и крајњих фаза (q_2). Познат је пречник намотаја (D), висина намотаја (H), коефицијент преласка топлоте са површи намотаја на ваздух (α), фактор виђења између две фазе (F_{12}), коефицијент сивоће спољне површи намотаја (ε) и његова температура ϑ_p (температура све три фазе је иста).



Означимо са F_{12} фактор виђења између две фазе. Фактори виђења између фазе 1 и амбијента, односно фазе 3 и амбијента износе

$$F_{1a}=F_{3a}=1-F_{12}$$

Фактор виђења између фазе 2 и амбијента износи

$$F_{2a}=1-2F_{12}$$

Ако претпоставимо да су температуре све три фазе приближно исте и једнаке (ϑ_p), до хлађења долази само између спољних површи намотаја и амбијента. Снаге преноса топлоте зрачењем и њихов однос:

$$q_{1az}=q_{3az}=\frac{\sigma_c\left(\left(\vartheta_p+273\right)^4-\left(\vartheta_a+273\right)^4\right)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S}+\frac{1}{F_{1a}S}\right)}$$

$$q_{2az}=\frac{\sigma_c\left(\left(\vartheta_p+273\right)^4-\left(\vartheta_a+273\right)^4\right)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S}+\frac{1}{\left(1-2F_{12}\right)S}\right)}$$

$$\frac{q_{1az}}{q_{2az}}=\frac{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S}+\frac{1}{\left(1-2F_{1a}\right)S}\right)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S}+\frac{1}{\left(1-F_{1a}\right)S}\right)}>1$$

$$S=\pi DL$$

Укупне снаге преноса топлоте са спољашње површи фазе 1 (и 3) и фазе 2:

$$q_{1auk} = q_{3az} = \frac{\sigma_c\left(\left(\vartheta_p + 273\right)^4 - \left(\vartheta_a + 273\right)^4\right)}{\frac{1}{\pi D L}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{F_{1a}}\right)} + \alpha \pi D L\left(\vartheta_p - \vartheta_a\right)$$

$$q_{2auk} = \frac{\sigma_c\left(\left(\vartheta_p + 273\right)^4 - \left(\vartheta_a + 273\right)^4\right)}{\frac{1}{\pi D L}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{\left(1-2F_{1a}\right)}\right)} + +\alpha \pi D L\left(\vartheta_p - \vartheta_a\right)$$

Коментар: при истој температури све три фазе, већа је снага којом се топлота која се ка околини зрачењем преноси са крајњих фаза него са средње фазе.

4. задатак

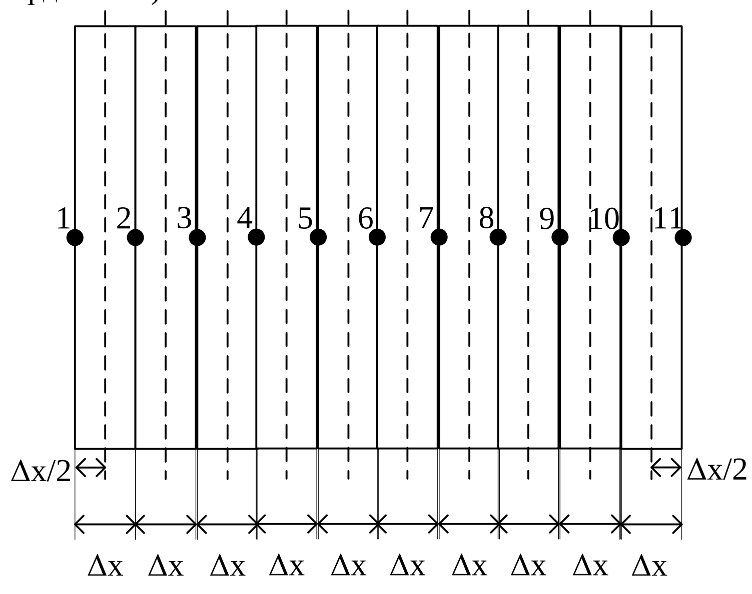
Једначина по методи коначних елемената за посматрани елемент изводи се из једначине биланса снага за тај елемент, која гласи:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa}$$

P_{gen} - снага којом се топлотна енергија генерише у посматраном елементу
P_{akum} – снага којом се топлотна енергија акумулише у посматраном елементу
$P_{prenosa}$ – снага којом се топлотна енергија преноси од посматраног елемента ка околини
Снага којом се топлотна енергија преноси од посматраног елемента ка околини једнака је суми снага којима се енергија преноси ка сваком од суседних елемената (P_1- P_5); десна страна коцке је идеално топлотно изолаована, па према њој нема преноса топлоте:

$$P_{prenosa} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$i = 6$, $j = 6$, $k = 6$
Подела топлопроводне и дефинисања тачака у којима се израчунавају температуре (приказ на поделу по координати x):



Снаге којима се топлотна енергија преноси ка суседном делу са истим y и z координатама:

$$P_1 = \frac{\vartheta_{i,j,k}^p - \vartheta_{i-1j,k}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z}}$$

Снаге којима се топлотна енергија преноси ка суседном делу са истим x и z координатама:

$$P_2 = \frac{\vartheta_{i,j,k}^p - \vartheta_{i,j-1,k}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{\Delta x / 2\,\Delta z}}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{i,j,k}^{p} - \vartheta_{i,j+1,k}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{\Delta x/2\,\Delta z}}$$

Снаге којима се топлотна енергија преноси ка суседном делу са истим x и y координатама:

$$P_4 = \frac{\vartheta_{i,j,k}^{p} - \vartheta_{i,j,k-1}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta z}{\Delta x/2\,\Delta y}}$$

$$P_5 = \frac{\vartheta_{i,j,k}^{p} - \vartheta_{i,j,k+1}^{p}}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta z}{\Delta x/2\,\Delta y}}$$

Снаге којима се топлота генерише (по услову задатка q_V=0) и акумулише у посматраном елементу износе:

$$P_{gen} = q_V \cdot V_{i,j,k} = q_V \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

$$P_{akum} = C_{i,j,k}^{T} \cdot \frac{\partial \vartheta_{m,n}}{\partial t} \approx C_{i,j,k}^{T} \cdot \frac{\vartheta_{i,j,k}^{p+1} - \vartheta_{i,j,k}^{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{i,j,k}^{p+1} - \vartheta_{i,j,k}^{p}}{\Delta t}$$