ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 23. 5. 2024.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

1. Кроз цев унутрашњег пречника D = 5 cm протиче вода температуре ϑ_v = 60°C. Површина спољне површи цеви и њеног оребрења по јединици дужине цеви износи S_l = 0,9 m^2/m. Коефицијент преласка топлоте са загрејане воде на унутрашњу површ цеви износи α_v = 65 (W/(m^2·K)), а са спољне стране оребрене цеви α_a = 5 (W/(m^2·K)). Колико износи снага преноса топлоте од воде ка амбијенту температуре ϑ_a = 20°C по јединици дужине цеви? Сматрати да је температура по запремини металне оребрене цеви константна. Занемарити прелазак топлоте зрачењем. (20П)

2. У бојлеру запремине 50 l налази се вода на температури амбијента ϑ_a = 20°C. Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача P_{gr} = 2 kW, маса казана m_k = 9,5 kg, површина казана (унутрашња површина топлотне изолације) S_u = 0,8 m^2, дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности λ = 0,1 W/(m·K), δ= 30 mm, спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације) S_s = 1 m^2. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи α_s = 5 W/(m^{2}K), а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан $\alpha_u \gg \alpha_s$. Густина воде износи ρ_v = 1000 kg/m^3, специфични топлотни капацитет воде c_{pv} = 4200 J/(kgK) и специфични топлотни капацитет казана c_{pk} = 474 J/(kgK). Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана израчунавати по формула за раван зид површине (S_u + S_s) / 2. Израчунати степен искоришћења, као однос акумулисане топлотне енергије и утрошене електричне енергије, током процеса загревања од почетне вредности, једнаке температури амбијента од 20°C, до 90°C. Сматрати да се у бојлеру током загревања не размењује вода. (25П)

3. На компоненту енергетске електронике у којој се генерише снага губитака P = 15 W ослоњена су два ребра за хлађење, свако дужине L = 300 mm, попречног пресека S = 100 mm^2 и обим O = 40 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре ϑ_a = 30°C износи α = 8 W/m^{2}K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи λ = 237 W/mK. Колико износи температура површи компоненте ослоњене на ребро?. При постављању граничног услова на базису ребра који се хлади сматрати да је снага која се преноси ка ваздуху једнака нули. Занемарити контактни топлотни отпор између компоненте и ребара за хлађење. (25П)

4. За елементарни облик размењивача топлоте који се састоји од унутрашње цеви кроз који струји хладна вода у истом смеру као и топло уље које струји кроз спољашњу цев, познати су номинални подаци: улазне и излазне температуре оба флуида ($\vartheta_{hv,n}$, $\vartheta_{tv,n}$, $\vartheta_{tu,n}$, $\vartheta_{hu,n}$) и проток оба флуида ($Q_{v,n}$, $Q_{u,n}$), као и номинална снага (P_n). Написати алгебарске једначине из којих се могу одредити температуре уља на уласку и изласку из размењивача, за случај да се коефицијент преласка топлоте због запрљања хладњака смањио за 10 %. Улазни параметри који остају исти: $\vartheta_{hv,n}$, Q_v, Q_u; снага преноса топлоте кроз хладњак остаје једнака P_n. Сматрати да се термички параметри флуида остају исти као при номиналној радној тачки. (30П)

5. Написати гранични услов на загрејаној површи тела које преко граничне површи хлади струјањем и зрачењем. Позната је емисивност површи ε и коефицијент преласка топлоте струјањем α са површи тела на амбијентални ваздух температуре ϑ_a. Површ тела се налази у слободном простору (температуре ϑ_a). (20П)

1. Задатак

Снага преноса топлоте са воде на ваздух по јединици дужине цеви износи

$$P_l = \frac{\vartheta_v - \vartheta_a}{R^T_{str,un} + R^T_{str,sp}} \tag{1.1}$$

Подужни топлотни отпор струјању са унутрашње стране цеви износи

$$R^T_{str,un} = \frac{1}{\alpha_v D\pi} \tag{1.2}$$

а са спољашње стране

$$R^T_{str,sp} = \frac{1}{\alpha_a S} \tag{1.3}$$

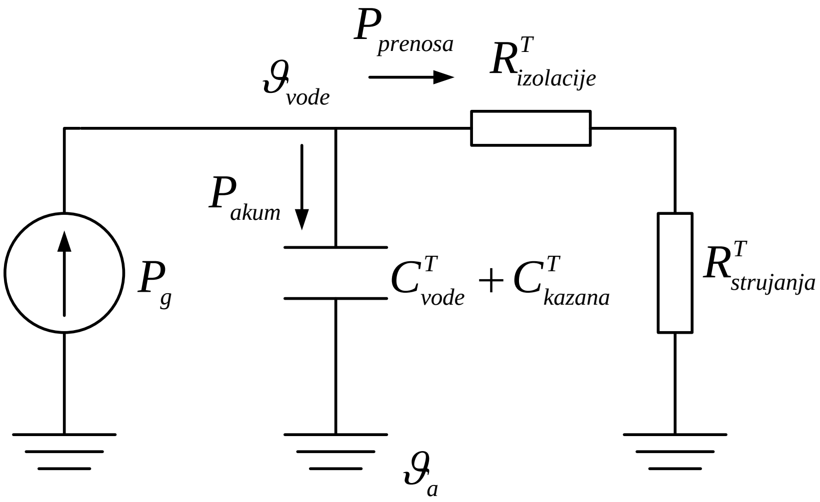
Заменом израза (1.2) и (1.3) у (1.1) добија се

$$P_l = \frac{\vartheta_v - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha_v D\pi} + \frac{1}{\alpha_a S}} = 124{,}94\ W \tag{1.4}$$

2. Задатак

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења: занемарен је отпор преношењу топлоте кроз воду, са воде на зид казана и кроз зид казана, као и топлотни капацитет изолације. Из наведених занемарења топлотних отпора следи да маса воде и зид бојлера представљају изотермичку запремину, чији је топлотни капацитет једнак збиру топлотних капацитета воде и казана.

Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на слици.



Слика 2.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C^T_{kazana} + C^T_{vode} = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214{,}5\ \text{kJ/K} \tag{2.1}$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R^T = R^T_{izolacije} + R^T_{strujanja} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{\frac{S_s + S_u}{2}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0{,}5333\ \text{K/W} \tag{2.2}$$

Укупна снага којом грејач генерише топлотну енергију представља збир снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{2.3}$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{2.4}$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \tag{2.5}$$

Са θ је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент.

Заменом израза (2.4) и (2.5) у једначину (2.3) се добија диференцијална једначина која описује промену пораста температуре воде и казана у односу на амбијент.

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \tag{2.6}$$

Даљим сређивањем се добија једначина у следећој форми:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \tag{2.7}$$

$$R^T \cdot P_g = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \tag{2.8}$$

где је са τ означена временска константа система. Њено решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{2.9}$$

где је са θ_0 означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са θ_∞ пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго, што овде није случај).
У стационарном стању нема промене температуре, те је извод температуре (па и пораста температуре) једнак нули:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{2.10}$$

те се заменом у једначину (2.8) добија:

$$\theta_\infty = P_g \cdot R^T \tag{2.11}$$

У тренутку t^* пораст температуре достиже вредност θ^* (који у овом случају одговара температури воде од 90ºC). Време t^* се израчунава из једначине (2.9) примењене за тренутак t^*:

$$\theta^* = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) \tag{2.12}$$

$$(\theta_0 - \theta_\infty) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \theta^* - \theta_\infty \tag{2.13}$$

$$e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \tag{2.14}$$

$$-\frac{t^*}{\tau} = ln \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \tag{2.15}$$

$$t^* = \tau \cdot ln \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta^* - \theta_\infty} \tag{2.16}$$

Време загревања воде од 20ºC до 90ºC износи:

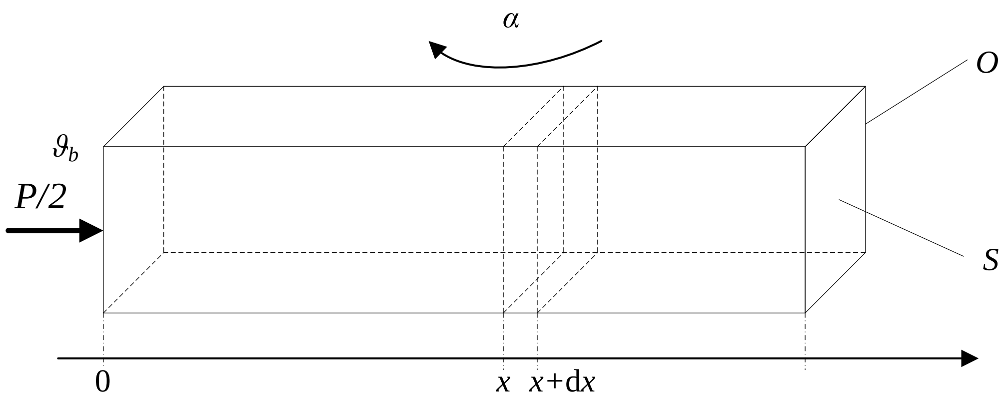
$$t_{zagr} = 0{,}5333 \cdot 214{,}503 \cdot 10^3 \cdot ln \frac{0 - 0{,}5333 \cdot 2000}{(90 - 20) - 0{,}5333 \cdot 2000} = 2{,}16h \tag{2.17}$$

Ефикасност загревања воде се рачуна као:

$$\eta = \frac{C^T \cdot \theta}{P_g \cdot t_{zagr}} = 0{,}9655 \tag{2.18}$$

<u>3. Задатак</u>

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине d*x*, на растојању *x* од тела на које је ребро ослоњено (слика 3.1) гласи:



Слика 3.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{3.1}$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе *x* (на месту *x*), а $dq_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине d*x*. Зависност снаге провођења од координате *x* гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \tag{3.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати *x*, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \tag{3.3}$$

Израз (3.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна.
Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине d*x* је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.4}$$

Уврштавањем у једначину (3.1) израза за диференцијал функције (3.3) и снаге преноса топлоте струјањем (3.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.7}$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{3.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

1. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$ тј. базис ослоњен на компоненту која се хлади. Пошто се компонента симетрично хлади помоћу два идентична ребра, снага која се одводи кроз једно ребро је P / 2:

$$\frac{P}{2} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} \tag{3.9}$$

2. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = 0 \tag{3.10}$$

На основу израза (3.7), (3.9) и (3.10) може се написати:

$$\frac{P}{2} = -\lambda \cdot S \cdot (C_1 m - C_2 m) \tag{3.11}$$

$$C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0 \tag{3.12}$$

Из једначине (3.12) добија се

$$C_2 = C_1 e^{2mL} \tag{3.13}$$

Заменом (3.13) у (3.11) добија се

$$\frac{P}{2\lambda S m} = C_1 e^{2mL} - C_1 \tag{3.14}$$

$$C_1 = \frac{P}{2\lambda S m(e^{2mL} - 1)} \tag{3.15}$$

$$C_2 = \frac{P e^{2mL}}{2\lambda S m(e^{2mL} - 1)} \tag{3.16}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{P}{2\lambda S m(e^{2mL} - 1)} e^{mx} + \frac{P e^{2mL}}{2\lambda S m(e^{2mL} - 1)} e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.16}$$

Температура компоненте једнака је:

$$\vartheta(x = 0) = \frac{P}{2\lambda S m(e^{2mL} - 1)} + \frac{P e^{2mL}}{2\lambda S m(e^{2mL} - 1)} + \vartheta_a = 10{,}67 + 96{,}80 + 30 = 137{,}47℃ \tag{3.17}$$

4. Задатак

На предавањима је изведен израз за снагу хлађења (185):

$$P_n = \frac{K_{p,n} S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_{p,n} S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{4.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} \tag{4.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n} \tag{4.3}$$

Заменом ових израза у израз (4.1), добија се да је:

$$K_{p,n} S = \frac{P_n \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = \frac{P_n \cdot \ln\left(\frac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \tag{4.4}$$

За воду и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_n = \rho_v Q_{v,n} c_{pv} \left(\vartheta_{tv,n} - \vartheta_{hv,n}\right) \tag{4.5}$$

$$P_n = \rho_u Q_{u,n} c_{pu} \left(\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hu,n}\right) \tag{4.6}$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_n}{Q_{vn}\left(\vartheta_{tv,n} - \vartheta_{hv,n}\right)} \tag{4.7}$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_n}{Q_{un}\left(\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hu,n}\right)} \tag{4.8}$$

У посматраној радној тачки, расхладна снага је P_n, а улазна температура воде $\vartheta_{hv} = \vartheta_{hv,n}$, проток $Q_v = Q_{v,n}$, на основу чега се, применом једначине (4.5), закључује да је температура воде на изласку из хладњака једнака номиналној:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_n}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = \frac{P_n}{\rho_v Q_{v,n} c_{pv}} + \vartheta_{hv,n} = \vartheta_{tv,n} \tag{4.10}$$

За уље у посматраној радној тачки важи

$$P_n = \rho_u Q_{u,n} c_{pu} (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \tag{4.11}$$

Услед запрљања дошло је до смањења коефицијента преласка топлоте за 10%, па на основу израза (4.4) важи

$$K_p S = 0{,}9 \cdot K_{p,n} S = \frac{0{,}9 \cdot P_n \cdot \ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \tag{4.12}$$

За ову тачку важи:

$$P_n = \frac{K_p S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\dfrac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} = \frac{K_p S\left(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv,n}\right)}{\ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv,n}}\right)} \tag{4.13}$$

$$P_n = \frac{0{,}9 \cdot P_n \cdot \ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \cdot \frac{\left(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv,n}\right)}{ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv,n}}\right)} \tag{4.14}$$

$$1 = \frac{0{,}9 \cdot ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \cdot \frac{\left(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv,n}\right)}{ln\left(\dfrac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv,n}}\right)} \tag{4.15}$$

Из једначина (4.11) и (4.15) се одређују температуре уља на уласку ϑ_{tu} и на изласку ϑ_{hu} из хладњака.

<u>5. Задатак</u>

Предавања, стране 27 и 28.

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = \alpha(\vartheta(0,t) - \vartheta_a) + \varepsilon\sigma_c((\vartheta(0,t) + 273)^4 - (\vartheta_a + 273)^4)$$

ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Испит из предмета Пренос топлоте

Испит траје максимално 180 минута 15. 6. 2024.
Предметни наставник: Проф. др Зоран Радаковић

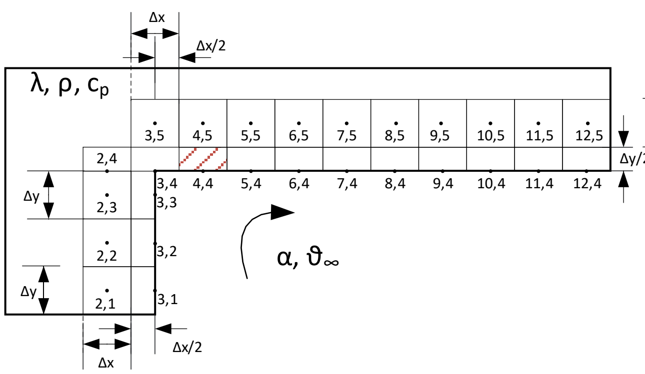
1. Кроз оребрену унутрашњу површ цеви додирне површи са водом по јединици дужине цеви S_{lw} = 0,7 m^2/m протиче вода температуре ϑ_w = 60°C. Површина спољне оребрене површи које је у додиру са ваздухом по јединици дужине цеви S_{la} = 0,9 m^2/m. Коефицијент преласка топлоте са загрејане воде на унутрашњу површ цеви износи α_w = 65 (W/(m^2·K)), а са спољне стране оребрене цеви α_a = 5 (W/(m^2·K)). Колико износи снага преноса топлоте од воде ка амбијенту температуре ϑ_a = 20°C по јединици дужине цеви? Сматрати да је температура по запремини металне оребрене цеви константна. Занемарити прелазак топлоте зрачењем. Колико на посматраном месту по координати струјања воде износи пад температуре воде по једини дужине цеви. Проток воде износи 0,0002 m^3/s, њена густина ρ_v = 1000 kg/m^3, а специфични топлотни капацитет c_{pv} = 4200 J/(kgK) (30П)

2. У бојлеру запремине 50 l налази се вода на температури амбијента ϑ_a = 20°C. Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача P_{gr} = 2 kW, маса казана m_k = 9,5 kg, површина казана (унутрашња површина топлотне изолације) S_u = 0,8 m^2, дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности λ = 0,1 W/(m·K), δ= 30 mm, спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације) S_s = 1 m^2. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи α_s = 5 W/(m^{2}K), а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан $\alpha_u >> \alpha_s$. Густина воде износи ρ_v = 1000 kg/m^3, специфични топлотни капацитет воде c_{pv} = 4200 J/(kgK) и специфични топлотни капацитет казана c_{pk} = 474 J/(kgK). Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана израчунавати по формула за раван зид површине (S_u + S_s) / 2. Регулатор температуре искључује грејач када достигне ϑ_{isk} = 90°C, а укључује кад температура опадне испод ϑ_{uk} = 85°C. Када ће се догодити следеће укључење бојлера ако се као нулти тренутак посматра укључење бојлера испуњеног водом температуре ϑ_a = 20°C? Сматрати да се у бојлеру током загревања не размењује вода. (30П)

3. На компоненту енергетске електронике у којој се генерише снага губитака P = 15 W ослоњена су два ребра за хлађење, свако дужине L = 300 mm, попречног пресека S = 100 mm^2 и обим O = 40 mm. Коефицијент преласка топлоте са површи ребра на ваздух температуре ϑ_a = 30°C износи α = 8 W/m^{2}K. Топлотна проводност материјала од кога је сачињено ребро износи λ = 237 W/mK. Колико износи температура површи компоненте ослоњене на ребро?. Користити тачан гранични услов на базису ребра који се хлади. Занемарити контактни топлотни отпор између компоненте и ребара за хлађење. (20П)

4. За елементарни облик размењивача топлоте који се састоји од унутрашње цеви кроз који струји хладна вода у истом смеру као и топло уље које струји кроз спољашњу цев, познати су номинални подаци: улазне и излазне температуре оба флуида ($\vartheta_{hv,n}$, $\vartheta_{tv,n}$, $\vartheta_{tu,n}$, $\vartheta_{hu,n}$) и проток оба флуида ($Q_{v,n}$, $Q_{u,n}$), као и номинална снага (P_n). Написати алгебарске једначине из којих се могу одредити температуре уља на уласку и изласку из размењивача, за случај да се коефицијент преласка топлоте због запрљања хладњака смањио за 10 %. Улазни параметри који остају исти: $\vartheta_{hv,n}$, Q_v, Q_u; снага преноса топлоте кроз хладњак остаје једнака P_n. Сматрати да се термички параметри флуида остају исти као при номиналној радној тачки. (20П)

5. Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине приказан шрафираном површи, репрезентован тачком (4,4). При постављању израза који обухвата и временску промењивост температуре, користити имплицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Топлотна проводност материјала је λ, специфични топлотни капацитет је c_p, густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је α. При писању једначина занемарити размену топлоте зрачењем. (20П)



1. Задатак

Снага преноса топлоте са воде на ваздух по јединици дужине цеви износи

$$P_l = \frac{\vartheta_w - \vartheta_a}{R^T_{str,un} + R^T_{str,sp}} \tag{1.1}$$

Подужни топлотни отпор струјању са унутрашње стране цеви износи

$$R^T_{str,un} = \frac{1}{\alpha_w S_{lw}} \tag{1.2}$$

а са спољашње стране

$$R^T_{str,sp} = \frac{1}{\alpha_a S_{la}} \tag{1.3}$$

Заменом израза (1.2) и (1.3) у (1.1) добија се

$$P_l = \frac{\vartheta_w - \vartheta_a}{\dfrac{1}{\alpha_w S_{lw}} + \dfrac{1}{\alpha_a S}} = 163{,}8\ W \tag{1.4}$$

Пад температуре по јединици дужине цеви одређује се на основу једначине

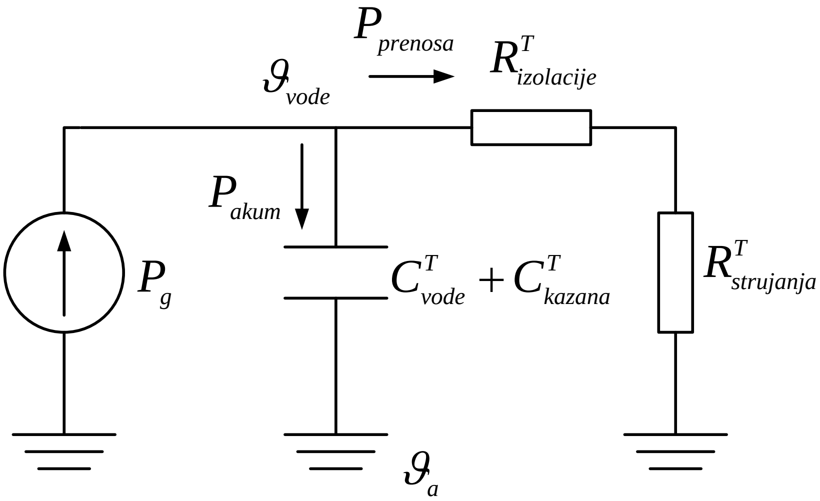
$$P_l = \rho Q c_p \Delta\theta \tag{1.5}$$

$$\Delta\theta = \frac{P_l}{\rho Q c_p} = 0{,}195\ K \tag{1.6}$$

2. Задатак

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења: занемарен је отпор преношењу топлоте кроз воду, са воде на зид казана и кроз зид казана, као и топлотни капацитет изолације. Из наведених занемарења топлотних отпора следи да маса воде и зид бојлера представљају изотермичку запремину, чији је топлотни капацитет једнак збиру топлотних капацитета воде и казана.

Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на слици.



Слика 2.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C^T_{kazana} + C^T_{vode} = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214{,}5\ \text{kJ/K} \tag{2.1}$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R^T = R^T_{izolacije} + R^T_{strujanja} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{\dfrac{S_s + S_u}{2}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0{,}5333\ \text{K/W} \tag{2.2}$$

Укупна снага којом грејач генерише топлотну енергију представља збир снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{2.3}$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \tag{2.4}$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \tag{2.5}$$

Са θ је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент.

Заменом израза (2.4) и (2.5) у једначину (2.3) се добија диференцијална једначина која описује промену пораста температуре воде и казана у односу на амбијент.

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \tag{2.6}$$

Даљим сређивањем се добија једначина у следећој форми:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \tag{2.7}$$

$$R^T \cdot P_g = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \tag{2.8}$$

где је са τ означена временска константа система. Њено решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{2.9}$$

где је са θ_0 означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са θ_∞ пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго, што овде није случај).

У стационарном стању нема промене температуре, те је извод температуре (па и пораста температуре) једнак нули:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{2.10}$$

те се заменом у једначину (2.8) добија:

$$\theta_\infty = P_g \cdot R^T \tag{2.11}$$

У тренутку t^* пораст температуре достиже вредност θ^* (који у овом случају одговара температури воде од 90ºC). Време t^* се израчунава из једначине (2.9) примењене за тренутак t^*:

$$\theta^* = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) \tag{2.12}$$

$$(\theta_0 - \theta_\infty) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \theta^* - \theta_\infty \tag{2.13}$$

$$e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \tag{2.14}$$

$$-\frac{t^*}{\tau} = ln\frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \tag{2.15}$$

$$t^* = \tau \cdot ln\frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta^* - \theta_\infty} \tag{2.16}$$

Време загревања воде од 20˚C до 90°C износи:

$$t_{zagr} = 0{,}5333 \cdot 214{,}503 \cdot 10^3 \cdot ln\frac{0 - 0{,}5333 \cdot 2000}{(90-20) - 0{,}5333 \cdot 2000} = 2{,}16h \tag{2.17}$$

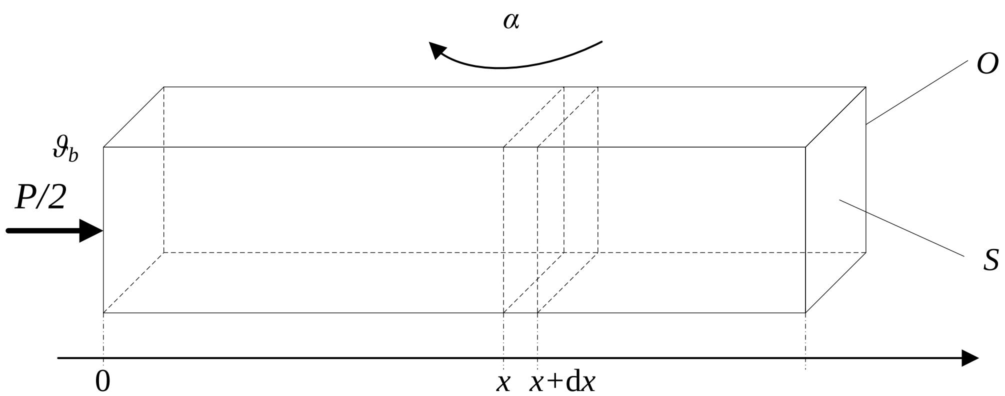
Време хлађења воде од 90°C до 85°C износи:

$$t_{hl} = 0{,}5333 \cdot 214{,}503 \cdot 10^3 \cdot ln\frac{(90-20) - 0{,}5333 \cdot 0}{(85-20) - 0{,}5333 \cdot 0} = 2{,}35h \tag{2.17}$$

Дакле, до поновног укључења грејача долази након 4,51h.

3. Задатак

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине dx, на растојању x од тела на које је ребро ослоњено (слика 3.1) гласи:



Слика 3.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \tag{3.1}$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе x (на месту x), а d$q_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине dx. Зависност снаге провођења од координате x гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \tag{3.2}$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати x, једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}dx \tag{3.3}$$

Израз (3.3) важи за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине dx је

$$dq_{strujanja} = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.4}$$

Уврштавањем у једначину (3.1) израза за диференцијал функције (3.3) и снаге преноса топлоте струјањем (3.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.5}$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \tag{3.6}$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.7}$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha \cdot O}{\lambda \cdot S} \tag{3.8}$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине се одређују на основу граничних услова за базисе на почетку и крају ребра за хлађење.

3. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра на координати $x = 0$ тј. базис ослоњен на компоненту која се хлади. Пошто се компонента симетрично хлади помоћу два идентична ребра, снага која се одводи кроз једно ребро је P / 2:

$$\frac{P}{2} = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} \tag{3.9}$$

4. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a. По услову задатка, он гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = \alpha(\vartheta(x = L) - \vartheta_a) \tag{3.10}$$

На основу израза (3.7), (3.9) и (3.10) може се написати:

$$\frac{P}{2} = -\lambda \cdot S \cdot (C_1 m - C_2 m) \tag{3.11}$$

$$-\lambda C_1 m e^{mL} + \lambda C_2 m e^{-mL} = \alpha(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) \tag{3.12}$$

Из једначине (3.12) добија се

$$-\lambda C_1 m e^{2mL} + \lambda C_2 m = \alpha C_1 e^{2mL} + \alpha C_2 \tag{3.13}$$

$$C_2(\lambda m - \alpha) = C_1(\lambda m + \alpha)e^{2mL} \tag{3.14}$$

$$C_2 = \frac{(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{\lambda m - \alpha} C_1 \tag{3.15}$$

Заменом (3.15) у (3.11) добија се

$$\frac{P}{2\lambda S m} = \frac{(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{\lambda m - \alpha} C_1 - C_1 \tag{3.16}$$

$$C_1 = \frac{P}{2\lambda S m\left(\frac{(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{\lambda m - \alpha} - 1\right)} \tag{3.17}$$

$$C_2 = \frac{(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{\lambda m - \alpha} \frac{P}{2\lambda S m\left(\frac{(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{\lambda m - \alpha} - 1\right)} = \frac{P(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{2\lambda S m\big((\lambda m + \alpha)e^{2mL} - \lambda m + \alpha\big)} \tag{3.18}$$

Израз који описује расподелу температуре дуж ребра у устаљеном стању:

$$\vartheta(x) = \frac{P}{2\lambda S m\left(\frac{(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{\lambda m - \alpha} - 1\right)} e^{mx} + \frac{P(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{2\lambda S m\big((\lambda m + \alpha)e^{2mL} - \lambda m + \alpha\big)} e^{-mx} + \vartheta_a \tag{3.19}$$

Температура компоненте једнака је:

$$\vartheta(x = 0) = \frac{P}{2\lambda S m\left(\frac{(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{\lambda m - \alpha} - 1\right)} + \frac{P(\lambda m + \alpha)e^{2mL}}{2\lambda S m\big((\lambda m + \alpha)e^{2mL} - \lambda m + \alpha\big)} + \vartheta_a = 10{,}46 + 96{,}58 + 30 = 137{,}04℃ \tag{3.20}$$

4. Задатак

На предавањима је изведен израз за снагу хлађења (185):

$$P_n = \frac{K_{p,n}S(\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln\left(\frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}}\right)} = \frac{K_{p,n}S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} \tag{4.1}$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} \tag{4.2}$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n} \tag{4.3}$$

Заменом ових израза у израз (4.1), добија се да је:

$$K_{p,n}S = \frac{P_n \cdot \ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = \frac{P_n \cdot \ln\left(\frac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \tag{4.4}$$

За воду и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_n = \rho_v Q_{v,n} c_{pv}\left(\vartheta_{tv,n} - \vartheta_{hv,n}\right) \tag{4.5}$$

$$P_n = \rho_u Q_{u,n} c_{pu}\left(\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hu,n}\right) \tag{4.6}$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_n}{Q_{vn}\left(\vartheta_{tv,n} - \vartheta_{hv,n}\right)} \tag{4.7}$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_n}{Q_{un}\left(\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hu,n}\right)} \tag{4.8}$$

У посматраној радној тачки, расхладна снага је P_n, а улазна температура воде $\vartheta_{hv} = \vartheta_{hv,n}$, проток $Q_v = Q_{v,n}$, на основу чега се, применом једначине (4.5), закључује да је температура воде на изласку из хладњака једнака номиналној:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_n}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = \frac{P_n}{\rho_v Q_{v,n} c_{pv}} + \vartheta_{hv,n} = \vartheta_{tv,n} \tag{4.10}$$

За уље у посматраној радној тачки важи

$$P_n = \rho_u Q_{u,n} c_{pu}(\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \tag{4.11}$$

Услед запрљања дошло је до смањења коефицијента преласка топлоте за 10%, па на основу израза (4.4) важи

$$K_p S = 0{,}9 \cdot K_{p,n} S = \frac{0{,}9 \cdot P_n \cdot \ln\left(\frac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \tag{4.12}$$

За ову тачку важи:

$$P_n = \frac{K_p S(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}}\right)} = \frac{K_p S\left(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv,n}\right)}{\ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv,n}}\right)} \tag{4.13}$$

$$P_n = \frac{0{,}9 \cdot P_n \cdot \ln\left(\frac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \cdot \frac{\left(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv,n}\right)}{ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv,n}}\right)} \tag{4.14}$$

$$1 = \frac{0{,}9 \cdot ln\left(\frac{\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu,n} - \vartheta_{hv,n}}\right)}{\left(\vartheta_{hu,n} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu,n} + \vartheta_{hv,n}\right)} \cdot \frac{\left(\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv,n}\right)}{ln\left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv,n}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv,n}}\right)} \tag{4.15}$$

Из једначина (4.11) и (4.15) се одређују температуре уља на уласку ϑ_{tu} и на изласку ϑ_{hu} из хладњака.

<u>5. Задатак</u>

Биланс снаге за посматрани елемент (4,4) је:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \tag{5.1}$$

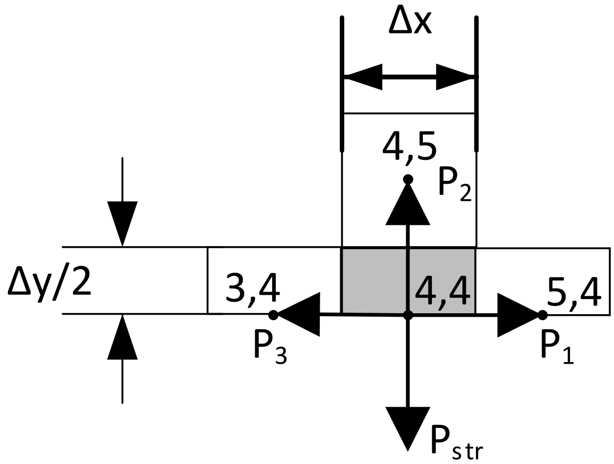
где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је $P_{gen} = 0$.

По имплицитној методи акумулисана енергија се изражава као пораст енергије у тренутном (p) тренутку у односу на претходни (p - 1) тренутак:

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta y}{2} L \frac{d\vartheta_{4,4}}{dt} = \rho\, c_p \frac{\Delta x \Delta y}{2} L \frac{\vartheta_{4,4}^{p} - \vartheta_{4,4}^{p-1}}{\Delta t} \tag{5.2}$$



Слика 5.1

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем и струјањем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} \tag{5.3}$$

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји од три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3, 4), (4, 5) и (5,4).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^{3} P_k \tag{5.4}$$

$$P_1 = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{5,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{5,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.5}$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{4,5}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta y}{L\Delta x}} \tag{5.6}$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{3,4}^p}{\frac{1}{\lambda}\frac{\Delta x}{L\Delta y/2}} = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{3,4}^p}{\frac{2}{\lambda L}\frac{\Delta x}{\Delta y}} \tag{5.7}$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{L\Delta x}} = \alpha L\Delta x\left(\vartheta_{4,4}^p - \vartheta_{\infty}^p\right) \tag{5.8}$$