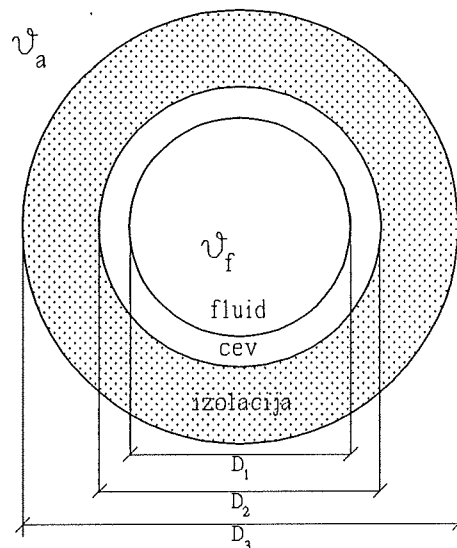


### Kritična debljina izolacije

U ovom odeljku se obrađuje problem kritične debljine izolacije. Ukoliko se oko granične površi nekog kanala kroz koji se transportuje fluid ili nekog tela za koje se želi smanjiti razmene energije sa okolinom postavi sloj izolacije određene debljine, dolazi do sledećih efekata. Zbog postavljanja izolacije dolazi do stvaranja otpora prenosu toplote provodjenjem. S druge strane, povećava se površina površi sa koje se topolota sa okolinom razmenjuje strujanjem. U izvesnim slučajevima, može se dogoditi da pri debljinama izolacije ispod neke granice dolazi do porasta gubitaka, odnosno razmene energije sa okolinom, sa porastom debljine izolacije. Tada pri nekoj debljini izolacije funkcija toplotnih gubitaka od debljine izolacije dostiže svoj maksimum. Ta debljina izolacije se naziva kritična debljina izolacije.

**30.** Izvesti izraz za kritičnu debljinu toplotne izolacije metalne cevi unutrašnjeg prečnika  $D_1$  i spoljašnjeg prečnika  $D_2$ . Izolacija, čija je specifična toplotna provodnost  $\lambda$ , postavlja se oko cevi (slika 30.1). Poznati su koeficijenti prelaska toplote strujanjem sa fluida, koji struji kroz cev, na njenu unutrašnju površ ( $\alpha_1$ ) i sa spoljašnje površi izolacije na okolni vazduh ( $\alpha_2$ ).



Slika 30.1

Izračunati kritični prečnik, koji odgovara kritičnoj debljini izolacije. Transport fluida kroz cev se vrši velikom brzinom, tako da se može smatrati da je temperatura unutrašnje površi cevi jednaka temperaturi fluida. Specifična toplotna provodnost izolacije iznosi  $\lambda = 0,208 \text{ W/(m K)}$  i ona je mnogo manja od iste vrednosti za metal, pa se pad temperature kroz cev može zanemariti. Koeficijent prelaska toplote strujanjem sa spoljašnje površi izolacije na okolni vazduh je  $\alpha_2 = 8,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ .

#### Rešenje:

Ukupni podužni otpor prenosu toplote (u radijalnom smeru) je jednak zbiru podužnih otpora prelasku toplote strujanjem sa fluida na unutrašnju površ cevi ( $R_{\alpha_1}^T$ ), provodjenjem kroz zid cevi (koji se može zanemariti), provodjenjem kroz sloj toplotne izolacije ( $R_{\lambda}^T$ ) i

strujanjem sa spoljašnje površi izolacije na okolni vazduh ( $R_{\alpha 2l}^T$ ):

$$R_l^T = R_{\alpha 1l}^T + R_{\lambda l}^T + R_{\alpha 2l}^T \quad (30.1)$$

Do izraza za otpor prelasku toplote provodjenjem kroz cilindrični zid (sloj toplotne izolacije) može se doći na osnovu definicije toplotnog otpora i osnovnih zakona prostiranja toplote. On se definiše kao odnos razlike temperatura dve izotermske površi i toplotne snage koja se između njih razmenjuje u stacionarnom stanju, kada između izotermskih površi ne postoje izvori energije.

Vektor površinske gustine snage kojom se energija prenosi provodjenjem računa se pomoću *Fourier*-ovog zakona (1), koji u cilindričnom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\mathbf{q}_s = -\lambda \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \mathbf{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \boldsymbol{\varphi}_0 + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \mathbf{z}_0 \right). \quad (30.2)$$

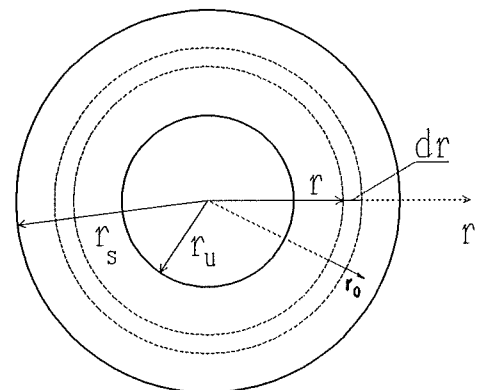
S obzirom na simetriju po koordinatama  $z$  i  $\varphi$  (za određenu vrednost potega  $r$  temperatura ne zavisi od ovih koordinata), prethodni izraz se svodi na

$$\mathbf{q}_s = -\lambda \frac{d\vartheta}{dr} \mathbf{r}_0. \quad (30.3)$$

Ukupna podužna toplotna snaga kroz krug poluprečnika  $r$  je određena izrazom

$$q_l = \mathbf{q}_s(r) S_l(r) = -\lambda \frac{d\vartheta}{dr} 2\pi r. \quad (30.4)$$

Njena vrednost je stalna (ne zavisi od rastojanja  $r$ ), jer u zidu nema ni akumulisanja (postignuto je stacionarno stanje), ni generisanja toplote. "Podužna površina" (obim) kroz koju je računat fluks vektora površinske gustine snage je "podužni omotač valjka" poluprečnika  $r$  (odnosno odgovarajući krug), a njen vektor se poklapa sa jediničnim vektorom  $r$  koordinate -  $\mathbf{r}_0$  (on je orijentisan ka spoljašnjosti, u smeru povećanja koordinate  $r$  - slika 30.2).



Slika 30.2

Integracijom preuređene jednačine (30.4)

$$q_l \frac{dr}{r} = -2 \pi \lambda d \vartheta, \quad (30.5)$$

u granicama  $[r_u, r_s]$ , kojima odgovaraju temperature graničnih površi  $[\vartheta_u, \vartheta_s]$ , se dobija

$$q_l = -2 \pi \lambda \frac{\vartheta_s - \vartheta_u}{\ln \frac{r_s}{r_u}}. \quad (30.6)$$

Konačno, za vrednost podužnog toplotnog otpora provodjenju toplote kroz cilindrični zid se dobija

$$R_l^T = \frac{\vartheta_u - \vartheta_s}{q_l} = \frac{1}{\lambda} \frac{\ln \frac{r_s}{r_u}}{2 \pi}. \quad (30.7)$$

Toplotni otpor prelasku toplote strujanjem se računa prema izrazu [1]

$$R_\alpha^T = \frac{\Delta \theta}{q} = \frac{1}{\alpha S} = \frac{1}{\alpha \pi D l}. \quad (30.8)$$

Njegova podužna vrednost (odnos razlike temperatura fluida i zida i podužne snage prenosa toplote strujanjem) je jednaka

$$R_{\alpha l}^T = \frac{\Delta \theta}{q_l} = \frac{\Delta \theta}{\frac{q}{l}} = \frac{\Delta \theta}{q} l = R_\alpha^T l = \frac{1}{\alpha \pi D}. \quad (30.9)$$

Ukupni podužni toplotni otpor prenosu toplote je jednak

$$R_l^T = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 D_1} + \frac{1}{2 \lambda} \ln \frac{D_3}{D_2} + \frac{1}{\alpha_2 D_3} \right). \quad (30.10)$$

Da bi se odredila kritična debljina izolacije potrebno je analizirati zavisnost toplotnih gubitaka od debljine izolacije, odnosno od prečnika  $D_3$ . Vrednost za koju se ima ekstremum funkcije toplotnih gubitaka, odnosno podužnog toplotnog otpora, dobija se izjednačavanjem prvog izvoda ukupnog podužnog otpora po prečniku  $D_3$  sa nulom,

$$\frac{1}{\pi D_3^*} \left( \frac{1}{2 \lambda} - \frac{1}{\alpha_2 D_3^*} \right) = 0, \quad (30.11)$$

odakle se dobija

$$D_3^* = \frac{2 \lambda}{\alpha_2}. \quad (30.12)$$

Vrednost drugog izvoda ukupnog podužnog toplotnog otpora po prečniku  $D_3$  je

$$\frac{d^2 R_l^T}{d D_3^2} = \frac{1}{\pi D_3^2} \left( \frac{2}{\alpha_2 D_3} - \frac{1}{2 \lambda} \right). \quad (30.13)$$

On je za  $D_3 = D_3^*$  veći od nule, što znači da za vrednost prečnika  $D_3^*$  podužna vrednost toplotnog otpora ima minimalnu, a toplotnih gubitaka maksimalnu vrednost.

Konstatujmo nekoliko očiglednih činjenica na osnovu izraza (30.10)-(30.13). Vrednost prečnika  $D_3^*$  zavisi od kvaliteta izolacije i intenziteta odvodjenja toplote strujanjem sa spoljašnje površi izolacije. Za  $D_3 < D_3^*$  funkcija  $R_l^T(D_3)$  je opadajuća, a podužnih toplotnih gubitaka rastuća funkcija.

Veza između debljine izolacije  $\delta$  i prečnika  $D_3$  je  $\delta = (D_3 - D_2) / 2$ . Jasno je na osnovu fizike problema da je vrednost debljine izolacije  $\delta$  veća od nule. Drugim rečima, ukoliko je vrednost "matematičke" veličine  $D_3^*$  manja od spoljašnjeg prečnika cevi ( $D_2$ ), toplotni gubici uvek opadaju sa porastom debljine izolacije  $\delta$ . U slučaju da je  $D_3^* > D_2$  toplotni gubici rastu pri povećanju debljine izolacije od nule do  $\delta^* = (D_3^* - D_2) / 2$ . Tada dostižu svoju maksimalnu vrednost. Dakle,  $\delta^*$  predstavlja kritičnu debljinu izolacije. Ona je određena izrazom

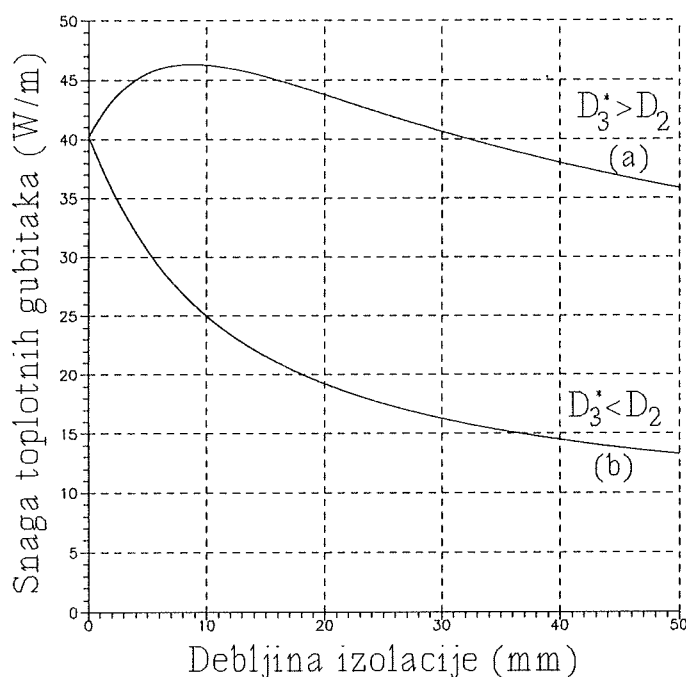
$$\delta^* = \frac{\frac{2 \lambda}{\alpha_2} - D_2}{2}. \quad (30.14)$$

Za  $\delta > \delta^*$  toplotni gubici opadaju sa porastom debljine izolacije  $\delta$ .

Na slici 30.3 je prikazana zavisnost podužnih toplotnih gubitaka od debljine izolacije za slučajeve  $D_3^* > D_2$  (kriva a) i  $D_3^* < D_2$  (kriva b), koji se računaju prema izrazu

$$Q_l^T = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{R_l^T}, \quad (30.15)$$

za konstantnu razliku temperatura fluida i ambijenta ( $\vartheta_f - \vartheta_a$ ). Posmatra se specijalni slučaj kod koga je temperatura unutrašnje površi cevi jednaka temperaturi fluida. Spoljašnji prečnik cevi je  $D_2 = 20$  mm, koeficijent prelaska toplote strujanjem sa spoljašnje površi izolacije na okolni vazduh  $\alpha_2 = 8$  W/(m<sup>2</sup> K), a specifična toplotna provodnost izolacije  $\lambda = 0,05$  W/(m K) (kriva b) i  $\lambda = 0,15$  W/(m K) (kriva a). Temperatura fluida iznosi 100 °C, a okolnog vazduha 20 °C.



Slika 30.3

Analizirani fenomen pojave kritične debljine izolacije se u praksi javlja kod cevi malih prečnika i kod malih vrednosti koeficijenata prelaska toplote  $\alpha_2$ . U tim slučajevima se, uz primenu "lošije" toplotne izolacije, može dogoditi da toplotni gubici rastu pri povećanju debljine toplotne izolacije od nule do kritične vrednosti ( $\delta^*$ ). "Paradoks" o postojanju kritične debljine izolacije je posledica smanjenja otpora prelasku toplote strujanjem (izraz (30.8)) sa spoljašnje površi izolacije na okolni vazduh usled povećanja debljine izolacije, odnosno spoljašnjeg prečnika i površine površi sa koje se odvodi toplota.

Za koeficijent  $\alpha_2 = 8,5 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$  i specifičnu toplotnu provodnost izolacije  $\lambda = 0,208 \text{ W}/(\text{m K})$  kritični prečnik iznosi

$$D_3^* = \frac{2 \cdot 0,208}{8,5} = 48,94 \text{ mm} . \quad (30.16)$$

Ukoliko je spoljašnji prečnik cevi kroz koju se transportuje fluid veći od 48,84 mm, svako povećanje debljine izolacije bi imalo za rezultat smanjenje vrednosti toplotnih gubitaka.

Nestacionarni toplotni problemi kod izotermičkih zapremina

Istovremena analiza prostorne i vremenske raspodele temperature predstavlja složen zadatak. On je često nerešiv analitički, a i u slučajevima kada se može tako rešiti, postupak je zametan i neprihvatljiv za praktičnu primenu. Zbog toga se teži njegovom uprošćenju, kada god je to moguće.

Čest je slučaj da se može smatrati da zapremina tela koje sa okolinom razmenjuje toplotu predstavlja izotermičku zapreminu. On se teorijski ima pri idealnoj toplotnoj provodnosti materijala od koga je sačinjeno telo, odnosno pri beskonačno velikoj specifičnoj toplotnoj provodnosti. Stvarno, ovaj uslov nikada nije ispunjen. Praktični kriterijum prema kome se može usvojiti da je zapremina izotermička je da je otpor prenosu toplote provodjenjem kroz telo mnogo manji od otpora prelasku toplote sa tela na okolinu. On se karakteriše *Biot*-ovim brojem, koji je definisan kao odnos otpora prelasku toplote provodjenjem kroz telo i otpora prenosu toplote sa tela na okolinu. Primera radi, za slučaj provodjenja toplote kroz ravan homogen zid, čija se jedna površ hladi strujanjem fluida, *Biot*-ov broj je određen izrazom

$$Bi = \frac{\frac{L}{\lambda S}}{\frac{1}{\alpha S}} = \frac{\alpha L}{\lambda}, \quad (28)$$

gde su:  $S$  površina zida,  $L$  debljina zida kroz koji se toplota prenosi provodjenjem,  $\lambda$  specifična toplotna provodnost i  $\alpha$  koeficijent prelaska toplote strujanjem. Pokazuje se [3] da je greška, koja se čini uvođenjem aproksimacije da je temperatura konstantna po zapremini, mala ukoliko je vrednost *Biot*-ovog broja manja od 0,1. U opštijem slučaju, za *Biot*-ov broj važi izraz (28), pri čemu se  $L$  zamenjuje sa  $L_c$ , odnosno karakterističnom dužinom za posmatranu geometriju.

U ovom odeljku je postavljeno i rešeno nekoliko zadataka, kod kojih se može smatrati da je temperatura konstantna po zapremini tela.

**31.** Temperatura jednog termodinamičkog sistema, čiji je toplotni kapacitet  $C_s^T = 100 \text{ J/K}$ , u stanju termodinamičke ravnoteže iznosi  $T_s = 400 \text{ K}$ . Kolika će biti greška prilikom merenja temperature termodinamičkog sistema, ako se koristi termometar koji ima toplotni kapacitet  $C_m^T = 5 \text{ J/K}$  i koji se pre početka merenja (pre unošenja u termodinamički sistem) nalazio na temperaturi  $T_m = 300 \text{ K}$ ? Može se smatrati da po unošenju termometra nema razmene energije sa drugom okolinom.

**Rešenje:**

Posle dovoljno dugo vremena od trenutka dovodjenja termometra u vezu sa termodinamičkim sistemom čija se temperatura meri, uspostavlja se novo stanje termodinamičke ravnoteže, u kome nema razmene energije između termodinamičkog sistema i termometra, i u kome su im temperature jednake ( $T_s' = T_m'$ ).

U prelaznom procesu koji se odigravao pri prelasku iz jednog stanja termodinamičke ravnoteže u drugo, sistem kome se meri temperatura je izgubio deo energije  $\Delta Q_s$ , a termometar je dobio  $\Delta Q_m$ . S obzirom da u tom procesu nije bilo druge razmene energije, energija koju je izgubio termodinamički sistem je jednaka energiji koju je primio termometar ( $\Delta Q_s = \Delta Q_m$ ).

Iz ovog uslova, napisanog u pogodnom obliku,

$$C_s^T (T_s - T_s') = C_m^T (T_m' - T_m), \quad (31.1)$$

može se odrediti vrednost temperature termodinamičkog sistema i termometra ( $T_m' = T_s'$ ) u novouspostavljenom stacionarnom stanju:

$$T_s' = \frac{C_s^T T_s + C_m^T T_m}{C_s^T + C_m^T} \quad (31.2)$$

Po zameni brojnih vrednosti u izraz (31.2), dobija se vrednost temperature u novouspostavljenom stanju termodinamičke ravnoteže  $T_s' = 395 \text{ K}$ .

Dakle, umesto 400 K, koliko je iznosila temperatura termodinamičkog sistema, termometar pokazuje manju vrednost. Greška merenja je

$$\Delta T = T_s - T_s' = 4,8 \text{ K}. \quad (31.3)$$



**32.** Temperatura dugačkog električnog provodnika bez izolacije prečnika  $D$  i podužnog električnog otpora  $R_l'$ , približno nezavisnog od temperature, u početnom trenutku je bila jednaka temperaturi okoline. Ovo početno ravnotežno stanje se narušava proticanjem električne struje jačine  $I$  kroz provodnik. Postaviti diferencijalnu jednačinu oblika

$$\frac{dT(t)}{dt} = f(T(t)), \quad (32.1)$$

čijim se rešavanjem može dobiti vremenska zavisnost temperature provodnika od trenutka uspostavljanja struje. Postaviti algebarsku jednačinu čijim se rešavanjem može dobiti vrednost temperature provodnika u novom ravnotežnom stanju. Pri rešavanju zadatka koristiti aproksimaciju da u svakom trenutku  $t$  provodnik predstavlja izotermičku zapreminu.

Vrednosti svih veličina koje učestvuju u proračunu (temperatura ambijenta, specifični zapreminski toplotni kapacitet materijala provodnika, koeficijent prelaska toplote strujanjem sa provodnika na vazduh i koeficijent sivoće provodnika) su poznate. Može se smatrati da se one ne menjaju sa temperaturom.

### Rešenje:

Do traženih jednačina se dolazi iz energetskog bilansa u prelaznom stanju. Snaga povećanja unutrašnje energije je jednaka razlici snaga generisane energije u provodniku i toplote predate okolini:

$$q_{\text{generisano}} - q_{\text{odvedeno}} = \frac{dU}{dt} \quad (32.2)$$

Energija se generiše, usled električnog rada, snagom

$$q_{\text{generisano}} = I^2 R_l' L, \quad (32.3)$$

gde je  $L$  dužina provodnika.

Toplota se u okolinu odvodi strujanjem i zračenjem. Snaga odvodjenja zračenjem se određuje prema izrazu (16.8), pri čemu  $S_2 \rightarrow \infty$  (jer je telo "obuhvaćeno" ambijentom), a strujanjem prema izrazu (III.1). Ukupna snaga odvodjenja toplote je određena izrazom

$$q_{\text{odvedeno}} = \alpha (\pi D L) (T - T_a) + \varepsilon C_c (\pi D L) \left( \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_a}{100} \right)^4 \right), \quad (32.4)$$

gde je  $T$  apsolutna temperatura provodnika, a  $T_a$  apsolutna temperatura ambijenta.

Snaga povećanja unutrašnje energije je određena izrazom

$$\frac{dU}{dt} = \rho c \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) L \frac{dT}{dt}, \quad (32.5)$$

gde je  $\rho c$  toplotni kapacitet po jedinici zapremine provodnika.

Uvrštavanjem izraza za snage generisanja, odvođenja i akumulisanja toplote u jednačinu energetskog bilansa i svodjenjem na oblik (32.1), dobija se

$$\frac{dT}{dt} = \frac{I^2 R_i' - \pi D \alpha (T - T_a) - \pi D \varepsilon C_c \left( \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_a}{100} \right)^4 \right)}{\rho c \left( \frac{\pi D^2}{4} \right)}. \quad (32.6)$$

Iz prethodnog izraza se, za  $dT/dt = 0$ , dobija izraz koji odgovara stacionarnom stanju koje se uspostavlja pri proticanju struje  $I$ :

$$I^2 R_i' = \pi D \alpha (T - T_a) + \pi D \varepsilon C_c \left( \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_a}{100} \right)^4 \right) \quad (32.7)$$

Do ovog izraza se moglo doći i na osnovu energetskog bilansa u stacionarnom stanju, kada je snaga kojom se generiše toplota jednaka snazi kojom se ona odvodi (strujanjem i zračenjem).

*U primeru su tretirani kako zračenje tako i strujanje, kao oblici prenosa toplote sa spoljašnje površi provodnika ka okolini. Vidi se da su zbog toga veoma kompleksne jednačine koje opisuju toplotne procese. Uobičajni pristup pri praktičnom rešavanju problema je da se pri nižim temperaturama zanemari zračenje, a pri višim strujanje. Često se pri nižim temperaturama uticaj zračenja uvažava tako što se vrednost koeficijenta prelaska toplote strujanjem uveća za određeni iznos. Tako dobijena vrednost se obično naziva koeficijent složenog prelaska toplote.*

**33.** "Topli" spoj termopara, približno sfernog oblika, postavlja se u struju fluida kome se meri temperatura. Koeficijent prelaska toplote strujanjem sa fluida na sferu (topli spoj) iznosi  $\alpha = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Toplotni kapacitet po jedinici mase sfere toplog spoja je  $c_p = 400 \text{ J}/(\text{kg K})$ , a gustina mase sfere  $\rho = 8500 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Koliko iznosi prečnik sfere toplog spoja, ako vremenska konstanta promene temperature termopara ima vrednost 10 sekundi? Ako se topli spoj, koji se prethodno nalazio na temperaturi  $\vartheta_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , postavi u struju fluida temperature  $\vartheta_2 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$ , posle kog vremena će on dostići temperaturu od  $\vartheta^* = 199 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

Može se smatrati da je toplotni otpor provodjenju toplote kroz sferu, kojom je aproksimiran topli spoj, zanemarljivo mali, odnosno da sfera po zapremini ima konstantnu temperaturu u svakom trenutku.

### Rešenje:

Do vremenske promene temperature vrha termopara se dolazi rešavanjem diferencijalne jednačine energetskog bilansa,

$$\alpha S (\vartheta_2 - \vartheta) = \rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (33.1)$$

gde su:  $S$  površina sfere,  $\vartheta$  njena temperatura i  $V$  zapremina sfere. Integracijom jednačine u granicama  $t = 0$  do proizvoljnog trenutka  $t$ , odnosno  $\vartheta_1$  do  $\vartheta(t)$  se dobija

$$\frac{\rho V c_p}{\alpha S} \ln \left( \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta} \right) = t, \quad (33.2)$$

odnosno

$$\vartheta = \vartheta_2 - (\vartheta_2 - \vartheta_1) e^{-\frac{t}{\frac{\rho V c_p}{\alpha S}}}. \quad (33.3)$$

Vremenska konstanta posmatranog toplotnog procesa (zagrevanje sfere usled prelaska toplote strujanjem) je jednaka

$$\tau^T = \frac{\rho V c_p}{\alpha S} = \frac{\rho \frac{D^3 \pi}{6} c_p}{\alpha D^2 \pi} = \frac{\rho c_p D}{6 \alpha}. \quad (33.4)$$

Do istog izraza se moglo doći i jednostavnim množenjem otpora prenosu toplote strujanjem ( $R^T$ ) i kapaciteta ( $C^T$ ):

$$\tau^T = R^T C^T = \frac{1}{\alpha \pi D^2} \frac{\rho c_p \pi D^3}{6} \quad (33.5)$$

Da bi vremenska konstanta termopara bila manja od 10 s (što je manja vremenska konstanta, to je bolja dinamika praćenja vremenske promene temperature koja se meri), prečnik sfere vrha (toplog spoja) termopara treba da bude manji od vrednosti

$$D^* = \frac{6 \alpha \tau^T}{\rho c_p} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 10}{8500 \cdot 400} = 0,353 \text{ mm}. \quad (33.6)$$

Iz izraza (33.3) se jednostavno dolazi do traženog vremena posle koga topli spoj termopara dostiže temperaturu od  $\vartheta^* = 199 \text{ }^\circ\text{C}$ :

$$t^* = \frac{\rho \frac{\pi D^3}{6} c_p}{\alpha \pi D^2} \ln \left( \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta^*} \right), \quad (33.7)$$

odnosno

$$t^* = 51,6 \text{ s}. \quad (33.8)$$

**34.** Odrediti vremensku zavisnost temperature okruglog bakarnog provodnika bez izolacije prečnika  $d = 40$  mm, ako se on u trenutku  $t = 0$  optereti strujom  $I = 2250$  A. Provodnik se nalazi u vazduhu temperature  $35$  °C. Pre početka zagrevanja temperatura provodnika je bila jednaka temperaturi vazduha. Koeficijent složenog prelaska toplote sa provodnika na vazduh se može smatrati konstantnim tokom zagrevanja provodnika. Njegova vrednost iznosi  $\alpha = 16$  W/(m<sup>2</sup>K).

Poznate su fizičke osobine bakra: specifični maseni toplotni kapacitet  $c = 390$  J/(kg K), gustina  $\rho_m = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, specifični električni otpor na  $0$  °C  $\rho_0 = 1,62 \cdot 10^{-8}$  Ω m i koeficijent promene električnog otpora sa temperaturom  $k = 0,0043$  °C<sup>-1</sup>. Bakar poseduje dobru toplotnu provodnost, iskazanu preko velike vrednosti specifične toplotne provodnosti ( $\lambda$ ), pa se može smatrati da provodnik u svakom trenutku predstavlja izotermičku zapreminu.

### Rešenje:

Uz pretpostavku da je temperatura provodnika približno konstantna po zapremini, jednačina energetske bilansa za posmatrani provodnik glasi

$$\rho(\vartheta) \frac{l}{S} I^2 = \alpha S_{om} (\vartheta - \vartheta_a) + C_p \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (34.1)$$

odnosno

$$\rho_0 (1 + k \vartheta) \frac{l}{S} I^2 = \alpha S_{om} (\vartheta - \vartheta_a) + C_p \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (34.2)$$

gde su:  $\rho$  specifični električni otpor na temperaturi  $\vartheta$ ,  $S_{om}$  površina omotača provodnika (valjka), a  $C_p$  toplotni kapacitet provodnika, koji je jednak

$$C_p = \rho_m S l c. \quad (34.3)$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (34.2), odnosno jednačine koja se dobija njenom transformacijom, dolazi se do vremenske zavisnosti temperature bakarnog provodnika. Jednačinu (34.2) je pogodno transformisati na sledeći način:

$$\rho_0 \frac{l}{S} I^2 + \alpha S_{om} \vartheta_a = (\alpha S_{om} - \rho_0 k \frac{l}{S} I^2) \vartheta + C_p \frac{d\vartheta}{dt} \quad (34.4)$$

$$\frac{\rho_0 \frac{l}{S} I^2 + \alpha S_{om} \vartheta_a}{\alpha S_{om} - \rho_0 k \frac{l}{S} I^2} - \vartheta_a = (\vartheta - \vartheta_a) + \frac{C_p}{\alpha S_{om} - \rho_0 k \frac{l}{S} I^2} \frac{d(\vartheta - \vartheta_a)}{dt} \quad (34.5)$$

$$\frac{\rho_0 \frac{l}{S} I^2 (1 + k \vartheta_a)}{\alpha S_{om} - \rho_0 k \frac{l}{S} I^2} = (\vartheta - \vartheta_a) + \frac{C_p}{\alpha S_{om} - \rho_0 k \frac{l}{S} I^2} \frac{d(\vartheta - \vartheta_a)}{dt} \quad (34.6)$$

Uvodjenjem oznaka

$$\vartheta_{stac} = \frac{\rho_0 \frac{l}{S} I^2 (1 + k \vartheta_a)}{\alpha S_{om} - \rho_0 k \frac{l}{S} I^2} \quad (34.7)$$

i

$$\tau = \frac{C_p}{\alpha S_{om} - \rho_0 k \frac{l}{S} I^2}, \quad (34.8)$$

jednačina (34.6) se može napisati u obliku

$$\vartheta_{stac} = (\vartheta - \vartheta_a) + \tau \frac{d(\vartheta - \vartheta_a)}{dt}. \quad (34.9)$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine glasi

$$\vartheta(t) = \vartheta_{stac} + \vartheta_a + C_1 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (34.10)$$

Integraciona konstanta se dobija iz početnog uslova (za  $t = 0$ ,  $\vartheta(t = 0) = \vartheta_a$ ). Ona je jednaka  $C_1 = \vartheta_{stac}$ , tako da izraz za vremensku promenu temperature glasi

$$\vartheta(t) = \vartheta_a + \vartheta_{stac} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (34.11)$$

Prema izrazima (34.7) i (34.8) se određuju vrednosti uvedene temperature  $\vartheta_{stac}$  i vremenske konstante  $\tau$ :

$$\vartheta_{stac} = \frac{1,62 \cdot 10^{-8} \frac{l}{0,02^2 \pi} 2250^2 (1 + 0,0043 \cdot 35)}{16 \pi \cdot 0,04 - 1,62 \cdot 10^{-8} \frac{l}{0,02^2 \pi} 2250^2 \cdot 0,0043} = 43,4^\circ \text{C} \quad (34.12)$$

$$\tau = \frac{7800 \cdot 390 \cdot 0,02^2 \pi l}{16 \pi \cdot 0,04 - 1,62 \cdot 10^{-8} \frac{l}{0,02^2 \pi} 2250^2 \cdot 0,0043} = 2210 \text{ s} \quad (34.13)$$

Dakle, posle zamene brojnih vrednosti za konstante  $\vartheta_{stac}$  i  $\tau$  u izraz (34.11), za vremensku promenu temperature okruglog bakarnog provodnika se dobija

$$\vartheta(t) = 35 + 43,4 \left( 1 - e^{-\frac{t}{2210 \text{ s}}} \right) ^\circ \text{C}. \quad (34.14)$$

Analiza toplotnih pojava preko toplotnih šema

Kao što je objašnjeno u četvrtoj laboratorijskoj vežbi, između električnih i toplotnih procesa postoji analogija, usled sličnosti matematičkih jednačina koje ih opisuju. Zahvaljujući toj sličnosti i razvijenosti metoda za analizu električnih kola, za toplotne procese se mogu uvesti toplotne šeme.

U uvodnom delu će se objasniti način formiranja toplotnih šema na jednom jednostavnom primeru. Posmatrajmo jedan toplotni sistem koji se može opisati sledećom diferencijalnom jednačinom energetskog bilansa

$$P dt = m c_m d\vartheta + \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T} dt, \quad (29)$$

gde su:  $P$  snaga zagrevanja, koja je skoncentrisana u izotermičkom jezgrou toplotnog kapaciteta  $m c_m$ ,  $\vartheta$  temperatura izotermičkog jezgra,  $R^T$  otpor prenosu toplote od jezgra do okoline i  $\vartheta_a$  temperatura okoline. Ovom jednačinom se može opisati niz elektrotermičkih uređaja i peći koji imaju izotermičko jezgro velikog toplotnog kapaciteta, koje u sebi sadrži izvore energije i oko koga je postavljena toplotna izolacija zanemarljive sposobnosti akumulisanja toplote.

Jednačina (29) se može napisati u obliku

$$P = m c_m \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T}, \quad (30)$$

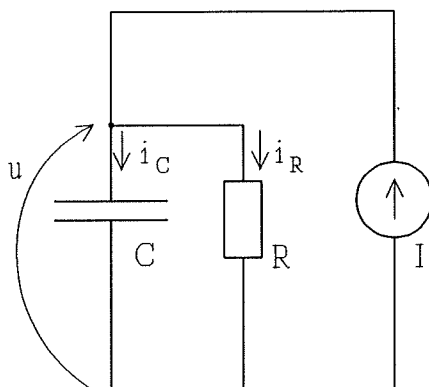
odnosno

$$P = m c_m \frac{d(\vartheta - \vartheta_a)}{dt} + \frac{\vartheta - \vartheta_a}{R^T}, \quad (31)$$

s obzirom da je temperatura ambijenta konstanta veličina.

Posmatrajmo sada jedno električno kolo, prikazano na slici 7. Radi se o jednostavnom RC kolu sa konstantnim strujnim izvorom ( $I$ ).





Slika 7

Prema I Kirchoff-ovom zakonu se može napisati

$$I = i_c + i_R. \tag{32}$$

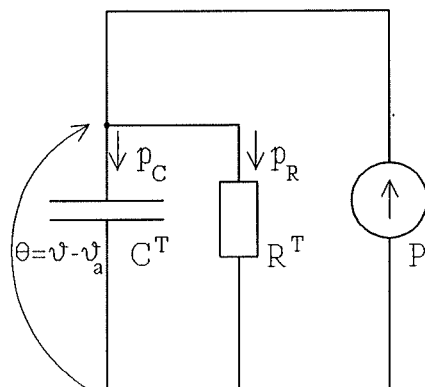
Prema poznatim vezama trenutnih vrednosti napona na otporu i struje kroz njega, odnosno vezama ovih veličina na kapacitetu, prethodna jednačina se može napisati u obliku

$$I = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}. \tag{33}$$

Posmatranjem jednačina (31) i (33) se uočava formalna identičnost matematičkih izraza kojima se opisuju toplotne pojave kod elektrotermičkog uređaja ili peći i električne pojave kod prikazanog električnog kola. Prostim zamenom toplotnih veličina u jednačini (31) analognim električnim se dobija diferencijalna jednačina električnog sistema prikazanog na slici 7. Analogne su sledeće toplotne i električne veličine:

Toplotna veličina		Električna veličina	
Veličina	Oznaka	Veličina	Oznaka
Snaga	$P$	Struja	$I$
Energija	$E$	Naelektrisanje	$Q$
Porast temperature	$\theta = \vartheta - \vartheta_a$	Napon	$U$
Toplotni otpor	$R^T$	Električni otpor	$R$
Toplotni kapacitet	$C^T = m c_m$	Električni kapacitet	$C$

S obzirom na pogodnosti koje pruža grafički prikaz električnih pojava preko električnih šema, nameće se ideja o sličnoj prezentaciji toplotnih procesa. Dakle, za toplotne procese se analogno električnim šemama električnih procesa, mogu crtati toplotne šeme. Za konkretan primer, toplotna šema je prikazana na slici 8.



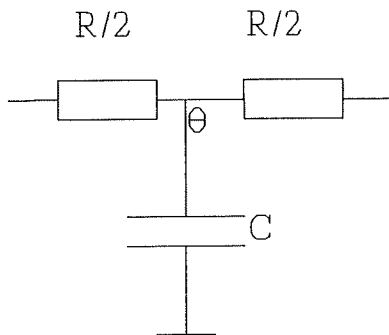
Slika 8

Jednačine koje odgovaraju toplotnim procesima se na osnovu toplotnih šema mogu pisati koristeći se identičnim zakonitostima koje važe u Teoriji električnih kola.

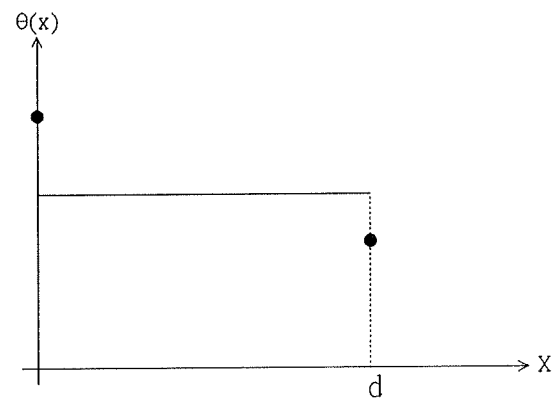
Toplotni sistemi često sadrže delove (zidove), kroz koje se vrši jednodimenzionalno provodjenje toplote, ali i akumulisanje toplote u njima. Najjednostavniji model, odnosno predstava takvog dela kao elementa toplotne šeme, počiva na pretpostavci da čitava zapremina ima jednaku temperaturu. Toplotni RC - T član, kojim se u toplotnim šemama predstavlja zid, je prikazan na slici 9.  $R$  predstavlja toplotni otpor prenosu toplote provodjenjem od jedne do druge površi zida kada u njemu nema izvora toplote, a  $C$  toplotni kapacitet zida. Praktično, toplotni RC - T član se zasniva na pretpostavci da je akumulisanje toplote skoncentrisano u jednoj tački, na sredini zida, pri čemu su akumulaciona svojstva "tačke" jednaka akumulacionom svojstvu zida (njegovom toplotnom kapacitetu). Ova tačka, čija je temperatura jednaka temperaturi po zapremini zida, sa površima zida razmenjuje toplotu provodjenjem. Pri tome se smatra da u delovima zida između središnje tačke i graničnih površi nema akumulisanja toplote.

Diferencijalne jednačine koje matematički opisuju posmatrani RC - T član se mogu napisati na osnovu analognih zakona *Kirchoff*-ovim zakonima iz oblasti elektrotehnike, odnosno na osnovu energetske bilansa.

Prema tome, granične površi zida za koji je usvojeno da ima jednaku temperaturu po zapremini predstavljaju površi diskontinuiteta (slika 10). Razlika temperature granične površi i temperature zapremine zida je jednaka padu temperature usled provodjenja toplote, koji se dobija kao proizvod snage provodjenja toplote (dobijen iz toplotne šeme) i otpora provodjenju toplote.



Slika 9



Slika 10

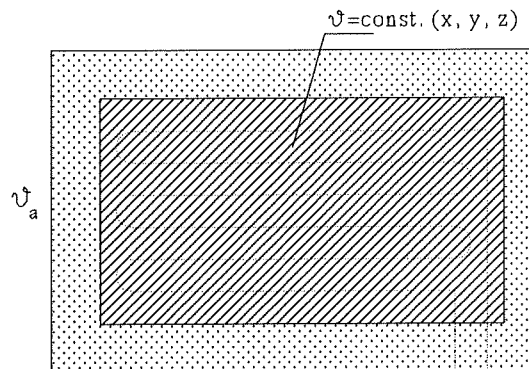
U slučaju da je toplona šema, odnosno odgovarajući sistem jednačina višeg reda, analitičke metode nisu pogodne za rešavanje sistema diferencijalnih jednačina. U savremenoj inženjerskoj praksi, za takve slučajeve se koriste računarske simulacije, odnosno rešavanje sistema jednačina na računaru. U ovom odeljku je postavljen jedan zadatak u kome treba nacrtati blok-dijagram, kao medjuformu od matematičkog modela do simulacionog programa na računaru. O crtanju blok-dijagrama se detaljno govori u okviru sedme laboratorijske vežbe, izložene u *Priručniku za laboratorijske vežbe*. Simulacioni program [5] se jednostavno piše na osnovu blok-dijagrama, kako je to objašnjeno u sedmoj laboratorijskoj vežbi.

**35.** Kod jedne elektrotoporne komorne peći sa indirektnim zagrevanjem, instalisane snage  $P_n = 5 \text{ kW}$ , treba približno odrediti povećanje unutrašnje energije u slojevima peći i gubitke energije usled prenosa toplote ka okolini, za prva dva časa rada. Peć se sastoji od dva sloja:  
 - unutrašnjeg, temperaturno postojanog, koji nosi elektrotoporni izvor toplote (šamot), koga karakteriše veliki toplotni kapacitet i dobra toploprovodnost i  
 - spoljašnjeg, toplotno izolacionog (penušavog šamota), koga karakteriše mali toplotni kapacitet i mala toploprovodnost.

U ustaljenom stanju, pri snazi peći od 5 kW, porast temperature unutrašnje granične površi peći prema okolini iznosi  $\theta_1 = 2000 \text{ K}$ , a posle prva dva časa rada  $\theta_2 = 1000 \text{ K}$ .

### Rešenje:

Zbog dobre toplotne provodnosti šamota se može usvojiti da se temperatura po njegovoj zapremini ne menja, odnosno da ovaj sloj peći predstavlja izotermičku zapreminu ( $\vartheta(x, y, z) = \text{const}$ ). Prema karakteristikama penušavog šamota, može se usvojiti da u njemu, zbog zanemarljivog toplotnog kapaciteta, nema akumulisanja energije, odnosno da se sloj penušavog šamota u toplotnom smislu ponaša kao toplotni otpor provodjenju toplote.



Slika 35.1

Ovakvom toplotnom sistemu odgovara toplotna šema prikazana na slici 8, odnosno odgovarajuća diferencijalna jednačina

$$P = C^T \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T}. \quad (35.1)$$

Značenje oznaka u prethodnoj jednačini je:  $C^T$  toplotni kapacitet unutrašnjeg sloja (izotermičkog šamotnog jezgra i vazduha koji ispunjava prostor peći),  $R^T$  toplotni otpor prenosu toplote od izotermičkog jezgra do ambijenta (vazduha temperature ambijenta),  $\theta$  porast temperature izotermičkog jezgra u odnosu na temperaturu ambijenta i  $P$  snaga kojom se električna energija pretvara u toplotu (ona je jednaka nominalnoj snazi peći ( $P_n$ )).

Opšte rešenje prethodne jednačine glasi

$$\theta(t) = R^T P + C e^{-\frac{t}{R^T C^T}}. \quad (35.2)$$

Integraciona konstanta  $C$  se određuje iz početnog uslova da je porast temperature u trenutku  $t = 0$  jednak nuli ( $\theta(t = 0) = 0$ ):

$$C = -R^T P \quad (35.3)$$

Rešenje diferencijalne jednačine (35.1), odnosno izraz za vremensku promenu temperature šamotnog sloja peći glasi

$$\theta(t) = R^T P \left( 1 - e^{-\frac{t}{R^T C^T}} \right). \quad (35.4)$$

Iz toplotne šeme se mogu odrediti i izrazi za snagu gubitaka energije u okolinu i snagu pretvaranja energije u unutrašnju energiju slojeva. One glase:

$$P_R(t) = \frac{\theta(t)}{R^T} = P \left( 1 - e^{-\frac{t}{R^T C^T}} \right) \quad (35.5)$$

i

$$P_C(t) = C^T \frac{d\theta(t)}{dt} = P e^{-\frac{t}{R^T C^T}}. \quad (35.6)$$

U prethodnim izrazima veličina  $R^T C^T$  predstavlja vremensku konstantu toplotnog procesa ( $\tau^T$ ).

Za rešavanje postavljenog zadatka je potrebno odrediti nepoznate parametre peći. Oni se određuju iz poznatih podataka o porastu temperature u stacionarnom stanju i posle  $t = 2$  h od priključenja peći na električnu mrežu, pri snazi od 5 kW.

Na osnovu podatka o temperaturi u stacionarnom stanju ( $\theta_{st} \equiv \theta_I = 2000$  K) se određuje toplotni otpor  $R^T$ . Iz izraza (35.4), primenjenog na stacionarno stanje, dobija se

$$\theta_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = R^T P, \quad (35.7)$$

a odatle vrednost toplotnog otpora  $R^T = 0,4$  K/W.

Na osnovu podatka o porastu temperature u trenutku  $t = 2$  h ( $\theta(t = 2 \text{ h}) \equiv \theta_2 = 1000 \text{ K}$ ) se određuje toplotni kapacitet  $C^T$ . Iz izraza (35.4), primenjenog na trenutak  $t = 2$  h,

$$\theta(t = 2h) = R^T P \left( 1 - e^{-\frac{2 \cdot 3600}{R^T C^T}} \right), \quad (35.8)$$

se dobija vrednost toplotnog kapaciteta  $C^T = 2,6 \cdot 10^4 \text{ J/K}$ .

Sada se mogu izračunati povećanje unutrašnje energije i energetske gubici u periodu od 2 h. Ukupna akumulirana energija (povećanje unutrašnje energije) se najjednostavnije može odrediti preko proizvoda toplotnog kapaciteta i povećanja temperature:

$$Q_{ak}(t=2h) = C^T \theta(t=2h) = 2,6 \cdot 10^7 \text{ J} \quad (35.9)$$

Gubici se mogu odrediti kao razlika energije primljene iz električne mreže i ukupne akumulirane energije u peći:

$$Q_g = P \cdot 2 \cdot 3600 - Q_{ak}(t=2h) = 10^7 \text{ J} \quad (35.10)$$

Do vrednosti  $Q_{ak}$  i  $Q_g$  se moglo doći i integracijom odgovarajućih snaga  $P_C$  i  $P_R$ , ali to svakako predstavlja komplikovaniji način od prikazanog rešenja.

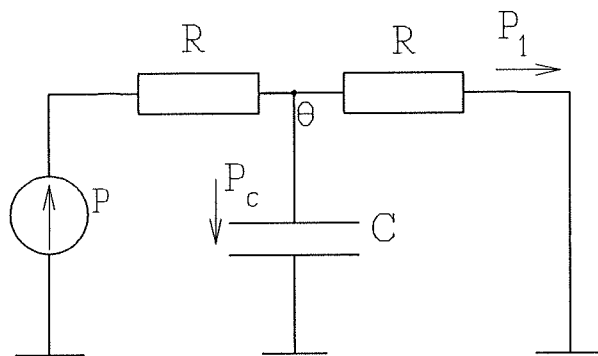
**36.** Posmatrajmo ravan zid beskonačno velikih graničnih površi koji se sa jedne strane ravnomerno zagreva konstantnom snagom, površinske gustine  $q_s = 10^3 \text{ W/m}^2$ , a sa druge hladi prinudnim strujanjem vazduha temperature  $20^\circ\text{C}$ . U početnom trenutku zagrevanja, temperatura zida je bila jednaka temperaturi rashladnog vazduha ( $20^\circ\text{C}$ ). Može se smatrati da je koeficijent prelaska toplote strujanjem sa zida na vazduh temperature  $20^\circ\text{C}$  veoma veliki. Odrediti grešku koja se čini pri određivanju porasta temperature sredine zida u odnosu na temperaturu ambijenta (rashladnog fluida) u trenutku  $t = 6 \text{ h}$ , ukoliko se zid predstavi najjednostavnijim modelom, u odnosu na vrednost koja se dobija kada se zid podeli na dva jednaka dela i svaki od delova predstavi najjednostavnijim modelom. Osobine materijala od koga je napravljen zid su: specifični zapreminski toplotni kapacitet  $c_\rho = 4 \cdot 10^5 \text{ J/(m}^3 \text{ }^\circ\text{C)}$  i specifična toplotna provodnost  $\lambda = 2 \text{ W/(m K)}$ . Debljina zida iznosi  $L = 0,5 \text{ m}$ .

Kolika je greška koja se čini pri određivanju porasta temperature sredine zida u odnosu na temperaturu ambijenta u stacionarnom stanju, za predstavu zida sa najjednostavnijim u odnosu na drugi navedeni model?

### Rešenje:

Za rešavanje postavljenog zadatka je potrebno prvo postaviti jednačine matematičkog modela za zid posmatran kao jedan sloj, a potom kao dva sloja, pri čemu sloj uvek predstavlja izotermičku zapreminu.

Toplotna šema opisanog sistema, u kojoj za zid posmatra kao jedan sloj, prikazana je na slici 36.1.  $P$  predstavlja snagu kojom se zagreva zid,  $P_c$  snagu kojom se energija u njemu akumulira,  $P_l$  snagu kojom se energija usled hladjenja fluidom odvodi u okolinu i  $\theta$  porast temperature zida u odnosu na temperaturu ambijenta (nadtemperaturu zida). Toplotni otpor provodjenju toplote kroz zid iznosi  $2R$ , a njegov toplotni kapacitet  $C$ .



Slika 36.1

Prema toplotnoj šemi se može napisati jednačina u kompleksnom domenu (za odskočnu funkciju snage zagrevanja)

$$\frac{P}{s} = P_c(s) + P_1(s). \quad (36.1)$$

Između snage kojom se energija akumulira u zidu i snage kojom se energija, usled hladjenja, odvodi u ambient se može uspostaviti veza

$$P_c(s) = C s \theta(s) = C s R P_1(s). \quad (36.2)$$

Zamenom izraza (36.2) u izraz (36.1) se dobija

$$\frac{P}{s} = (1 + s C R) P_1(s), \quad (36.3)$$

odnosno

$$P_1(s) = \frac{P}{s(1 + s C R)}. \quad (36.4)$$

Množenjem kompleksne vrednosti snage kojom se energija usled hladjenja fluidom odvodi u okolinu sa polovinom toplotnog otpora provodjenju toplote kroz zid, dolazi se do kompleksne vrednosti porasta temperature zida u odnosu na temperaturu ambijenta

$$\theta(s) = R P_1(s) = \frac{R P}{s(1 + s C R)}. \quad (36.5)$$

Primenom inverzne *Laplace*-ove transformacije se dolazi do vremenske zavisnosti nadtemperature zida od trenutka početka zagrevanja

$$\theta(t) = R P \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \quad (36.6)$$

odnosno

$$\theta(t) = 125 \left( 1 - e^{-\frac{t}{6,94}} \right), \quad (36.7)$$

gde je vreme  $t$  izraženo u časovima. Pri određivanju brojnih vrednosti u (36.7) proračun je vršen prema jediničnoj površini ( $S = 1 \text{ m}^2$ ):



$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} = \frac{1}{2} \frac{0,5}{1} = 0,125 \frac{K}{W} \quad (36.8)$$

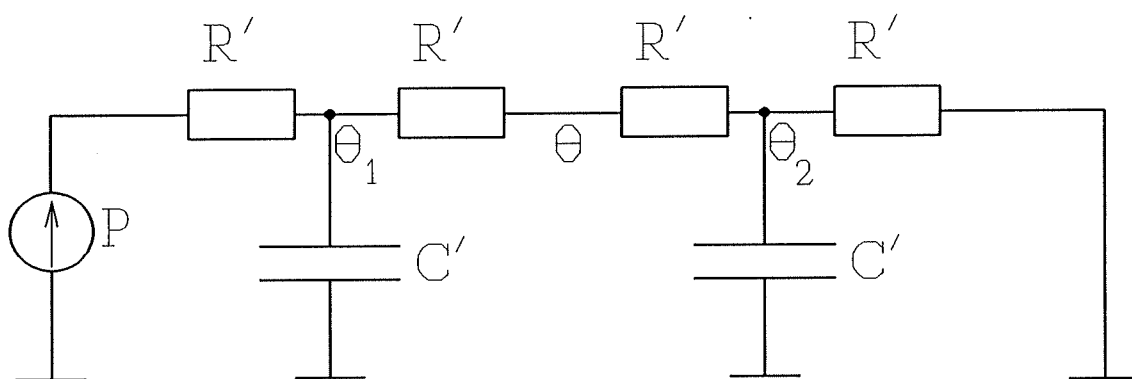
$$C = \rho c S L = 4 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 0,5 = 2 \cdot 10^5 \frac{J}{K} \quad (36.9)$$

$$P = q_s S = 10^3 \cdot 1 = 10^3 W \quad (36.10)$$

Vrednost nadtemperature zida (i njene sredine) u trenutku  $t = 6h$  iznosi

$$\theta(t = 6h) = 125 \left( 1 - e^{-\frac{6}{6,94}} \right) = 72,345 K. \quad (36.11)$$

Toplotna šema zida u kojoj se on deli na dva izotermička dela je prikazana na slici 36.2.  $P$  predstavlja snagu kojom se zagreva zid,  $\theta_1$  nadtemperaturu prvog, a  $\theta_2$  nadtemperaturu drugog dela zida i  $\theta$  nadtemperaturu sredine zida. Toplotni otpor provodjenju toplote kroz svaki od delova zida iznosi  $2R'$ , a toplotni kapacitet  $C'$ .



Slika 36.2

Analogno metodi potencijala čvorova poznatoj iz Teorije električnih kola [11], bazirano na zakonu održanja energije, mogu se napisati jednačine u kompleksnom domenu:

$$\left( \frac{1}{2R'} + sC' \right) \theta_1(s) - \frac{1}{2R'} \theta_2(s) = \frac{P}{s} \quad (36.12)$$

$$-\frac{1}{2R'} \theta_1(s) + \left( \frac{1}{2R'} + sC' + \frac{1}{R'} \right) \theta_2(s) = 0 \quad (36.13)$$

Iz izraza (36.13), nadtemperatura  $\theta_1$  se može izraziti preko nadtemperature  $\theta_2$ :

$$\theta_1(s) = (3 + 2R'C's) \theta_2(s) \quad (36.14)$$

Zamenom izraza (36.14) u (36.12) i transformacijom izraza, dolazi se do kompleksne vrednosti nadtemperature  $\theta_2$ :

$$\theta_2(s) = \frac{2R'P}{s(s^2(2R'C')^2 + s(8R'C') + 2)} \quad (36.15)$$

Do kompleksne vrednosti nadtemperature  $\theta_1$  se dolazi zamenom vrednosti  $\theta_2$  u izraz (36.14):

$$\theta_1(s) = \frac{2R'P(3 + s2R'C')}{s(s^2(2R'C')^2 + s(8R'C') + 2)} \quad (36.16)$$

Konačno se dolazi i do nadtemperature na sredini zida. S obzirom da su između tačke koja odgovara sredini zida i tačaka kojima odgovaraju izotermičke zapremine susednih slojeva u toplotnoj šemi jednaki toplotni otpori, nadtemperatura sredine zida je jednaka srednjoj vrednosti nadtemperatura delova ( $\theta_1$  i  $\theta_2$ ):

$$\theta(s) = \frac{2R'P(4 + s2R'C')}{2s(s^2(2R'C')^2 + s(8R'C') + 2)} \quad (36.17)$$

Da bi se odredila vremenska zavisnost ove nadtemperature, izraz (36.17) treba dovesti u pogodan oblik za određivanje inverzne Laplace-ove transformacije:

$$\theta(s) = \frac{P}{4R'C'^2} \frac{4 + 2R'C's}{s \left( s^2 + \frac{2}{R'C'} + \frac{1}{2(R'C')^2} \right)}, \quad (36.18)$$

odnosno

$$\theta(s) = \frac{P}{4 R' C'^2} \frac{4 + 2 R' C' s}{s \left( s - \frac{1}{2 R' C'} (-2 + \sqrt{2}) \right) \left( s - \frac{1}{2 R' C'} (-2 - \sqrt{2}) \right)}. \quad (36.19)$$

Inverzna Laplasova transformacija se jednostavno može odrediti ako se izraz za  $\theta(s)$  napiše u obliku zbira parcijalnih razlomaka [12]. Posle primene poznatog postupka razvoja funkcije u zbir parcijalnih razlomaka, dolazi se do izraza

$$\theta(s) = R' P \left( \frac{2}{s} - \frac{\frac{3\sqrt{2} + 4}{4}}{s - \frac{1}{2 R' C'} (-2 + \sqrt{2})} + \frac{\frac{3\sqrt{2} - 4}{4}}{s - \frac{1}{2 R' C'} (-2 - \sqrt{2})} \right). \quad (36.20)$$

Nalaženjem inverzne Laplace-ove transformacije [13] se dolazi do vremenske zavisnosti nadtemperature sredine zida od trenutka početka zagrevanja

$$\theta(t) = R' P \left( 2 - \frac{3\sqrt{2} + 4}{4} e^{-\frac{2 - \sqrt{2}}{2 R' C'} t} + \frac{3\sqrt{2} - 4}{4} e^{-\frac{2 + \sqrt{2}}{2 R' C'} t} \right), \quad (36.21)$$

odnosno, po zameni brojnih vrednosti,

$$\theta(t) = 62,5 \left( 2 - 2,06 e^{-\frac{t}{5,927}} + 0,06 e^{-\frac{t}{1,017}} \right), \quad (36.22)$$

gde je vreme  $t$  izraženo u časovima. Pri određivanju brojnih vrednosti u (36.22) svi parametri su određivani prema jediničnoj površini ( $S = 1 \text{ m}^2$ ):

$$R' = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{S} = \frac{1}{2} \frac{0,5}{4} = 0,0625 \frac{K}{W} \quad (36.23)$$

$$C' = \rho c S \frac{L}{2} = 4 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 0,25 = 10^5 \frac{J}{K} \quad (36.24)$$

Vrednost nadtemperature sredine zida u trenutku  $t = 6 \text{ h}$  iznosi

$$\theta(t = 6h) = 78,22 \text{ K}. \quad (36.25)$$

Procentualna greška koja se čini pri određivanju temperature sredine zida u trenutku  $t = 6h$  ukoliko se zid predstavi najtrivijalnijim modelom, u odnosu na rezultat koji se dobija ako se zid podeli na dva dela i svaki od delova predstavi najtrivijalnijim modelom, iznosi

$$\left| \frac{72,345 - 78,22}{78,22} \right| = 7,51 \% . \quad (36.26)$$

U stacionarnom stanju oba modela zida daju istu vrednost nadtemperature na sredini valjka, koja iznosi 125 K. Ovaj rezultat se može dobiti iz izraza (36.7) i (36.22) ili jednostavnim množenjem vrednosti toplotnog otpora  $R$  ( $R = 2 R'$ ) i snage  $P$ , prema toplotnim šemama na slikama 36.1 i 36.2 u kojima su toplotni kapaciteti potpuno napunjeni.

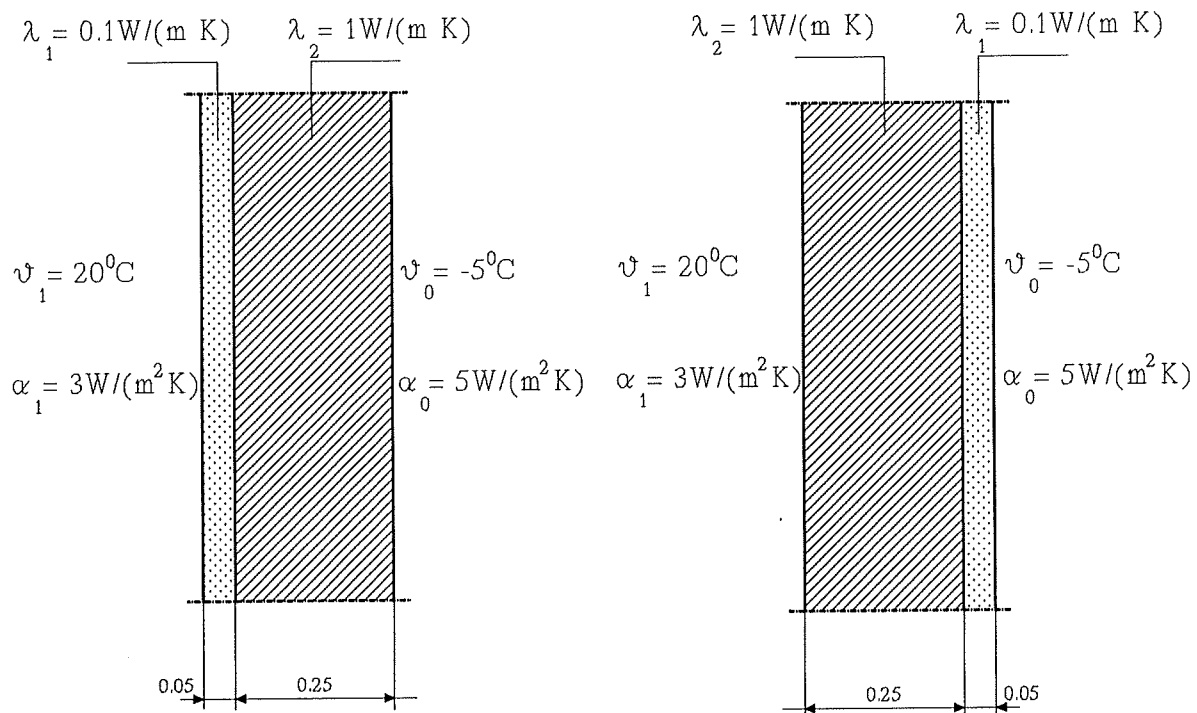
*Napomena:* Kao što se vidi iz zadatka, analitički pristup rešavanju nestacionarnih problema prostiranja toplote, zasnovan na diskretizaciji toploprovodne sredine, nije jednostavan zbog zametnosti računa. Ovakav način nekada nije uopšte moguć, a praktično postaje neprimenljiv čim se broj jednačina poveća iznad dve (u slučaju diskretizacije zida na više od dva dela). Zbog toga se za rešavanje ove vrste problema koristi digitalni računar. Temperature se određuju preko računarskih simulacija. One praktično predstavljaju rešavanje matematičkog modela (skupa diferencijalnih jednačina) nekom od numeričkih metoda. U zadatku 38 se prikazuje svodjenje matematičkog modela na oblik pogodan za pisanje računarskog simulacionog programa pomoću TUTSIM programskog paketa [5]. Danas postoje gotovi programski paketi za simulaciju fizičkih procesa [5, 30, 31, 32] opisanih skupom diferencijalnih i algebarskih jednačina. Ovakvi programski paketi omogućavaju jednostavno zadavanje matematičkog modela, sadrže implementirane numeričke postupke, omogućavaju prikaze rezultata na ekranu (numerički i grafički), smeštanje rezultata u datoteku, njihovo štampanje, kao i druge pogodnosti koje omogućavaju jednostavan i udoban rad korisniku.

**37.** Oblaganje zidova stanova se vrši termoizolacionim materijalom u cilju smanjenja gubitaka energije, odnosno povećanja komfora pri istoj instalisanoj snazi grejanja. Izolacija se postavlja sa unutrašnje, ili spoljašnje, strane nosećeg zida.

Koristeći se najtrivijalnijim toplotnim modelom zida kroz koji se prostire toplota, objasniti koje je rešenje bolje sa stanovišta komfora, u uspostavljenom stacionarnom stanju pri zagrevanju i po prestanku grejanja.

Pri postavljanju modela i sprovođenju analize treba imati u vidu da su toplotni kapaciteti vazduha i toplotne izolacije mnogo manji od toplotnog kapaciteta zida.

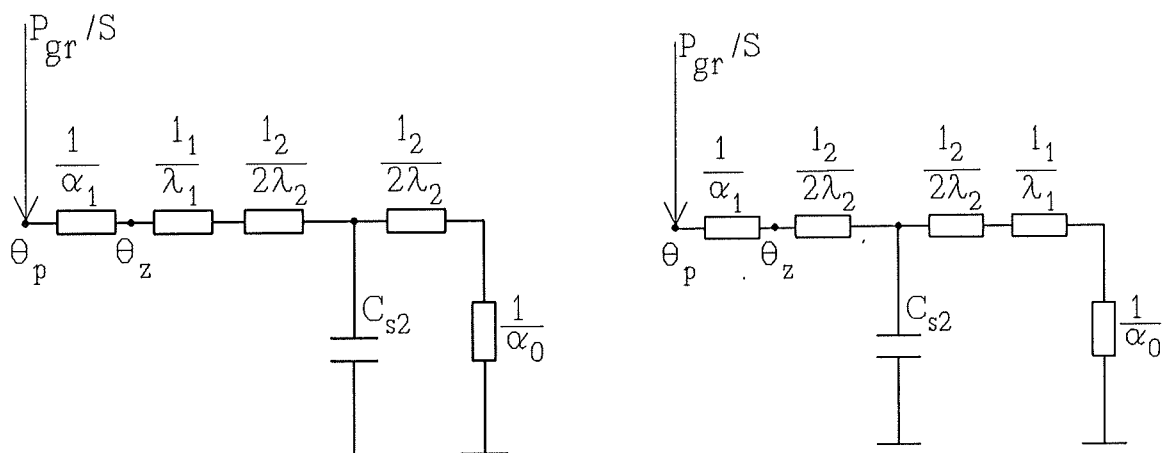
Svi brojni podaci, za primer na kome treba ilustrovati odgovor, dati su na slici 37.1. Debljine su izražene u metrima. Temperatura  $\vartheta_1 = 20^\circ\text{C}$  je data za stacionarno stanje pri zagrevanju instalisanom snagom.



Slika 37.1

### Rešenje:

Za najtrivijalniji model samog zida i sloja toplotne izolacije, prikazan na slici 9, toplotne šeme za oba slučaja postavljanja toplotne izolacije prikazane su na slikama 37.2 i 37.3. Prema tekstu zadatka, toplotni kapaciteti prostorije i sloja toplotne izolacije se mogu zanemariti, odnosno izostaviti iz toplotne šeme, jer su mnogo manji od toplotnog kapaciteta zida. Sloj toplotne izolacije je, dakle, prikazan samo toplotnim otporom prenosu toplote provodjenjem.



Slika 37.3

Slika 37.2

U stacionarnom stanju, pri zagrevanju istom snagom, temperature vazduha u prostoriji i temperatura unutrašnje površi zida su iste u oba slučaja. Pri instalisanjoj snazi i temperaturi ambijenta od  $-5\text{ }^{\circ}\text{C}$  i vrednostima koeficijenata prelaska toplote strujanjem  $\alpha_1 = 3\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$  i  $\alpha_0 = 5\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$ , temperatura u prostoriji, prema polaznim podacima, iznosi  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Temperatura unutrašnje površi zida se određuje iz toplotnih šema na slikama 37.2 ili 37.3, prema izrazu

$$\vartheta_z = 20 - \frac{q_s}{\alpha_1}, \quad (37.1)$$

gde je  $q_s$  površinska gustina snage zagrevanja (snaga zagrevanja prostorije podeljena sa površinom zidova ka okolini). Ona se izračunava iz poznatog porasta temperature prostorije u odnosu na okolini ( $\theta_p = 20 - (-5) = 25\text{ K}$ ) i ukupnog toplotnog otpora po jedinici površine zida:

$$q_s = \frac{\theta}{R_s}, \quad (37.2)$$

gde se vrednost toplotnog otpora po jedinici površine zida određuje prema izrazu

$$R_s = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^2 \frac{l_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_0}. \quad (37.3)$$

Zamenom brojnih vrednosti se dobija:  $R_s = 1,28\text{ K}/(\text{W}/\text{m}^2)$ ,  $q_s = 19,5\text{ W}/\text{m}^2$  i  $\vartheta_z = 13,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Na osnovu analize modela sa slika 37.2 i 37.3 može se zaključiti da se po prestanku grejanja, u oba slučaja, javlja trenutni pad temperature unutrašnje površi zida. Njena vrednost je tada jednaka vrednosti nadtemperature na toplotnom kapacitetu, jer se ona ne može trenutno promeniti.

Za slučaj postavljanja toplotne izolacije sa unutrašnje strane zida, temperature unutrašnje površi zida ( $\vartheta_z$ ) i prostorije ( $\vartheta_p$ ), odmah po prestanku zagrevanja, imaju vrednosti

$$\vartheta_z = \vartheta_p = q_s \left( \frac{l_2}{2 \lambda_2} + \frac{1}{\alpha_0} \right) + \vartheta_0 = 1,34^\circ\text{C}, \quad (37.4)$$

a u slučaju postavljanja toplotne izolacije sa spoljašnje strane zida,

$$\vartheta_z = \vartheta_p = q_s \left( \frac{l_2}{2 \lambda_2} + \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_0} \right) + \vartheta_0 = 11,09^\circ\text{C}. \quad (37.5)$$

Procena komfora se može izvršiti na bazi početne vrednosti i brzine opadanja srednje temperature vazduha u prostoriji i površi zida ( $(\vartheta_z + \vartheta_p)/2$ ). Prema modelu koji je dobijen zanemarenjem toplotnih kapaciteta vazduha i toplotne izolacije, temperature  $\vartheta_z$  i  $\vartheta_p$ , u periodu po prestanku grejanja imaju iste vrednosti. Opadanje temperature prema kojoj se procenjuje komfor će biti sporije u slučaju postavljanja toplotne izolacije sa spoljašnje strane, jer je veća odgovarajuća vremenska konstanta hladjenja:

$$C_{s2} \left( \frac{l_2}{2 \lambda_2} + \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_0} \right) > C_{s2} \left( \frac{l_2}{2 \lambda_2} + \frac{1}{\alpha_0} \right) \quad (37.6)$$

$$0,825 C_{s2} > 0,325 C_{s2} \quad (37.7)$$

Dakle, postavljanje toplotne izolacije sa spoljašnje površi zida predstavlja bolje rešenje, jer su u takvom slučaju početne temperature unutrašnje površi zidova i prostora, po isključenju grejanja, više i sporije opadaju, nego kada bi se izolacija postavila sa unutrašnje strane.

Pri procesu zagrevanja, od početne temperature koja je jednaka temperaturi ambijenta, može se sprovesti slična analiza, pomoću toplotnih šema sa slika 37.2 i 37.3. Ovo se ostavlja kao zadatak čitaocima. Jasno je da bi se tada imao brži porast temperature unutrašnje površi zida i samog prostora u slučaju da se toplotna izolacija postavi sa unutrašnje strane, u odnosu na postavljanje izolacije sa spoljašnje strane zida.

**38.** Nacrtati blok dijagram koji odgovara matematičkom modelu nestacionarnog zagrevanja prostora koji je od okoline odvojen ravnim homogenim zidom. Uz svaki blok dati brojne vrednosti parametara. Izlaz iz jednog od blokova treba da bude temperatura prostora.

Prostor se zagreva konstantnom snagom  $P = 1000$  W, od početnog stanja u kome mu je temperatura bila jednaka temperaturi okoline do dostizanja stacionarnog stanja. Debljina izolacionog zida između zagrevanog prostora i okoline iznosi 60 mm, a specifična toplotna provodnost  $\lambda = 0,04$  W/(m K). Koeficijenti prelaska toplote strujanjem sa vazduha na unutrašnju površ zida i sa spoljašnje površi zida na okolinu iznose  $\alpha_u = 8$  W/(m<sup>2</sup>K) i  $\alpha_s = 23,25$  W/(m<sup>2</sup>K), respektivno. Toplotni kapacitet prostora iznosi  $C_p = 216$  kJ/K, dok je specifični toplotni kapacitet zida  $\rho c_p = 134$  kJ/(m<sup>3</sup> K). Površina površi graničnog zida iznosi 30 m<sup>2</sup>. Koristiti dva RC–T člana za modelovanje prostiranja toplote kroz ravan homogen zid.

Koristiti sledeće mnemoničke oznake za blokove blok dijagrama: MNO - množenje sume ulaza sa konstantom, DEL - deljenje sume ulaza sa konstantom, SUM - sumiranje, INT - integracija i CON - blok konstante.

### Rešenje:

Toplotna otpornost provodjenju toplote kroz zid i njegov toplotni kapacitet iznose:

$$R_{zp}^T = \frac{1}{\lambda} \frac{l}{S} = \frac{1}{0,04} \frac{0,06}{30} = \frac{1}{20} \frac{K}{W} \quad (38.1)$$

$$C_z^T = \rho c_p S l = 134 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 0,06 = 0,2412 \cdot 10^6 \frac{J}{K} \quad (38.2)$$

Toplotna šema je prikazana na slici 38.1. Toplotni otpori i kapaciteti imaju vrednosti:

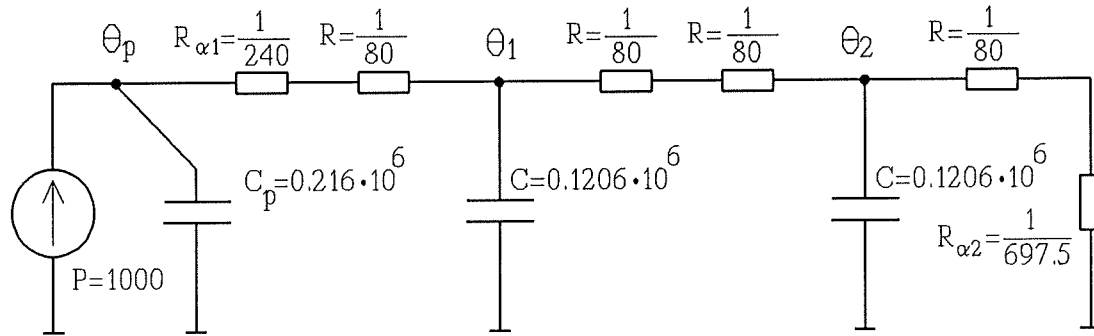
$$R \equiv \frac{R_{zp}^T}{4} = \frac{1}{80} \frac{K}{W} \quad (38.3)$$

$$C \equiv \frac{C_z^T}{2} = 0,1206 \cdot 10^6 \frac{J}{K} \quad (38.4)$$

$$R_{\alpha 1} \equiv R_{\alpha 1}^T = \frac{1}{8 \cdot 30} = \frac{1}{240} \frac{K}{W} \quad (38.5)$$



$$R_{\alpha 2} \equiv R_{\alpha 2}^T = \frac{1}{23,25 \cdot 30} = \frac{1}{697,5} \frac{K}{W} \quad (38.6)$$



Slika 38.1

Prema toplotnoj šemi sa slike 38.1, na osnovu energetskog bilansa, mogu se napisati jednačine matematičkog modela, koje glase:

$$P = C_p \frac{d\theta_p}{dt} + \frac{\theta_p - \theta_1}{R + R_{\alpha 1}} \quad (38.7)$$

$$\frac{\theta_p - \theta_1}{R + R_{\alpha 1}} = C \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{2R} \quad (38.8)$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{2R} = C \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{\theta_2}{R + R_{\alpha 2}} \quad (38.9)$$

U jednačine je pogodno uvesti vreme izraženo u časovima, jer su toplotni procesi spori. Uvodjenje vremena u časovima rezultuje time da se koeficijenti u jednačinama matematičkog modela nalaze u pogodnom opsegu. Ako su sve veličine u SI sistemu, vreme izraženo u časovima ( $t^*$ ) se dobija deljenjem vremena  $t$  sa 3600.

Uvodjenjem vremena izraženog u časovima ( $t^*$ ) i sredjivanjem jednačina, dobija se:

$$(R + R_{\alpha 1}) P = \frac{C_p}{3600} (R + R_{\alpha 1}) \frac{d\theta_p}{dt^*} + \theta_p - \theta_1 \quad (38.10)$$

$$\theta_p - \theta_1 = \frac{C}{3600} (R + R_{\alpha 1}) \frac{d\theta_1}{dt^*} + \left( \frac{1}{2} + \frac{R_{\alpha 1}}{2R} \right) (\theta_1 - \theta_2) \quad (38.11)$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{R_{a2}}{2R}\right) (\theta_1 - \theta_2) = \frac{C}{3600} (R + R_{a2}) \frac{d\theta_2}{dt^*} + \theta_2 \quad (38.12)$$

Uvrštavanjem brojnih vrednosti, prethodni skup jednačina postoje:

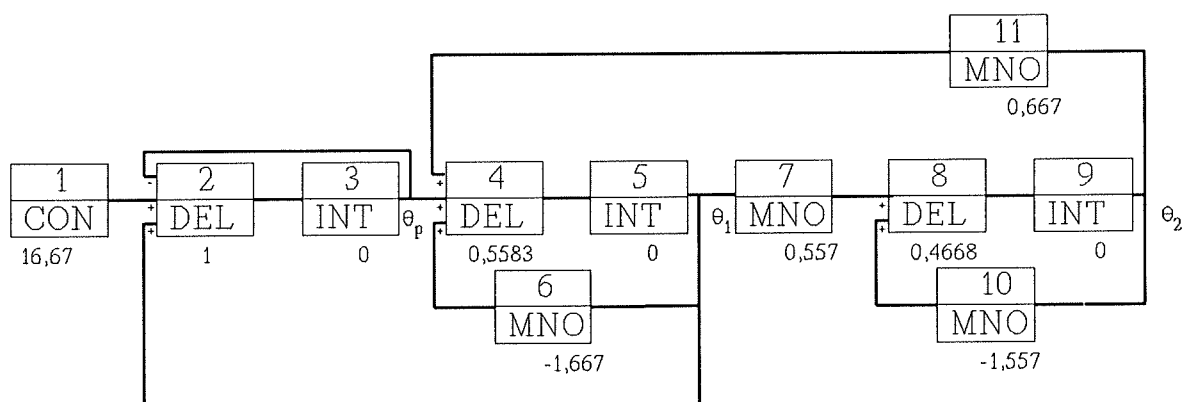
$$16,67 - \theta_p + \theta_1 = \frac{0,216 \cdot 10^6}{3600} 0,01667 \frac{d\theta_p}{dt^*} \quad (38.13)$$

$$\theta_p - \theta_1 - \frac{2}{3} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{0,1206 \cdot 10^6}{3600} 0,01667 \frac{d\theta_1}{dt^*} \quad (38.14)$$

$$0,557 (\theta_1 - \theta_2) - \theta_2 = \frac{0,1206 \cdot 10^6}{3600} 0,013934 \frac{d\theta_2}{dt^*} \quad (38.15)$$

Izračunate vrednosti konstante uz izvode nadtemperatura  $\theta_p$ ,  $\theta_1$  i  $\theta_2$  iznose 1, 0,5583 i 0,4668, respektivno.

Na osnovu prethodne tri jednačine se jednostavno crta blok dijagram:



Slika 38.2

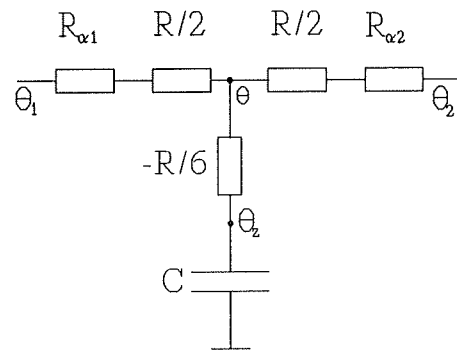
Svi blokovi koji su korišćeni u blok dijagramu prikazanom na slici 38.2 sadrže i parametar (konstantnu brojnu vrednost). Sve vrednosti za aritmetičke operacije i blok konstante su očigledne. Integracioni blokovi kao parametar sadrže početnu vrednost izlazne promenljive. U konkretnom slučaju, to su porasti temperature prostora i izotermičkih delova zida u odnosu na ambijent, pa je vrednost parametara integracionih blokova, prema uslovu zadatka, jednaka nuli.

Vremenska promena temperature prostora se dobija kao rezultat izvršenja računarskog simulacionog programa, napisanog na osnovu blok-dijagrama na slici 38.2. Dobijeni rezultat

je prikazan krivom 1 na slici 38.5.

U modelu je korišćen klasični RC–T toplotni član, čiji je izgled prikazan na slici 9. Učinjena aproksimacija je objašnjena u uvodnom delu poglavlja (slika 10). Klasični RC–T toplotni član se najčešće sreće u literaturi, kao model nestacionarnih procesa provodjenja toplote.

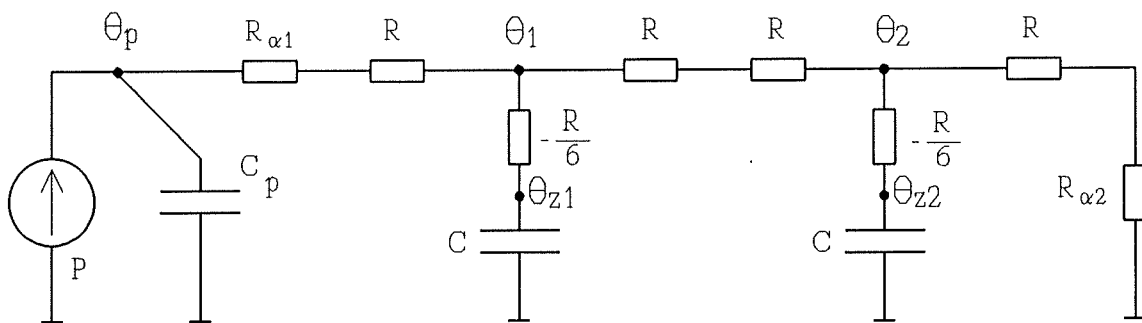
U literaturi se pojavljuju i ideje za modifikacijama klasičnog modela (RC–T toplotnog člana) [4, 7, 8, 55]. Problemu postavljanja modela se pristupa na način da se prvo reši raspodela temperature u stacionarnom stanju za slučaj zagrevanja konstantnom snagom po zapremini. Zatim se uvodi aproksimacija da se i akumulisanje energije u proizvoljnom trenutku vrši konstantnom snagom po čitavoj zapremini, određenoj prema srednjoj vrednosti temperature.



Slika 38.3

Ovo je bolja fizička postavka od one koja se koristi kod klasičnog modela, kod koga se akumulacija toplote svodi na akumulaciju u jednoj tački. Na osnovu fizičkih postavki modifikovanog modela i odgovarajućeg integralnog računa se dolazi do diferencijalne jednačine prema kojoj se crta šema modifikovanog RC-T toplotnog člana. Ona je prikazana na slici 38.3.  $\theta_z$  predstavlja porast srednje temperature dela zida u odnosu na referentnu temperaturu, a  $\theta$  pomoćnu proračunsku vrednost.

Prema toplotnoj šemi kompletnog sistema (slika 38.4), mogu se napisati jednačine (diferencijalne i algebarske) matematičkog modela (izrazi (38.16) - (38.20)).



Slika 38.4

$$P = C_p \frac{d\theta_p}{dt} + \frac{\theta_p - \theta_1}{R + R_{\alpha 1}} \quad (38.16)$$

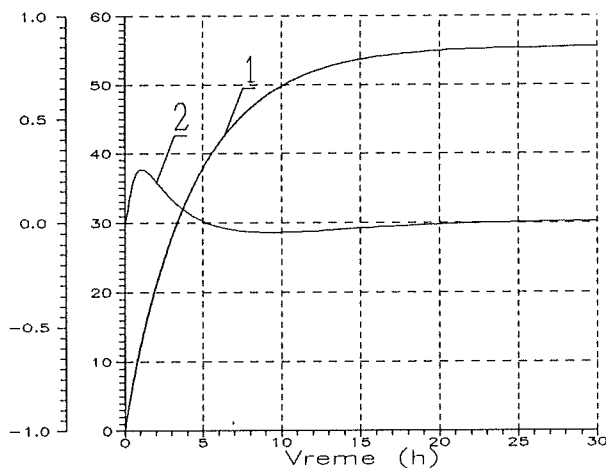
$$\frac{\theta_p - \theta_1}{R_{\alpha 1} + R} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2R} = \frac{\theta_1 - \theta_{z1}}{-\frac{R}{6}} \quad (38.17)$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_{z1}}{-\frac{R}{6}} = C \frac{d\theta_{z1}}{dt} \quad (38.18)$$

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{2R} - \frac{\theta_2}{R_{\alpha 2} + R} = \frac{\theta_2 - \theta_{z2}}{-\frac{R}{6}} \quad (38.19)$$

$$\frac{\theta_2 - \theta_{z2}}{-\frac{R}{6}} = C \frac{d\theta_{z2}}{dt} \quad (38.20)$$

Izražavanjem srednjih temperatura delova zida  $\theta_{z1}$  i  $\theta_{z2}$  preko proračunskih temperatura  $\theta_1$  i  $\theta_2$ , iz izraza (38.17) i (38.19), i uvrštavanjem u izraze (38.18) i (38.20), dolazi se do sistema od tri linearne diferencijalne jednačine. Rešavanjem ovog sistema se dobija vremenska promena temperature prostora i proračunskih temperatura  $\theta_1$  i  $\theta_2$ . Rezultat izvršenja računarskog simulacionog programa je prikazan na



Slika 38.5

slici 38.5. Na slici su date krive dobijene simulacijama zasnovanim na

klasičnom i modifikovanom RC-T članu. Zbog bliskih vrednosti, odnosno nedovoljne rezolucije, ne vidi se razlika između vrednosti temperatura, tako da su obe zavisnosti prikazane krivom 1. Razlika temperatura prostora, dobijenih za klasičan i za modifikovani član, je prikazana u uvećanoj razmeri (datoj na levoj ordinatnoj osi) krivom 2.

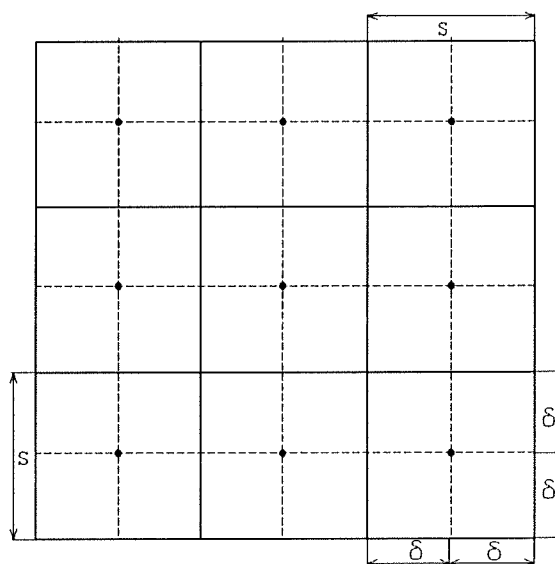
**39.** U podužnoj osi bloka od magnezijuma, kvadratnog poprečnog preseka dimenzija (1m x 1m), generiše se energija konstantne podužne snage 500 W/m. Temperatura ambijenta iznosi  $\vartheta_a = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a koeficijent prelaska toplote sa površi omotača bloka na vazduh  $\alpha = 10\text{ W}/(\text{m}^2\text{ K})$ . Toplotna provodnost magnezijuma je  $\lambda = 150\text{ W}/(\text{m K})$ , a specifični zapreminski toplotni kapacitet  $c\rho = 1.78 \cdot 10^6\text{ J}/(\text{m}^3\text{ K})$ .

Koristeći jednake toplotne otpore prenosu toplote provodjenjem i jednake toplotne kapacitete, postaviti toplotnu šemu koja sadrži 9 čvorova i iz koje se može odrediti temperatura u osi magnezijumskog bloka u stacionarnom i prelaznom režimu. Izračunati vrednosti svih elemenata šeme. Dužina bloka je dovoljno velika da se mogu zanemariti ivični efekti, odnosno problem se može posmatrati kao dvodimenzionalni.

### Rešenje:

Da bi se ispunio uslov zadatka, da toplotna šema sadrži 9 čvorova, sve jednake toplotne otpore prenosu toplote provodjenjem i sve jednake toplotne kapacitete, površ poprečnog preseka magnezijumskog bloka treba podeliti na 9 jednakih delova, kao što je to urađeno na slici 39.1.

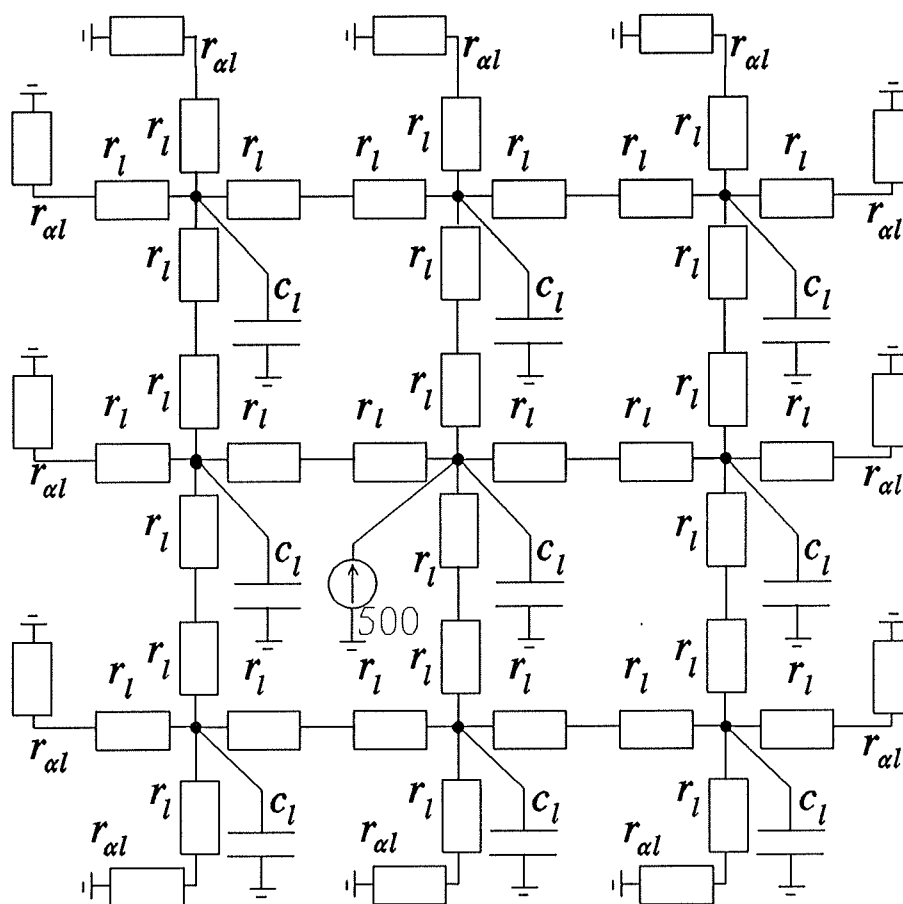
U slučaju dvodimenzionalnog prenosa toplote, deo za koji se usvaja aproksimacija da ima konstantnu temperaturu po zapremini i da je akumulisanje toplote skoncentrisano u jednoj tački, može se predstaviti RC – T članom prikazanim na slici IV.2 (u pravougaonom koordinatnom sistemu). Pri njegovom postavljanju, prenos toplote po jednoj ili



Slika 39.1

drugoj koordinati se posmatra nezavisno, kao da se kroz deo vrše dva jednosmerna prenosa toplote. U slučaju dugačkog bloka stalnog poprečnog preseka i stalnih graničnih uslova, pogodno je koristiti podužne vrednosti toplotnih otpora i kapaciteta. One se dobijaju množenjem otpora ( $R_x$  i  $R_y$ ), za koje su dati izrazi na slici IV.2 sa dužinom u pravcu podužne ose ( $h$ ), odnosno deljenjem kapaciteta ( $C$ ) sa dužinom u pravcu podužne ose ( $h$ ).

Odgovarajuća toplotna šema sa 9 čvorova je prikazana na slici 39.2. Izvor toplote je skoncentrisan u osi bloka, pa se izvor energije u toplotnoj šemi javlja samo u središnjem čvoru. Kao i za toplotne otpore i kapacitete, i za izvore toplote se u toplotnoj šemi usvaja podužna vrednost (podužna snaga generisanja toplote).



Slika 39.2

Vrednosti podužnih toplotnih otpora prenosu toplote provodjenjem ( $r_l$ ) se izračunavaju po izrazu

$$r_l = r h = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta}{S_p} h = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta}{s h} h = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta}{s} \quad (39.1)$$

i imaju vrednost

$$r_l = \frac{1}{150} \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{300} \frac{K}{m} \quad (39.2)$$

Vrednosti podužnih toplotnih kapaciteta ( $c_l$ ) se izračunavaju po izrazu

$$c_l = \frac{C}{h} = \frac{\rho c V}{h} = \frac{\rho c S_a h}{h} = \frac{\rho c s^2 h}{h} = \rho c s^2 \quad (39.3)$$

i imaju vrednost

$$c_l = 1.78 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1,98 \cdot 10^5 \frac{J}{K \cdot m} \quad (39.4)$$

Vrednosti podužnih toplotnih otpora prenosu toplote strujanjem sa površi omotača bloka ( $r_{al}$ ) se izračunavaju po izrazu

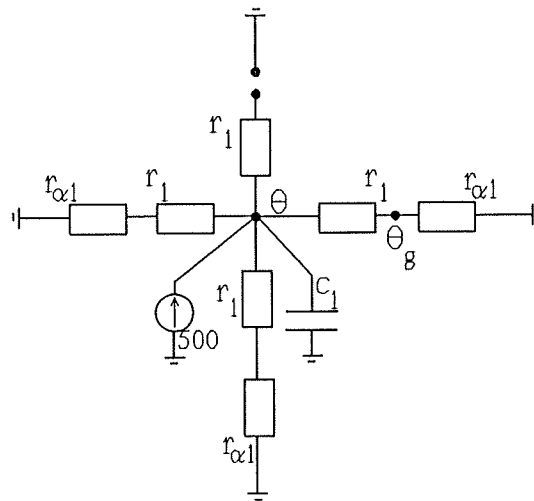
$$r_{al} = r_\alpha h = \frac{1}{\alpha S_p} h = \frac{1}{\alpha s h} h = \frac{1}{\alpha s} \quad (39.5)$$

i imaju vrednost

$$r_{al} = \frac{1}{10 \frac{1}{3}} = \frac{3}{10} \frac{K}{W \cdot m} \quad (39.6)$$

*Za samostalan rad, čitaocu se ostavlja rešavanje sličnog problema: postavljanje toplotne šeme iz koje se može odrediti temperatura u podužnoj osi opisanog bloka od magnezijuma koji se hladi strujanjem na tri granične pravougaone površi omotača bloka, dok je četvrta idealno toplotno izolovana. Pri tome u modelu treba koristiti jednake toplotne otpore prenosu toplote provodjenjem i najjednostavniju toplotnu šemu (sa jednim toplotnim kapacitetom). Blok je u početnom trenutku predstavljao izotermičku zapreminu temperature  $0^\circ\text{C}$ , dok temperatura ambijenta iznosi  $20^\circ\text{C}$ .*

*Toplotna šema ima izgled prikazan na slici 39.3. Vrednosti toplotnih otpora i kapaciteta iznose:  $r_l = 1 / 300 \text{ (K/W)/m}$ ,  $r_{al} = 1 / 10 \text{ (K/W)/m}$ ,  $c_l = 1,78 \cdot 10^6 \text{ (J/K)/m}$ . Ispod slike 39.3 je dat i simulacioni program, napisan u TUTSIM simulacionom programskom paketu [5]. Način pisanja simulacionog programa je opisan u sedmoj laboratorijskoj vežbi. Program je napisan za vreme izraženo u časovima.*



Slika 39.3

500	1 CON	
0.0344	2 GAI 1	
17.03	3 ATT 2, -4	
-20	4 INT 3	; nadtemperatura u osi
1.0333	5 ATT 4	; nadtemperatura graničnih površi

Izlazne veličine iz blokova 4 i 5 predstavljaju poraste temperatura u osi i na izolovanoj površi omotača bloka (blok 4) i na površima omotača hladjenim vazduhom (blok 5) u odnosu na temperaturu ambijenta. Vrednosti temperatura bi se dobile sabiranjem sa temperaturom ambijenta ( $20^{\circ}\text{C}$ ).



Primena analogije električnih i toplotnih pojava

U skladu sa objašnjenjem datim u uvodnom delu prethodnog poglavlja, između toplotnih i električnih pojava postoji analogija. Ona se ogleda u jednakosti matematičkih modela koji opisuju te pojave. To se može iskoristiti da se napravi analogni električni model toplotnog sistema. Onda se fizičke pojave mogu izučavati na električnom modelu, a zatim na osnovu analogije dobiti i sve odgovarajuće toplotne veličine.

Za "svodjenje" toplotnih veličina na električne i obrnuto, uvode se odgovarajući koeficijenti. Ovim koeficijentima se toplotne veličine dovode u realne granice električnih veličina. Pri tome se preko dimenzija koeficijenata reguliše i svodjenje jedinica toplotnih veličina na jedinice električnih.

Kod izbora svih elemenata električnog kola, pa i kod naponskih i strujnih izvora, uvek treba imati u vidu njihovu praktičnu ostvarljivost i potrebu da se za merenja koriste standardni merni instrumenti. Pri izboru elemenata kola, električne vrednosti ne smeju biti ni previše velike (kada bi nastao problem merne opreme i dimenzionisanja elemenata), ni previše male (kada bi se pojavili problemi merne opreme i nepovoljan odnos signal-šum).

Način uvodjenja koeficijenata će se objasniti na jednostavnom primeru koji je izložen u uvodnom delu prethodnog poglavlja. Kao bazne vrednosti svodjenja toplotnih na električne veličine se usvajaju tri vrednosti (na primer za toplotni i električni otpor ( $k_R$ ), toplotni i električni kapacitet ( $k_C$ ) i razliku temperatura i napon ( $k_U$ )). Svi ostali koeficijenti (za snagu i struju ( $k_P$ ), toplotno i električno vreme ( $k_t$ ), energiju i naelektrisanje ( $k_Q$ ), itd.) su po usvajanju baznih vrednosti svodjenja jednoznačno određeni.

Podelimo jednačinu (35.1) sa odnosom dva koeficijenta  $k_U/k_R$  (označimo ovaj odnos sa  $k_P$ ). Ona se tada svodi na oblik (34), u kome je izvršeno i proširenje člana u kome figuriše izvod razlike temperature, uvodjenjem koeficijenta  $k_C$ .

$$\frac{P}{k_P} = \frac{C^T}{k_C} \frac{d\frac{\theta}{k_U}}{d\frac{t}{k_R k_C}} + \frac{\frac{\theta}{k_U}}{\frac{R^T}{k_R}} \quad (34)$$

Prema jednačini (34) i jednačini ekvivalentnog električnog sistema (35), vidi se da je koeficijent svodjenja snage zagrevanja na struju jednak  $k_P$ , a koeficijent svodjenja toplotnog na električno vreme  $k_t = k_R k_C$ .

$$I = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} \quad (35)$$

**40.** Posmatrajmo jedan valjak prečnika  $D = 0,1$  m i dužine  $L = 1$  m koji je izradjen od materijala čije su toplotne osobine  $\lambda = 1$  W/(m K) i  $c \rho = 2 \cdot 10^6$  J/(m<sup>3</sup> K). Ovaj valjak je po svom omotaču idealno toplotno izolovan od okoline. Čeone strane (bazisi) se u jednom trenutku izlažu dejstvu vazduha koji prinudno struji, temperatura  $\vartheta_1 = 100^\circ\text{C}$  i  $\vartheta_2 = 200^\circ\text{C}$ . Koeficijenti prelaska toplote strujanjem između bazisa i vazduha temperature  $100^\circ\text{C}$ , odnosno bazisa i vazduha temperature  $200^\circ\text{C}$  iznose redom,  $\alpha_1 = 30$  W/(m<sup>2</sup> K) i  $\alpha_2 = 40$  W/(m<sup>2</sup> K). U trenutku kada započne strujanje vazduha temperatura valjka iznosi  $0^\circ\text{C}$ .

Predstaviti ovaj valjak električnim analognim modelom, pomoću koga bi se mogao proučavati toplotni proces. Na raspolaganju stoji  $N = 15$  RC–T elemenata sa otporima u horizontalnim granama, čija se vrednost može podešavati u opsegu 1 - 11 k $\Omega$  i kondenzatorom u vertikalnoj grani, sa opsegom podešavanja 500 - 1000 pF. Dati rešenje kod koga se, od raspoloživih 15, koristi 10 RC-T članova i rešenje kod koga se koriste svi raspoloživi elementi. Pored RC-T članova, raspoloživa su i dva promenljiva otpornika (opsega 1-11 k $\Omega$ ) i dva promenljiva naponska izvora jednosmernog napona (do 12 V).

### Rešenje:

Prema objašnjenju načina svodjenja toplotnih sistema na električni model, izloženom u uvodnom delu poglavlja, prvo će se odrediti konstante svodjenja toplotnih na električne veličine. Ako se valjak podeli na 10 slojeva, vrednosti otpora i kapaciteta toplotnih RC–T elemenata, koji karakterišu provodjenje ( $R^T$ ) i akumulaciju energije ( $C^T$ ) u svakom od slojeva valjka (kao u uvodnom delu prethodnog poglavlja), iznose:

$$\frac{R^T}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{L}{\lambda S} = \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{4}{0,01 \pi} = \frac{10^2}{15,7} \frac{K}{W} \quad (40.1)$$

$$C^T = \frac{1}{10} C \rho L S = \frac{1}{10} 2 \cdot 10^6 \frac{0,01 \pi}{4} = 15,7 \cdot 10^2 \frac{J}{K} \quad (40.2)$$

Otpori prelasku toplote strujanjem između bazisa i valjka, koji odgovaraju koeficijentima prelaska toplote  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , iznose

$$R_{\alpha 1}^T = \frac{1}{\alpha_1 S} = \frac{1}{30 \frac{0,01 \pi}{4}} = \frac{10^2}{23,6} \frac{K}{W} \quad (40.3)$$

$$R_{\alpha 2}^T = \frac{1}{\alpha_2 S} = \frac{1}{40 \frac{0,01 \pi}{4}} = \frac{10^2}{31,4} \frac{K}{W}. \quad (40.4)$$

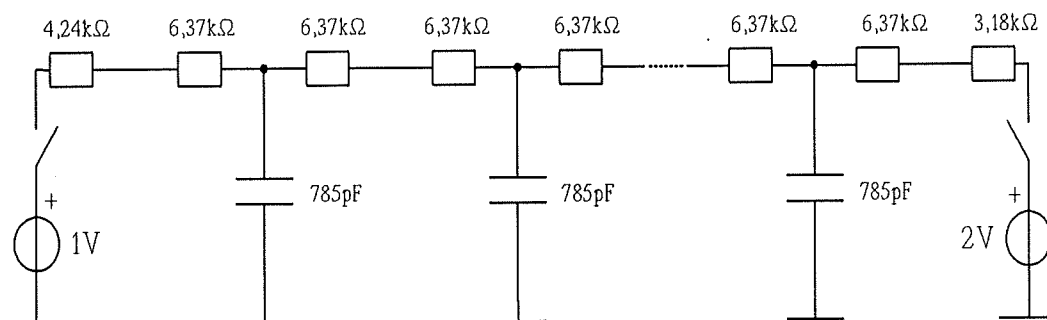
Vrednosti  $k_R$ ,  $k_C$  i  $k_U$  se usvajaju tako da vrednosti ekvivalentnog električnog otpora, kapaciteta i napona budu realne i u raspoloživom opsegu. Prema opsegu raspoloživih električnih otpornosti se usvaja koeficijent  $k_R = 10^{-3} (K/W)/\Omega$ . Sa njime se dobijaju vrednosti električnih otpora kojima se predstavlja prenos toplote provodjenjem kroz polovinu jednog dela valjka i strujanjem izmedju bazisa i vazduha:  $R^E = 6,37 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{\alpha I}^E = 4,24 \text{ k}\Omega$  i  $R_{\alpha 2}^E = 3,18 \text{ k}\Omega$ .

Prema opsegu raspoloživih električnih kapaciteta se usvaja koeficijent  $k_C = 2 \cdot 10^{12} (J/K)/F$ . Sa njime se dobijaju vrednosti električnih kapaciteta kojima se predstavlja akumulisanje energije u jednom delu valjka:  $C^E = 785 \text{ pF}$ .

Vrednost  $k_U$  se usvaja tako da naponi naponskih generatora, kojima se predstavlja razmena energije izmedju bazisa i vazduha, budu 1 V (čemu odgovara porast temperature vazduha temperature 100 °C u odnosu na usvojenu referentnu vrednost od 0 °C od 100 K), odnosno 2 V (čemu odgovara porast temperature vazduha temperature 200 °C od 200 K). Ovim vrednostima naponskih generatora odgovara vrednost koeficijenta  $k_U = 100 \text{ K/V}$ .

Na osnovu usvojenih vrednosti koeficijenata  $k_R$ ,  $k_C$  i  $k_U$  izračunavaju se vrednosti preostala dva potrebna koeficijenta svodjenja:  $k_I = 10^5 \text{ W/A}$  i  $k_T = 2 \cdot 10^9$ .

Ekvivalentna električna šema je prikazana na slici 40.1.



Slika 40.1

Posle odredjivanja napona i struja u kolu sa slike 40.1, preko koeficijenata svodjenja se mogu dobiti analogne toplotne veličine u funkciji vremena. Naponi se množe sa konstantom  $k_U$  da bi se dobio porast temperatura, a struje sa konstantom  $k_I$  da bi se dobile snage. Pri tome se mora izvršiti i "preslikavanje" električnog vremena u vreme u toplotnom

sistemu, množenjem sa konstantom  $k_t$ . Primera radi, ako je vrednost napona u nekom trenutku snimane električne pojave ( $t^*$ ) jednak  $U^*$ , odgovarajući porast temperature ima vrednost  $k_U U^*$  u trenutki  $k_t t^*$ . Ovo je logično ako se ima u vidu da su toplotne pojave za nekoliko redova veličine sporije od električnih.

Postavljeni zadatak se mogao rešiti i primenom svih raspoloživih RC-T elemenata. Za iste koeficijente svodjenja, elementi ekvivalentnog električnog kola bi iznosili  $R^E = 6,37 \cdot 10/15 = 4,2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{\alpha 1}^E = 4,24 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{\alpha 2}^E = 3,18 \text{ k}\Omega$  i  $C^E = 785 \cdot 10/15 = 523,3 \text{ pF}$ . Za razliku od električnog kola čija je šema data na slici 40.1, koje sadrži 10 na red vezanih RC-T članova, ovo električno kolo bi sadržalo 15 RC-T električnih elemenata.

Grafička metoda za određivanje toplotnih gubitaka

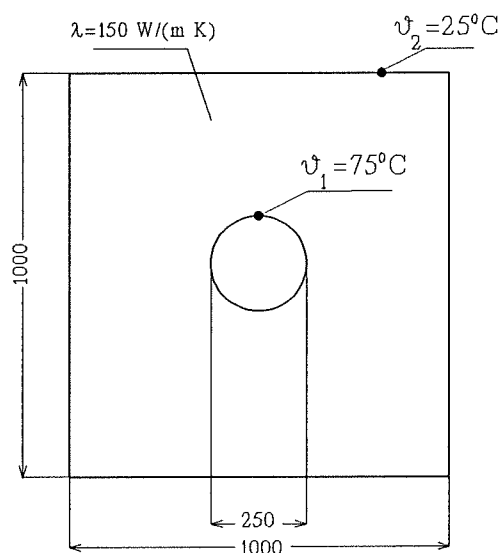
Grafička metoda za rešavanje stacionarnih problema toplotnog provodjenja, pre svega dvodimenzionalnih, se primenjuje u slučajevima kada se oni ne mogu rešavati analitičkim metodama. Grafička metoda se zasniva na crtanju izotermičkih linija i linija toplotne snage [2, 3], sledeći osnosno pravilo da one budu medjusobno upravne i da zbir nasparamnih stranica dobijenih figura bude približno jednak. U tom slučaju je moguće odrediti podužni toplotni otpor izmedju dve proizvoljne izotermičke linije (za razmatrani dvodimenzionalni problem), prema izrazu

$$r_l^t = \frac{1}{\lambda} \frac{N_T}{N_S}, \quad (36)$$

gde su:  $\lambda$  specifična toplotna provodnost,  $N_T$  broj izotermičkih linija (pri čemu se broji samo jedna od dve izotermičke linije izmedju kojih se određuje podužni toplotni otpor) i  $N_S$  broj linija toplotne snage. Određivanje toplotnog otpora, kao odnosa razlike temperatura izotermičkih površi i snage razmene energije izmedju njih, omogućava određivanje drugih relevantnih veličina karakterističnih za sistem u kome se odigrava analizirani prenos toplote.

**41.**

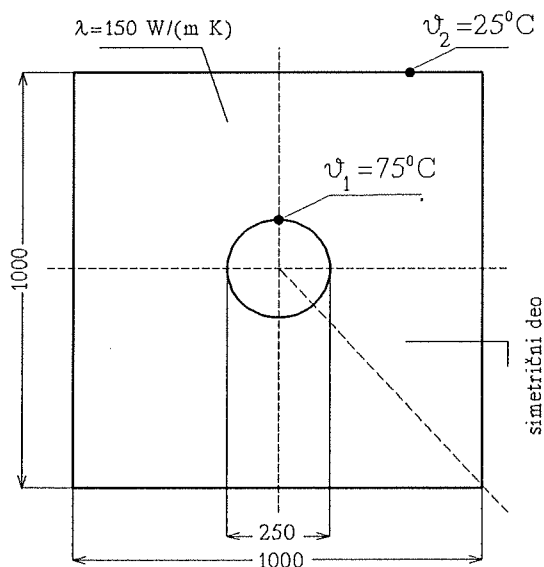
Rupa prečnika  $D = 0,25$  m je probušena kroz centar čvrstog tela kvadratnog poprečnog preseka stranice 1 m i dužine  $l = 2$  m. Specifična toplotna provodnost materijala od koga je napravljeno telo iznosi  $\lambda = 150$  W/(m K). Topli fluid koji protiče kroz rupu održava temperaturu unutrašnje površi na  $\vartheta_1 = 75$  °C, dok je temperatura spoljašnje površi omotača bloka  $\vartheta_2 = 25$  °C. Bazisi paralelopipednog bloka su dobro toplotno izolovani, pa se može smatrati da ne postoji podužni prenos toplote. Koristeći grafičku metodu [2, 3], odrediti snagu toplotnog provodjenja od unutrašnje ka spoljašnjoj površi. S obzirom da nema podužnog prenosa toplote, problem se može analizirati kao dvodimenzionalni.



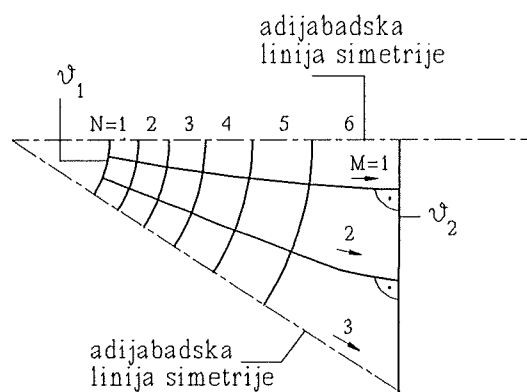
Slika 41.1

**Rešenje:**

Primena grafičke metode za određivanje snage toplotnog provodjenja između dve izotermičke površi se pojednostavljuje ukoliko postoje toplotne i geometrijske simetrije. Kod postavljenog problema, najmanji deo koji se "ponavlja" odgovara uglu od  $45^\circ$ . Stoga se zadatak može rešiti posmatranjem osmine poprečnog preseka (slika 41.2). Nadalje, zbog postojanja simetrije, vektor toplotne snage ne sadrži komponentu upravnu na granične linije posmatranog dela poprečnog preseka. Zbog toga su izotermičke linije upravne na granične linije dela. Posle definisanja simetrije, usvaja se broj izotermičkih linija koje se crtaju. On se bira proizvoljno, prema željenoj tačnosti - povećanje njihovog broja rezultuje povećanjem tačnosti grafičkog postupka. Usvajimo, na primer, da se pored graničnih izotermičkih linija crta još 5 izotermičkih linija. Po usvajanju broja izotermičkih linija, crtaju se izotermičke i linije toplotne snage. One se crtaju po kriterijumu "krivolinijskih kvadrata". To znači da linije toplotne snage treba da se seku sa izotermičkim linijama pod pravim uglom i da sve strane dobijenih figura budu jednake. Drugi zahtev najčešće nije moguće ispuniti, pa se on svodi na realniji uslov da zbir naspramnih stranica dobijenih figura bude jednak. Uobičajni postupak crtanja "krivolinijskih kvadrata" je da se prvo nacrtaju izotermičke linije, a zatim linije snage. O kriterijumu "krivolinijskih kvadrata" se mora voditi računa i prilikom crtanja izotermičkih linija. Ukoliko one nisu izvučene na pravilan način, nemoguće je nacrtati linije toplotne snage tako da se dobiju "krivolinijski kvadrati". Kao što se vidi na slici 41.3, izotermičke linije nisu međusobno podjednako udaljene. Rastojanje između susednih izotermičkih linija se povećava sa povećanjem rastojanja od centra.



Slika 41.2



Slika 41.3

Na osnovu slike 41.3 (odnosno broja izotermičkih i linija toplotne snage) i uočene simetrije, može se odrediti vrednost podužnog otpora prenosu toplote provođenjem, prema izrazu (36).  $N_T$  ima vrednost 6, a  $N_S 8 \cdot 3 = 24$ . Od dve linije toplotne snage koje se poklapaju sa graničnim linijama simetrije, u linije toplotne snage simetričnog dela se ubraja samo jedna, jer druga linija pripada susednoj osmini geometrije. Tražena vrednost snage se određuje prema izrazu

$$q = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{r'_l}{l}}, \quad (41.1)$$

odnosno

$$q = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{N_v}{N_T} \frac{1}{l}}. \quad (41.2)$$

Po zameni brojnih vrednosti se dobija

$$q = \frac{75 - 25}{\frac{1}{150} \frac{6}{8 \cdot 3} \frac{1}{2}} = 60 \text{ kW}. \quad (41.3)$$

Pri primeni grafičke metode je teško iz prvog pokušaja dobiti zadovoljavajuću mrežu "krivolinijskih kvadrata". Zbog toga je najčešće za sprovođenje postupaka potrebno učiniti nekoliko iteracija, što podrazumeva crtanje i izotermičkih linija i linija toplotne snage.

Grafički postupak ima dosta nedostataka u pogledu praktičnosti primene i tačnosti. U epohi razvoja računara i računarskih numeričkih metoda, on je izgubio značaj koji mu je nekada pripadao. Ipak, pored svih nedostataka, on se i danas ima smisla i može se koristiti za određivanje prve iteracije za raspodelu temperature.