PRENOS TOPLOTE

Opšti problemi prenosa toplote provodjenjem kroz toploprovodnu sredinu

Osnovne jednačine nestacionarnog prenosa toplote kroz toploprovodnu sredinu u kojoj postoje zapreminski rasporedjeni izvori toplote su:

I *Fourier*-ov zakon. On daje vezu izmedju površinske gustine snage provodjenja toplote (q_s) i gradijenta temperature (ϑ) i glasi

$$\boldsymbol{q}_s = -\lambda\, \boldsymbol{grad}\, \vartheta . \tag{1}$$

λ označava toplotnu provodnost materijalne sredine kroz koju se toplota prenosi provodjenjem.

II Opšta jednačina temperaturnog polja, koja za *Descartes*-ov, cilindrični i sferni koordinatni sistem, respektivno, glasi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + q_v = \rho\, c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\, r \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + q_v = \rho\, c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\, r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda \sin\theta \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + q_v = \rho\, c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \tag{4}$$

gde q_v predstavlja zapreminsku gustinu snage generisanja toplota, ρ gustinu, a c_p specifični maseni toplotni kapacitet. U slučaju konstantne toplotne provodnosti (nezavisne od temperature, što je odlika linearne toploprovodne sredine), opšta jednačina temperaturnog polja se može napisati u sažetoj formi,

$$\lambda\, \Delta \vartheta + q_v = \rho\, c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \tag{5}$$

gde *Laplace*-ov (Δ) operator ima poznat oblik za pojedine koordinatne sisteme.

Jedna velika klasa problema odredjivanja pojedinih veličina toplotnih procesa koji su od interesa u tehnici se rešava preko odredjivanja vremenske i/ili prostorne raspodele temperature u toploprovodnoj sredini. Do nje se može doći postavljanjem navedenih diferencijalnih jednačina, nalaženjem njihovog opšteg rešenja i odredjivanjem integracionih konstanti na bazi postojećih graničnih uslova. Neki zadaci iz toplotne tehnike se mogu rešiti i neposrednom primenom navedenih jednačina, bez odredjivanja raspodele temperatura. Izbor koordinatnog sistema, odnosno oblika jednačine, zavisi od geometrije problema. Integraciju diferencijalnih jednačina je nekada moguće vršiti direktno u odredjenim granicama, što može da predstavlja kraći put rešavanja od dobijanja opšteg rešenja diferencijalne jednačine, odredjivanja integracionih konstanti iz graničnih uslova i njihove zamene u opšte rešenje.

Postoje četiri osnovna tipa graničnih uslova. Oni će se ilustrovati na primerima jednodimenzionalnog prenosa toplote, kada je temperatura funkcija linearne koordinate x i vremena t - $\vartheta\ (x,\ t)$, za površ čija je x koordinata jednaka nuli:

1. granični uslov prvog tipa - površ konstantne temperature

$$\vartheta(0,t) = \vartheta_p; \tag{6}$$

2. granični uslov drugog tipa - površ konstantne snage razmene energije sa okolinom toploprovodne sredine; pozitivna vrednost q_s znači da se energija, preko površi, od okoline predaje telu, a negativna da se sa tela predaje okolini

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = q_s; \tag{7}$$

3. granični uslov trećeg tipa - adijabadska ili izolovana površ

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = 0; \tag{8}$$

4. granični uslov četvrtog tipa - razmena energije strujanjem (konvekcijom)

$$-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=0,t} = \alpha\left(\vartheta_\infty - \vartheta(0,t)\right). \tag{9}$$

U jednačini (9), α predstavlja koeficijent prelaska toplote strujanjem sa fluida temperature ϑ_∞ na graničnu površ. Sličan izraz važi i za hladjenje granične površi fluidom temperature ϑ_∞,

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0,t} = \alpha \left(\vartheta(0,t) - \vartheta_{\infty} \right), \tag{10}$$

gde sada α predstavlja koeficijent prelaska toplote strujanjem sa granične površi na rashladni fluid.

Napomena o označavanju temperatura

U knjizi su korišćene sledeće oznake:

ϑ *za temperaturu izraženu u ^0C (stepenima Celsius-ove skale),*

T *za temperatatturu izraženu u K (stepenima Kelvin-ove skale),*

θ *za razliku temperature i referentne temperature (za nju se najčešće usvaja temperatura ambijenta); drugim rečima, ova oznaka je usvojena za porast temperature u odnosu na referentnu vrednost; u tekstu zbirke za ovaj porast temperature se često koristi termin nadtemperatura; izražava se u K i*

$\Delta\theta$ *za razliku temperatura u bilo koje dve tačke; izražava se u K.*

1. Na bakarnoj ploči debljine $d = 2$ cm je izvršen eksperiment odredjivanja specifične toplotne provodnosti (λ). Pri temperaturama graničnih površi od 500 ^{0}C i 300 ^{0}C, izmerena je površinska gustina snage (toplotnog fluksa) provodjenja toplote od 3,633 MW/m^2. Poznato je da vrednost specifične toplotne provodnosti na temperaturi $\vartheta_{tab} = 150$ ^{0}C iznosi $\lambda_{tab} = 371{,}9$ W/(m K), kao i da funkcionalna zavisnost toplotne provodnosti od temperature ima oblik $\lambda(\vartheta) = \lambda_{tab}(1 + b(\vartheta - \vartheta_{tab}))$.

Odrediti vrednost konstante linearne promene specifične toplotne provodnosti (konstante b) za bakar.

Rešenje:

Na osnovu zakona prostiranja toplote provodjenjem (1), koji za konkretni slučaj jednodimenzionalnog provodjenja toplote i poznatog oblika zavisnosti specifične toplotne provodnosti od temperature ($\lambda(\vartheta)$) glasi

$$q_s = -\lambda_{tab}\left(1 + b\left(\vartheta - \vartheta_{tab}\right)\right)\frac{d\vartheta}{dx}, \tag{1.1}$$

može se uspostaviti veza izmedju poznate površinske gustine toplotnog fluksa i nepoznatog parametra b. Jednačina (1.1) se može direktno integraliti u granicama od jedne do druge granične površi. To znači da su granice odredjenog intervala za rastojanje $[0, d]$, a za temperature $[\vartheta_1, \vartheta_2]$. Integracijom i sredjivanjem izraza, dobija se linearna jednačina po nepoznatoj vrednosti b:

$$q_s \int_0^d dx = -\lambda_{tab} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(1 + b\left(\vartheta - \vartheta_{tab}\right)\right) d\vartheta \tag{1.2}$$

$$q_s d = \lambda_{tab}\left(\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) + \frac{b}{2}\left(\left(\vartheta_1 - \vartheta_{tab}\right)^2 - \left(\vartheta_2 - \vartheta_{tab}\right)^2\right)\right) \tag{1.3}$$

$$q_s = \lambda_{tab}\left(\left(\vartheta_1 - \vartheta_2\right) + \frac{b}{2}\left(\left(\left(\vartheta_1 - \vartheta_{tab}\right) - \left(\vartheta_2 - \vartheta_{tab}\right)\right)\left(\left(\vartheta_1 - \vartheta_{tab}\right) + \left(\vartheta_2 - \vartheta_{tab}\right)\right)\right)\right) \tag{1.4}$$

$$q_s \frac{d}{\vartheta_1 - \vartheta_2} = \lambda_{tab}\left(1 + \frac{b}{2}\left(\vartheta_1 - \vartheta_{tab} + \vartheta_2 - \vartheta_{tab}\right)\right) \tag{1.5}$$

Izračunata, ona iznosi $b = -9{,}2498\ 10^{-5}$ ^{0}C^{-1}.

2. Odrediti implicitno zadat oblik funkcionalne zavisnosti temperature od rastojanja od granične površi homogenog ravnog zida. Temperature izotermičkih graničnih površi zida iznose ϑ_1 i ϑ_2. Termička provodnost materijala od koga je napravljen zid linearno zavisi od temperature: $\lambda = \lambda_0 (1 + b\,\vartheta)$. Debljina zida je d.

Rešenje:

Problem se rešava korišćenjem zakona prostiranja toplote provodjenjem (1), koji za konkretni slučaj jednodimenzionalnog provodjenja toplote i date promene specifične toplotne provodnosti od temperature ($\lambda\,(\vartheta)$) glasi

$$q_s = -\lambda_0\,(1 + b\,\vartheta)\,\frac{d\vartheta}{dx}. \tag{2.1}$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (2.1) (integracijom od $x = 0$ do tekuće koordinate x, odnosno od ϑ_1 do $\vartheta\,(x)$), dolazi se do implicitno zadatog oblika funkcije $\vartheta\,(x)$ po promenljivoj x, u kome se javlja nepoznata vrednost snage prenosa toplote provodjenjem od jedne granične površi prema drugoj. Ova vrednost se može dobiti integracijom jednačine (2.1) u granicama od $x = 0$ do $x = d$, odnosno od ϑ_1 do ϑ_2, s obzirom da su poznate temperature graničnih površi.

Prvo će se odrediti vrednost snage prenosa toplote provodjenjem. Integracijom jednačine (2.1) u granicama od $x = 0$ do $x = d$,

$$q_s \int_{x=0}^{x=d} dx = -\lambda_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (1 + b\,\vartheta)\,d\vartheta, \tag{2.2}$$

dobija se

$$q_s d = \lambda_0 \left(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \frac{b}{2}\,(\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2) \right), \tag{2.3}$$

odnosno

$$q_s d = \lambda_0 (\vartheta_1 - \vartheta_2)\,(1 + \frac{b}{2}\,(\vartheta_1 + \vartheta_2)). \tag{2.4}$$

Zatim se, integracijom jednačine (2.1) u granicama od $x = 0$ do x,

$$q_s \int_{x=0}^{x} dx = -\lambda_0 \int_{\vartheta_1}^{\vartheta} (1 + b\,\vartheta)\, d\vartheta, \tag{2.5}$$

dobija

$$q_s x = \lambda_0 (\vartheta_1 - \vartheta)\ (1 + \frac{b}{2}(\vartheta_1 + \vartheta)). \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem izraza za snagu prenosa toplote provodjenjem iz izraza (2.4) u izraz (2.6), dobija se implicitno zadata funkcija temperature u funkciji rastojanja od granične površi temperature ϑ_1, s obzirom da su sve ostale veličine poznate:

$$\frac{\lambda_0}{d}(\vartheta_1 - \vartheta_2)\ (1 + \frac{b}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)) = \frac{\lambda_0}{x}(\vartheta_1 - \vartheta)\ (1 + \frac{b}{2}(\vartheta_1 + \vartheta)) \tag{2.7}$$

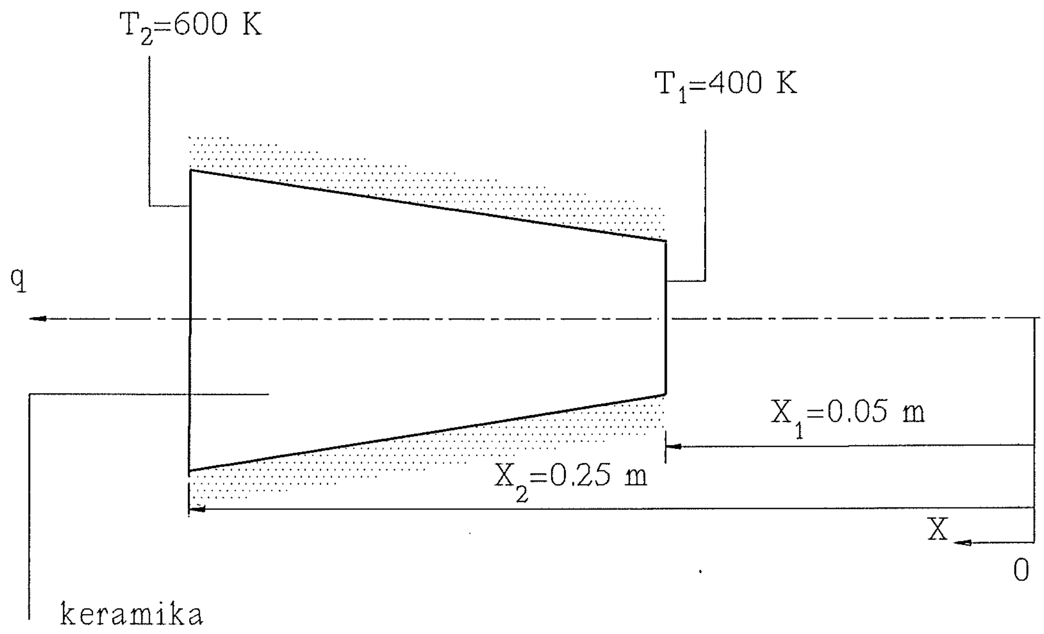
Prethodni izraz se može svesti na oblik kvadratne forme po temperaturi, koji glasi

$$\frac{b}{2}\vartheta^2 + \vartheta + px - (\vartheta_1 + \frac{b}{2}\vartheta_1^2) = 0, \tag{2.8}$$

gde je, zbog skraćivanja zapisa, uveden parametar

$$p = \frac{1}{d}(\vartheta_1 - \vartheta_2)\left(1 + b\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right). \tag{2.9}$$

3. Na slici 3.1 je prikazan konusni presek tela načinjenog od keramike.



Slika 3.1

Prečnik kružnog poprečnog preseka konusnog tela je promenljiv. U postavljenom koordinatnom sistemu zavisnost prečnika od rastojanja x je odredjena izrazom $D = 0{,}25\ x$. Bazis keramičkog tela manjeg prečnika se nalazi na rastojanju $x_1 = 50$ mm, a većeg na rastojanju $x_2 = 250$ mm od koordinatnog početka (slika 3.1). Temperature graničnih bazisa su konstantne i iznose $T_1 = 400$ K i $T_2 = 600$ K, a omotač je idealno toplotno izolovan od okoline.

a) Izvesti izraz za raspodelu temperature po x koordinati $T(x)$ u opštim brojevima. Može se smatrati da je izvod temperature po x koordinati konstantan u svakom od preseka po x osi.

b) Izračunati brojnu vrednost snage prenosa toplote provodjenjem od jednog do drugog bazisa.

Specifična toplotna provodnost keramike se u posmatranom temperaturnom opsegu ne menja značajno (3,64 W/(m K) za 400 K i 3,28 W/(m K) za 600 K), pa se može usvojiti da ona ima približno konstantnu vrednost od $\lambda = 3{,}46$ W/(m K).

Rešenje:

Jednačina provodjenja toplote (1), za cilindrični koordinatni sistem (r, φ, x), ima oblik

$$q_s = -\lambda\, grad T = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial r}r_0 + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\varphi_0 + \frac{\partial T}{\partial x}x_0\right). \tag{3.1}$$

Fluks vektora površinske gustine snage provodjenjem (q_s) predstavlja snagu (q), čija je vrednost konstantna u svakom od preseka po x osi:

$$q = \iint_S q_s\, ds \tag{3.2}$$

Zbog nepromenljivosti snage prenosa toplote provodjenjem kroz svaki od preseka po x osi i promenljivosti vrednosti njene površinske gustine, sve jednačine treba bazirati na snazi prenosa toplote provodjenjem. Za površi kroz koje se računa fluks vektora q_s je pogodno usvajati krugove upravne na osu x (oni predstavljaju presečne površi po x osi). Ort vektora ovih površi se poklapa sa ortom x_0. Uz usvojenu pretpostavku da je vrednost izvoda temperature po x koordinati konstantan po poprečnom preseku, iz izraza (3.1) i (3.2) se dolazi do snage q:

$$q = -\lambda\, S\,\frac{dT}{dx} \tag{3.3}$$

Posle zamene izraza za površinu, za $D = a\,x$, koji glasi

$$S = \frac{\pi\, a^2 x^2}{4}, \tag{3.4}$$

u izraz (3.3), dobija se

$$\frac{4\,q\,dx}{\pi\, a^2 x^2} = -\lambda\, dT. \tag{3.5}$$

Integracijom od x_1 do x, odnosno od T_1 do $T(x)$, pri čemu su q i λ konstantni,

$$\frac{4\,q}{\pi\, a^2}\int_{x_1}^{x}\frac{dx}{x^2} = -\lambda\int_{T_1}^{T} dT, \tag{3.6}$$

i rešavanjem dobijene jednačine po T(x), dobija se izraz

$$T(x) = T_1 - \frac{4\,q}{\pi\, a^2 \lambda}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}\right). \tag{3.7}$$

Prethodna jednakost važi i za $x = x_2$, kada glasi

$$T_2 = T(x = x_2) = T_1 - \frac{4q}{\pi a^2 \lambda} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right). \tag{3.8}$$

Rešavanjem prethodne jednačine po q, dobija se izraz za toplotni fluks prenosa toplote provodjenjem od površi 1 ka površi 2, koji glasi

$$q = \frac{\pi a^2 \lambda (T_1 - T_2)}{4 (\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2})}. \tag{3.9}$$

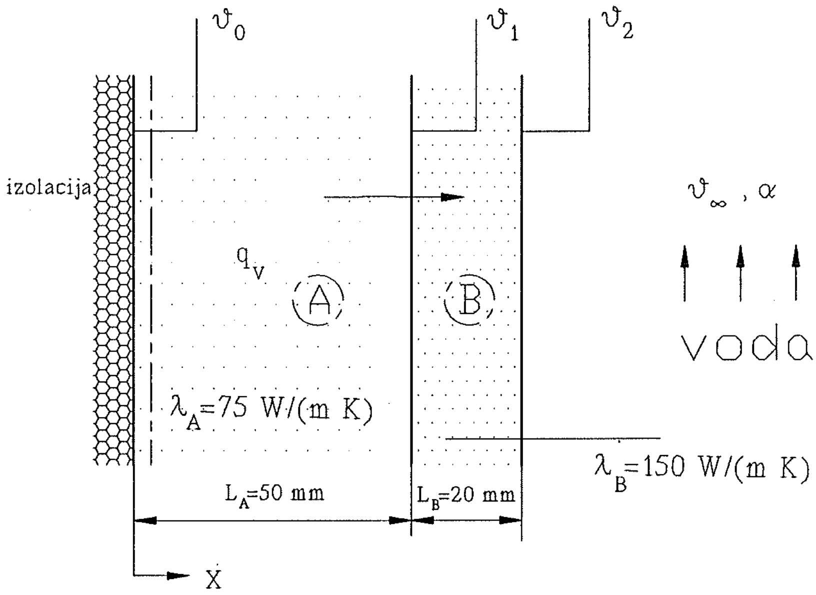
a) Uvrštavanjem izraza za snagu q (3.9) u izraz (3.7), dobija se traženi izraz za raspodelu temperature duž posmatranog konusa:

$$T(x) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}} \tag{3.10}$$

b) Vrednost toplotnog fluksa koji se provodjenjem prenosi od površi 1 ka površi 2 se dobija izračunavanjem prema izrazu (3.9). Ona iznosi

$$q = -2{,}123\,W. \tag{3.11}$$

4. Ravan zid se sastoji iz dva sloja, izradjena od različitih materijala A i B. U sloju A se ravnomerno generiše toplota zapreminskom gustinom snage $q_v = 1{,}5 \cdot 10^6$ W/m^3. Dimenzije i toplotne provodnosti slojeva su date na slici 4.1. Granična površ sloja A je dobro toplotno izolovana, a granična površ sloja B se hladi vodom temperature $\vartheta_\infty = 30$ ^{0}C, uz koeficijent prelaska toplote strujanjem $\alpha = 1000$ W/(m^2 K). Skicirati raspodelu temperature duž ose x u stacionarnom stanju. Odrediti temperaturu granične izolovane površi sloja A (ϑ_0) i temperaturu granične hladjene površi sloja B (ϑ_2).



Slika 4.1

Rešenje:

Da bi se odredile tražene vrednosti temperatura i skicirala raspodela temperature duž ose x, potrebno je rešiti opštu jednačinu temperaturnog polja (5) u *Descartes*-ovom koordinatnom sistemu, za slučaj jednodimenzionalnog stacionarnog prostiranja toplote provodjenjem, uz postavljene granične uslove. U opštoj jednačini za linearnu toploprovodnu sredinu (5), izvod temperature po vremenu je jednak nuli, a *Laplace*–ov operator se svodi na izvod po jednoj (x) koordinati, pa ona postaje

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = -\frac{q_v}{\lambda}. \tag{4.1}$$

Njeno rešenje, za sloj A, je

$$\vartheta(x) = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{4.2}$$

Integracione konstante će se odrediti iz graničnih uslova. Za sada je poznat samo jedan, da je izvod temperature u tački $x = 0$ jednak nuli (izraz (8)). Ovaj granični uslov se dobija iz energetskog bilansa primenjenog na tanak granični sloj zida uz toplotnu izolaciju. Snaga generisanja toplote u ovom sloju se, zbog njegove male debljine, može zanemariti u odnosu na snagu razmene toplote provodjenjem sa okolnim slojevima. S obzirom da nema razmene energije sa leve strane, koja je idealno toplotno izolovana, energetski bilans se svodi na uslov da je snaga razmene energije provodjenjem toplote sa susednim slojem zida jednaka nuli, odnosno da je izvod temperature $\partial\vartheta/\partial x$ za $x = 0$ jednak nuli (prema obliku izraza (1) za jednodimenzionalni prenos toplote). Na osnovu takvog uslova se dobija da je integraciona konstanta C_1 jednaka nuli. Drugi granični uslov se može odrediti tek pošto se sprovede analiza prostiranja toplote kroz sloj B. Ideja je da se odredi temperatura granične površi izmedju slojeva A i B, kao zbir temperature vode i padova temperatura u konvektivnom graničnom sloju vode i na sloju B.

Za rešavanje ovog zadatka i onih koji slede, pogodno je uvesti pojam toplotnog otpora. Toplotni otpor je jednak odnosu razlike temperatura (dva fluida, dve površi, površi i fluida) i snage razmene toplote izmedju njih. Pri tome, u materijalnoj sredini izmedju fluida, površi, odnosno fluida i površi nema rasporedjenih izvora toplote.

Rešavanjem opšte jednačine temperaturnog polja (5) za slučaj jednodimenzionalnog stacionarnog prenosa toplote provodjenjem, bez izvora energije po zapremini, uz granične uslove konstantne temperature površi, dobija se raspodela temperature duž ravnog homogenog zida. Do toplotnog otpora provodjenju toplote izmedju površi se dolazi deljenjem razlike temperatura sa snagom provodjenja toplote, dobijenom iz izraza za raspodelu temperatura, primenom izraza (1) za jednodimenzionalni slučaj. Primenom ovog postupka se dobija izraz za toplotni otpor, koji za sloj B glasi

$$R_p^T = \frac{1}{\lambda_B}\frac{L_B}{S}. \tag{4.3}$$

S obzirom da se kroz sloj B u stacionarnom stanju toplota prenosi provodjenjem, a u njemu nema izvora toplote, temperature ϑ_1 i ϑ_2 su povezane izrazom

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = R_p^T\, q, \tag{4.4}$$

gde je q snaga toplotnog provodjenja kroz sloj B, koja je jednaka ukupnoj snazi kojom se toplota generiše u sloju A, a R_p^T toplotni otpor provodjenju toplote kroz sloj B. Temperatura u sloju B od ϑ_1 do ϑ_2 opada linearno duž pravca provodjenja toplote. Do ovog zaključka se jednostavno dolazi matematički, rešavanjem jednačine (4.1) za sloj B, pri čemu je $q_v = 0$.

Temperatura ϑ_2 se odredjuje iz graničnog uslova za površ sloja B sa koje se energija odvodi strujanjem. Strujanjem se odvodi ukupna energija koja se generiše u sloju A ($q_v\, V = q_v\, L_A\, S$), što se prikazuje izrazom

$$q_v L_A S = \alpha S (\vartheta_2 - \vartheta_\infty). \tag{4.5}$$

Iz njega se odredjuje temperatura ϑ_2. Njena vrednost iznosi

$$\vartheta_2 = \frac{1{,}5\cdot 10^6\ 50\cdot 10^{-3}}{1000} + 30 = 105^0C. \tag{4.6}$$

Uvrštavanjem u jednačinu (4.4) izraza za snagu ukupnog generisanja toplote ($q = q_v\, V = q_v\, L_A\, S$) i toplotnog otpora dobija se izraz za temperaturu ϑ_1, koji glasi

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \frac{q_v L_A L_B}{\lambda_B}. \tag{4.7}$$

Izračunata vrednost temperature ϑ_1 iznosi

$$\vartheta_1 = 105 + \frac{1{,}5\cdot 10^6\ 50\cdot 10^{-3}\ 20\cdot 10^{-3}}{150} = 115^0C. \tag{4.8}$$

Sada se može odrediti i druga integraciona konstanta (C_2) u izrazu za raspodelu temperature u sloju A (4.2), iz uslova

$$\vartheta(x = L_A) = \vartheta_1. \tag{4.9}$$

Njena vrednost iznosi

$$C_2 = \frac{q_v}{\lambda_a}\frac{L_A^2}{2} + \vartheta_1. \tag{4.10}$$

Uvrštavanjem vrednosti integracionih konstanti u izraz (4.2), dolazi se do izraza za raspodelu temperature u sloju A. On glasi

$$\vartheta(x) = \frac{q_v}{\lambda_a}\frac{L_A^2}{2} + \vartheta_1 - \frac{q_v}{\lambda_a}\frac{x^2}{2}. \tag{4.11}$$

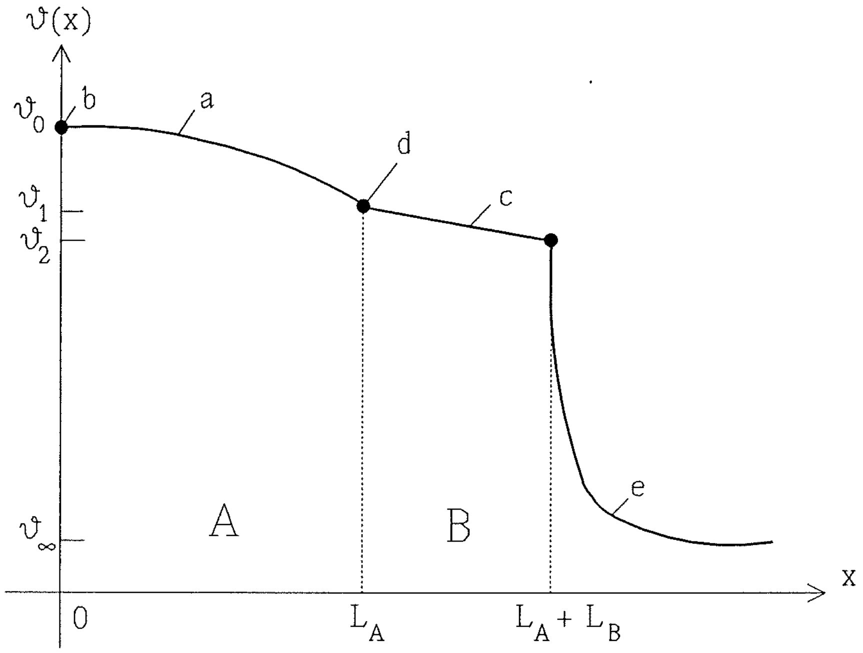
Temperature izolovane površi ϑ_0 se izračunava prema izrazu

$$\vartheta_0 = \vartheta(x=0) = \frac{q_v}{\lambda_a}\frac{L_A^2}{2} + \vartheta_1 \tag{4.12}$$

i iznosi

$$\vartheta_0 = \frac{1{,}5 \cdot 10^6}{75}\,\frac{(50 \cdot 10^{-3})^2}{2} + 115 = 140^0 C. \tag{4.13}$$

Na slici 4.2 je skicirana promena temperature duž x ose.



Slika 4.2

Uočimo neke bitne detalje prikazane na slici 4.2:

a) temperatura u sloju A se menja po paraboli "okrenutoj na gore",

b) izvod temperature $\partial\vartheta/\partial x$ je jednak nuli na graničnoj površi koja je idealno toplotno izolovana,

c) temperatura u sloju B linearno opada sa rastojanjem,

d) na granici slojeva A i B dolazi do promene izvoda temperature i

e) temperatura u graničnom sloju (za odvodjenje toplote strujanjem), zbog njegove male debljine, ima veliki gradijent.

5. Zadnje staklo putničkog automobila, debljine 8 mm i visine 0,5 m sadrži u sebi homogeno raspodeljene grejne provodnike, zbog čega se može smatrati da je snaga generisanja toplote ravnomerna po zapremini stakla. Posmatra se stacionarno stanje pri kome je temperatura unutrašnjosti kola 10 ^{0}C, temperatura okolnog vazduha -10 ^{0}C i efektivna temperatura neba, kao površi sa kojom se energija razmenjuje zračenjem, -33 ^{0}C. Koeficijent prelaska toplote strujanjem sa vazduha u kolima na staklo iznosi 2,81 W/(m^{2}K), a sa spoljašnje površi stakla na vazduh ambijenta 41,6 W/(m^{2}K). Toplotna provodnost stakla je 1,4 W/(m K), a emisivnost 0,9. Odrediti vrednost zapreminske gustine snage generisane toplote, da bi se unutrašnja površ stakla održavala na 15 ^{0}C.

Napomene:

- može se usvojiti da staklo razmenjuje energiju strujanjem sa vazduhom u kolima i vazduhom ambijenta i zračenjem sa površi neba,

- razmena energije zračenjem izmedju stakla i unutrašnjosti automobila se može zanemariti i

- razmena energije zračenjem izmedju spoljašnje površi stakla i neba se može razmatrati kao razmena energije izmedju površi temperature T_1 koja se nalazi unutar tela beskonačno velike površi temperature T_2; ona je odredjena izrazom

$$q_{12} = \varepsilon\, \sigma_c \,(T_1^4 - T_2^4)\,, \tag{5.1}$$

gde je σ_c = 5,67 $\cdot$ 10^{-8} W/(m^2 K^4), a ε označava emisivnost površi (o razmeni energije zračenjem će biti reči u sledećim delovima knjige).

Rešenje:

Diferencijalna jednačina koja odgovara jednodimenzionalnom stacionarnom provodjenju toplote uz prisustvo zapreminski rasporedjenih izvora se dobija iz opšte jednačine temperaturnog polja za linearnu sredinu (5) i glasi

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = -\frac{q_v}{\lambda}. \tag{5.2}$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine (5.2), za slučaj da su zapreminski izvori ravnomerno rasporedjeni, glasi

$$\vartheta(x) = -\frac{q_v}{2\,\lambda}\,x^2 + C_1\,x + C_2. \tag{5.3}$$

Konstante C_1 i C_2 se odredjuju iz graničnih uslova. Za razmatrani slučaj oni glase

$$-\lambda\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = \alpha_u\,(\vartheta_{uk} - \vartheta_{ups}) \tag{5.4}$$

i

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_{ups}, \tag{5.5}$$

gde ϑ_{uk} označava temperaturu unutrašnjosti kola, a ϑ_{ups} temperaturu unutrašnje površi stakla. Iz ovih graničnih uslova se odredjuju integracione konstante

$$C_1 = -\frac{\alpha_u}{\lambda}\,(\vartheta_{uk} - \vartheta_{ups}) \tag{5.6}$$

i

$$C_2 = \vartheta_{ups}. \tag{5.7}$$

Konačno, izraz za raspodelu temperature u staklu glasi

$$\vartheta(x) = -\frac{q_v}{2\lambda}x^2 - \frac{\alpha_u\,(\vartheta_{uk} - \vartheta_{ups})}{\lambda}x + \vartheta_{ups}. \tag{5.8}$$

Zapreminska gustina generisane toplote se može odrediti na osnovu energetskog bilansa za granični sloj stakla prema ambijentu, koji glasi

$$-\lambda\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = \alpha_s\,(\vartheta_{sps} - \vartheta_{amb}) + \varepsilon\,\sigma_c\,(T_{sps}^{\,4} - T_{neba}^{\,4}), \tag{5.9}$$

gde ϑ_{sps} označava temperaturu spoljašnje površi stakla (prema ambijentu), a ϑ_{amb} temperaturu ambijenta. Iz izraza za raspodelu temperature (5.8) sledi

$$-\lambda\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=L} = q_v L + \alpha_u\,(\vartheta_{uk} - \vartheta_{ups}), \tag{5.10}$$

što posle smene u (5.9) daje

$$q_v L = \alpha_s\,(\vartheta_{sps} - \vartheta_{amb}) - \alpha_u\,(\vartheta_{ups} - \vartheta_{uk}) + \varepsilon\,\sigma_c\,(T_{sps}^{\,4} - T_{neba}^{\,4}). \tag{5.11}$$

Temperatura spoljašnje površi stakla se može dobiti iz izraza (5.8) za $x = L$:

$$\vartheta_{sps} = -\frac{q_v}{2\lambda} L^2 - \frac{\alpha_u(\vartheta_{uk} - \vartheta_{ups})}{\lambda} L + \vartheta_{ups} \qquad (5.12)$$

Izraz (5.12) predstavlja drugu vezu (pored jednačine (5.11)) izmedju temperature spoljašnje površi stakla i zapreminske gustine snage generisanja toplote. Uvrštavanjem brojnih vrednosti u jednačinu (5.12) i njenim rešavanjem po q_v, dobija se

$$q_v = 43750\,(T_{sps} - 288{,}1)\,. \qquad (5.13)$$

Zamenom izraza (5.13) u izraz (5.11), dobija se jednačina iz koje se može odrediti vrednost temperature spoljašnje površi stakla. Posle zamene svih brojnih vrednosti, dolazi se do sledeće jednačine po apsolutnoj temperaturi spoljašnje površi stakla:

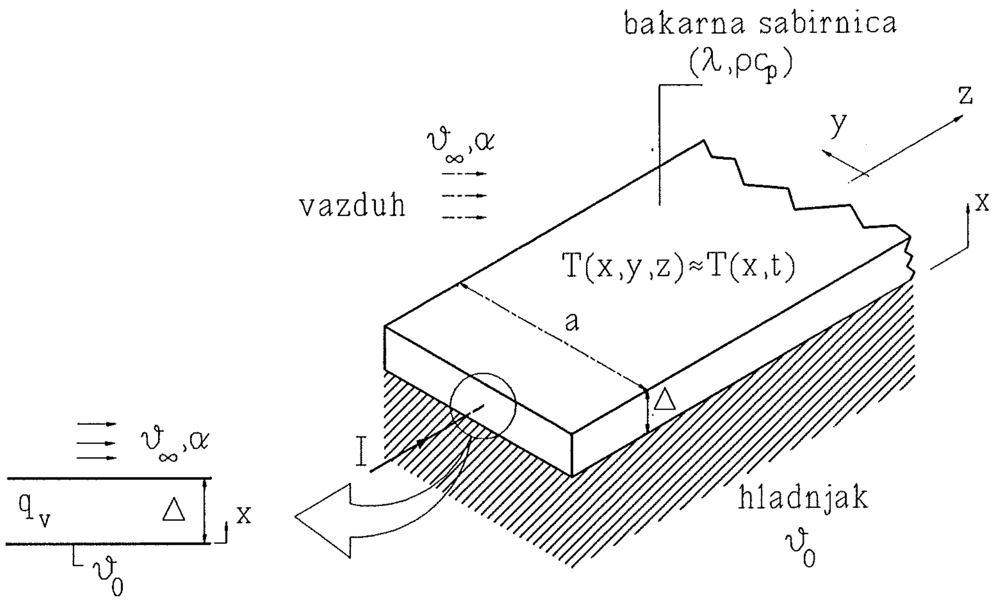
$$\begin{aligned} -\,43745\,(T_{sps} - 288{,}1)\,0{,}008 = \\ 41{,}6\,(T_{sps} - 263) + 2{,}81\,(288 - 283) + \\ 0{,}9\;5{,}67\cdot 10^{-8}\,(T_{sps}^{\;4} - 240^4) \end{aligned} \qquad (5.14)$$

Rešavanjem jednačine četvrtog stepena (5.14) dobija se rešenje $T_{sps} = 285$ K. Zamenom ove vrednosti u jednačinu (5.13), dobija se tražena vrednost zapreminske gustine snage generisane toplote. Izračunata, ona iznosi $q_v = 136$ kW/m^3.

6. Dugačka bakarna sabirnica pravougaonog poprečnog preseka, čija je širina a mnogo veća od debljine Δ, jednom svojom površi je pričvršćena za hladnjak. Temperature sabirnice i hladnjaka su jednake temperaturi ambijenta, koja iznosi ϑ_0. U jednom trenutku kroz sabirnicu počinje da protiče električna struja, usled čega se generišu gubici zapreminske gustine snage q_v. Istovremeno, sabirnica počinje da se hladi fluidom temperature ϑ_∞ koji protiče preko njene površi, pri čemu koeficijent prelaska toplote strujanjem iznosi α (slika 6.1). Temperatura površi kojom je sabirnica pričvršćena za hladnjak je konstantna i iznosi ϑ_0. Postaviti diferencijalnu jednačinu čijim se rešavanjem može dobiti vremenska i prostorna raspodela temperature sabirnice. Definisati početne i granične uslove za fukciju temperature.

S obzirom da je $a >> \Delta$, ivični efekti se mogu zanemariti, tako da se može smatrati da se vrši jednodimenzionalni prenos toplote.

Poznata je vrednost specifične toplotne provodnosti (λ) i specifičnog zapreminskog toplotnog kapaciteta ($\rho\ c_p$) bakra.



Slika 6.1

Rešenje:

Tražena diferencijalna jednačina se dobija iz opšte jednačine temperaturnog polja (5), napisane u *Descartes*-ovom koordinatnom sistemu, koja glasi

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{\rho\, c_p}{\lambda} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \tag{6.1}$$

Uz učinjene pretpostavke, izvodi funkcije temperature po y i z koordinatama su jednaki nuli, zbog čega se prethodna diferencijalna jednačina svodi na oblik

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_v}{\lambda} = \frac{\rho\, c_p}{\lambda} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \tag{6.2}$$

Početni uslov je da je temperatura bakarne sabirnice u trenutku $t = 0$ iznosila ϑ_0:

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_0, \tag{6.3}$$

pri čemu $x \in [0, \Delta]$.

Granični uslovi da se temperatura površi sabirnice na hladnjaku održava na konstantnoj vrednosti i da se druga granična površ hladi fluidom matematički se iskazuju sa

$$\vartheta(0,t) = \vartheta_0 \tag{6.4}$$

i

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\Delta} = \alpha(\vartheta(\Delta,t) - \vartheta_\infty). \tag{6.5}$$

7. Raspodela temperature duž koordinate x $(0 \leq x \leq L)$ jednog zida debljine $l = 1$ m u jednom trenutku odredjena je izrazom $\vartheta(x) = a + b\,x + c\,x^2$, gde je x izraženo u metrima, a konstante imaju vrednosti: $a = 900$ ^{0}C, $b = -300$ ^{0}C/m i $c = -50$ ^{0}C/m^2.

Po zapremini zida se generiše toplota stalne zapreminske gustine snage od $q_v = 1000$ W/m^3. Površina zida je 10 m^2, a njegove toplotne karakteristike su opisane vrednostima gustine $\rho = 1600$ kg/m^3, specifične toplotne provodnosti $\lambda = 40$ W/(m K) i specifičnog masenog toplotnog kapaciteta $c_p = 4$ kJ/(kg K).

Odrediti:

a) snagu kojom se energija u posmatranom trenutku sa jedne strane ($x = 0$) predaje zidu i snagu kojom se energija u posmatranom trenutku sa druge strane ($x = 1$ m) odvodi sa zida,

b) snagu kojom se energija akumulira u zidu u posmatranom trenutku i

v) brzinu vremenske promene temperature izotermičkih površi u posmatranom trenutku za koordinate $x = 0$, 0,25 i 0,5 m.

Rešenje:

a) Do traženih snaga se dolazi primenom zakona o održanju energije na tanke granične slojeve zida (za $x = 0$ i $x = 1$ m). Zbog male debljine tih slojeva i konačne vrednosti zapreminske gustine generisane toplote u njemu, u energetskom bilansu figurišu samo snage razmene energije sa okolinom zida i provodjenjem ka ostatku zida. Snaga provodjenja se odredjuje prema izrazu koji se postavlja na osnovu zakona provodjenja (1), primenjenog na jednodimenzionalni prenos toplote. Izjednačavanjem snaga razmene energije sa okolinom zida i provodjenjem ka ostatku zida se dobijaju snaga kojom se energija predaje zidu:

$$q_{ul} = q_x(x=0) = -\lambda\, S \left(\frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{7.1}$$

$$q_{ul} = -\lambda\, S\, (b + 2\,c\,x)_{x=0} = -\lambda\, S\, b \tag{7.2}$$

$$q_{ul} = 300\ \ 40\ \ 10 = 120 kW, \tag{7.3}$$

i snaga kojom se energija odvodi sa zida:

$$q_{iz} = q_x(x=L) = -\lambda\, S \left(\frac{\partial \vartheta(x)}{\partial x}\right)_{x=L} \tag{7.4}$$

$$q_{iz} = -\lambda S\,(b+2cx)_{x=L} = -(b+2cL)\,\lambda S \tag{7.5}$$

$$q_{iz} = -(-300+2(-50)\,1))\,40\;\;10 = 160kW. \tag{7.6}$$

b) Do snage kojom se energija akumulira u zidu u posmatranom trenutku se dolazi na osnovu integralnog energetskog bilansa zida, koji glasi

$$q_{ul} - q_{iz} + q_{gen} = q_{ak}. \tag{7.7}$$

Snaga kojom se energija generiše u zidu je jedaka proizvodu zapreminske gustine snage i zapremine zida, tako da se dobija

$$q_{ak} = 120\; - \;160\; + \;1000\;\;10\;\;1\;\;10^{-3}\; = \;-30kW. \tag{7.8}$$

v) Da bi se odredila brzina vremenske promene temperature ($\partial\vartheta/\partial t$) izotermičkih površi u posmatranom trenutku, potrebno je rešiti opštu jednačinu temperaturnog polja za slučaj jednodimenzionalnog prostiranja toplote provodjenjem, koja glasi

$$\frac{\partial\vartheta}{dt} = \frac{\lambda}{\rho\,c_p}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_v}{\rho\,c_p}. \tag{7.9}$$

S obzirom da je drugi izvod temperature po koordinati x u posmatranom trenutku,

$$\frac{\partial^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,(b+2cx) = 2c = -100^0C/m^2, \tag{7.10}$$

konstantan, zaključuje se da će brzina vremenske promene temperature sve tri izotermičke površi biti jednaka. Ona iznosi:

$$\frac{\partial\vartheta}{dt} = \frac{40\dfrac{W}{mK}}{1600\dfrac{kg}{m^3}\;4\dfrac{kJ}{kgK}}\,(-100\frac{K}{m^2}) + \frac{1000\dfrac{W}{m^3}}{1600\dfrac{kg}{m^3}\;4\dfrac{kJ}{kgK}} \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{dt} = -4{,}69\cdot10^{-4}\,\frac{K}{s} \tag{7.12}$$

8. Izračunati maksimalnu dozvoljenu struju kroz aluminijumski provodnik kružnog poprečnog preseka koji je izolovan slojem papira debljine $\delta = 3$ mm. Prečnik aluminijumskog provodnika je $d = 30$ mm. Najviša dozvoljena temperatura spoljašnje površi izolacije je 50 ^{0}C. Najviša očekivana temperatura ambijenta je 35 ^{0}C, a koeficijent prelaska toplote strujanjem sa spoljašnje površi izolacije na vazduh je približno 5 W/(m^2 K). Prenos toplote zračenjem se može zanemariti. Poznata je vrednost specifične toplotne provodnosti papira ($\lambda = 0{,}14$ W/(m K)) i zavisnost specifičnog električnog otpora aluminijuma od temperature:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha \vartheta) = 2{,}62 \cdot 10^{-8} (1 + 4{,}2 \cdot 10^{-3} \vartheta) \ \Omega \text{ m}.$$

Rešenje:

S obzirom na dobru toplotnu provodnost aluminijuma u odnosu na papir, može se smatrati da je temperatura provodnika (po poprečnom preseku aluminijuma) konstantna. Ukupni podužni toplotni otpor prenosu toplote (provodjenjem kroz sloj papirne izolacije i strujanjem sa spoljašnje površi papirne izolacije) iznosi

$$R^T_{ukl} = R^T_{pl} + R^T_{sl}. \tag{8.1}$$

Izraz za toplotni otpor prenosu toplote provodjenjem,

$$R^T_{pl} = \frac{1}{2 \pi \lambda} \ln \frac{r + \delta}{r}, \tag{8.2}$$

izveden je u zadatku 30, kao i izraz za toplotni otpor prenosu toplote strujanjem sa spoljašnje površi papirne izolacije na vazduh,

$$R^T_{sl} = \frac{1}{\alpha \pi (d + 2\delta)}. \tag{8.3}$$

Izračunate, njihove vrednosti iznose

$$R^T_{pl} = \frac{1}{2 \pi 0{,}14} \ln \frac{18}{15} = 0{,}207 \frac{K}{W}, \tag{8.4}$$

i

$$R^T_{sl} = \frac{1}{5 \pi 0{,}036} = 1{,}768 \frac{K}{W}, \tag{8.5}$$

a vrednost ukupnog podužnog toplotnog otpora

$$R_{ukl}^{T} = 0{,}207 + 1{,}768 = 1{,}975\,\frac{K}{W}. \tag{8.6}$$

Nadtemperatura spoljašnje površi izolacije θ_{si} (porast temperature spoljašnje površi izolacije u odnosu na temperaturu ambijenta), čija je maksimalna vrednost ograničena, može se izraziti preko snage gubitaka i toplotnog otpora prenosu toplote strujanjem, na način

$$\theta_{si} = P_{\gamma l}\, R_{sl}^{T}. \tag{8.7}$$

Podužni gubici $P_{\gamma l}$, koji su proporcionalni kvadratu struje, su funkcija temperature aluminijumskog provodnika, odnosno temperature unutrašnje površi izolacije. Stoga je neophodno uspostaviti relaciju izmedju temperatura unutrašnje i spoljašnje površi izolacije. Nadtemperatura unutrašnje površi izolacije je odredjena izrazom

$$\theta_{ui} = P_{\gamma l}\,(R_{pl}^{T} + R_{sl}^{T}). \tag{8.8}$$

Sada se nadtemperatura unutrašnje površi izolacije (i nadtemperatura aluminijuma) može izraziti preko nadtemperature spoljašnje površi izolacije:

$$\theta_{ui} = \theta_{si}\,\frac{R_{pl}^{T} + R_{sl}^{T}}{R_{sl}^{T}} \tag{8.9}$$

Na osnovu jednačina (8.7) i (8.9) i poznatog izraza za podužnu vrednost *Joul*-ovih gubitaka,

$$P_{\gamma l} = \frac{\rho}{S}\,I^{2} = \frac{\rho_{0}\left(1 + \alpha\,(\theta_{ui} + \vartheta_{a})\right)}{S}\,I^{2}, \tag{8.10}$$

može se napisati

$$\theta_{si} = \rho_{0}\left(1 + \alpha\,(\theta_{si}\,\frac{R_{pl}^{T} + R_{sl}^{T}}{R_{sl}^{T}} + \vartheta_{a})\right)\frac{I^{2}}{S}\,R_{sl}^{T}. \tag{8.11}$$

Na osnovu zadatog uslova da temperatura spoljašnje površi izolacije ne sme da predje 50 ^{0}C i da je najviša očekivana temperatura ambijenta 35 ^{0}C se zaključuje da nadtemperatura spoljašnje površi izolacije ne sme da predje 15 K. Odatle se dolazi do jednačine čijim se rešavanjem dobija maksimalna dozvoljena jačina struje kroz razmatrani aluminijumski provodnik:

$$\rho_0 \left(1 + \alpha \left(\theta_{sl} \frac{R_{pl}^T + R_{sl}^T}{R_{sl}^T} + \vartheta_a \right) \right) \frac{I_{max}{}^2}{S} R_{sl}^T = 15 \tag{8.12}$$

$$2{,}62 \cdot 10^{-8} \left(1 + 4{,}2 \cdot 10^{-3} \left(15 \frac{1{,}975}{1{,}768} + 35 \right) \right) \frac{I_{max}{}^2}{7{,}0868 \cdot 10^{-4}} \, 1{,}768 = 15 \tag{8.13}$$

$$I_{max} = 434 A \tag{8.14}$$

Matematički posmatrano, do vrednosti maksimalne dozvoljene struje se može doći i na sledeći način. Iz jednačine (8.11) može se doći do izraza za nadtemperaturu θ_{sl} preko ostalih veličina. On glasi

$$\theta_{sl} = \frac{1 + \alpha \, \vartheta_a}{\dfrac{1}{\rho_0 \dfrac{I^2}{S} R_{sl}^T} - \alpha \dfrac{R_{pl}^T + R_{sl}^T}{R_{sl}^T}} . \tag{8.15}$$

Prema uslovu da vrednost nadtemperature bude manja od (50 ^{0}C - 35 ^{0}C = 15 K), dolazi se do sledeće nejednakosti:

$$\frac{1 + \alpha \, \vartheta_a}{\dfrac{1}{\rho_0 \dfrac{I^2}{S} R_{sl}^T} - \alpha \dfrac{R_{pl}^T + R_{sl}^T}{R_{sl}^T}} \leq 15 . \tag{8.16}$$

Njenim rešavanjem po I_{doz} se dolazi do dozvoljenih jačina struje:

$$I_{doz} \leq \sqrt{\frac{\dfrac{S}{\rho_0 R_{sl}^T}}{\dfrac{1 + \alpha \, \vartheta_a}{15} + \alpha \dfrac{R_{pl}^T + R_{sl}^T}{R_{sl}^T}}} \tag{8.17}$$

Pri dobijanju izraza (8.17), odnosno rešavanju nejednakosti, pretpostavljeno je da vrednost izraza

$$\frac{1}{\rho_0 \frac{I_{doz}^{\,2}}{S} R_{sl}^T} - \alpha \frac{R_{pl}^T + R_{sl}^T}{R_{sl}^T}$$

veća od nule, što treba na kraju proveriti.

Odredjivanje maksimalne dozvoljene struje kroz provodnik direktno na osnovu izraza (8.12) je postupak koji je opravdan ako se ima u vidu fizika problema. Naime, sigurno je da sa porastom struje raste i temperatura provodnika. Na osnovu toga, direktno iz izraza (8.11) je dobijena jednačina po maksimalnoj dozvoljenoj struji, posle zamene vrednosti maksimalne dozvoljene temperature.

Direktnim posmatranjem funkcije $\theta_{s\,i}$ (I), date izrazom (8.15), to se ne može tako lako uočiti. Funkcija ima vertikalnu asimptotu (za

$$I = I^* = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \frac{R_{sl}^T}{S}} \frac{1}{\alpha \frac{R_{pl}^T + R_{sl}^T}{R_{sl}^T}}} = 1806A\,, \tag{8.18}$$

$\theta_{s\,i} \rightarrow \infty$, za $I \rightarrow I^*-$ i $\theta_{s\,i} \rightarrow -\infty$, za $I \rightarrow I^*+$). Nalaženjem i ispitivanjem znaka prvog izvoda, vidi se da je ova funkcija uvek monotono rastuća. Za $I > 0$, $\theta_{s\,i} \rightarrow 0$, a za $I \rightarrow \infty$, $\theta_{s\,i} \rightarrow 0$.

Dakle, matematički se dobija da su vrednosti nadtemperature negativne za $I > 1806$ A, što je fizički nerealno. Zbog toga, funkcija $\theta_{s\,i}$ (I) se može posmatrati samo za $I < 1806$ A, u kom opsegu ona monotono raste od nule do vrednosti koja teži beskonačnosti. Time se potvrdjuje fizički jasna postavka da nadtemperatura sa strujom raste, odnosno opravdava postupak odredjivanja maksimalne dozvoljene struje prema jednačini (8.12).

Prenos toplote prenosom mase

Pri proticanju fluida kroz cevi i otvore dolazi do razmene energije strujanjem sa graničnim površima, ukoliko se razlikuju temperature fluida i graničnih površi. U zavisnosti od odnosa temperature fluida i površi, fluid prima energiju ili je predaje telima preko graničnih površi. Zbog toga se menja temperatura fluida. U nekim slučajevima se može smatrati da je temperatura fluida konstantna po preseku upravnom na pravac kretanja, odnosno da on prima energiju ravnomerno po zapremini. Posmatrajmo fluid koji protiče kroz cev masenim protokom m_v. Snaga kojom se energija predaje, ili oduzima, fluidu na elementarnoj dužini cevi u pravcu strujanja, može se izraziti kao

$$d q_{f\text{-}p} = m_v \, c_p \, d \vartheta_f, \tag{11}$$

gde su:

c_p specifični maseni toplotni kapacitet i

$\mathrm{d}\vartheta_f$ elementarni porast temperature fluida na elementarnoj dužini cevi.

U ovom odeljku se analiziraju problemi kod kojih važi izraz (11), odnosno kod kojih se može smatrati da je temperatura konstantna po preseku upravnom na pravac kretanja fluida. Izraz (11) ne važi strogo pod pretpostavkom da je temperatura konstantna po preseku. On se može primeniti i u slučaju promenljive temperature, kada $\mathrm{d}\vartheta_f$ predstavlja porast srednje temperature fluida. Pri tome jedino mora da važi uslov da je konstantna brzina fluida po poprečnom preseku upravnom na pravac kretanja fluida.

Izraz (11) se dobija iz izraza za elementarnu energiju akumulisanu u odredjenoj elementarnoj masi neke materijalne sredine, pri elementarnom porastu njene temperature:

$$dQ_{ak} = dm \, c_p \, d\vartheta$$

U slučaju proticanja fluida kroz cev, elementarna masa čija se temperatura povećava za $\mathrm{d}\vartheta$, na elementarnoj dužini cevi u pravcu strujanja $\mathrm{d}x$, iznosi

$$dm = \rho \, dV = \rho \, S_{otv.} \, dx,$$

gde su:

ρ gustina fluida,

$\mathrm{d}V$ zapremina fluida čija se temperatura poveća za $\mathrm{d}\vartheta$,

$S_{otv.}$ površina cevi i

$\mathrm{d}x$ elementarna dužina na kojoj se ima porast temperature $\mathrm{d}\vartheta$.

Snaga prenosa ove energije iznosi:

$$dq_{f\text{-}p} = \frac{dm}{dt} c_p \, d\vartheta$$

$$dq_{f\text{-}p} = \rho \, S_{otv.} \frac{dx}{dt} c_p \, d\vartheta$$

Izvod dx/dt predstavlja brzinu strujanja fluida, pa prethodni izraz postaje

$$dq_{f\text{-}p} = \rho \, S_{otv.} \, v \, c_p \, d\vartheta,$$

odnosno

$$dq_{f\text{-}p} = \rho \, V_v \, c_p \, d\vartheta .$$

V_v, odredjen kao proizvod preseka i brzine, predstavlja zapreminski protok. Pomnožen sa gustinom, on daje maseni protok fluida (m_v). Dakle,

$$dq_{f\text{-}p} = m_v \, c_p \, d\vartheta_f .$$

9. Posmatrajmo cev unutrašnjeg poluprečnika r_u i spoljašnjeg r_s, načinjenu od materijala specifične toplotne provodnosti λ, po čijoj se zapremini zida generiše toplota zapreminskom gustinom snage q_v. Cev je idealno toplotno izolovana po spoljašnjoj površi, a hladi se proticanjem fluida kroz nju.

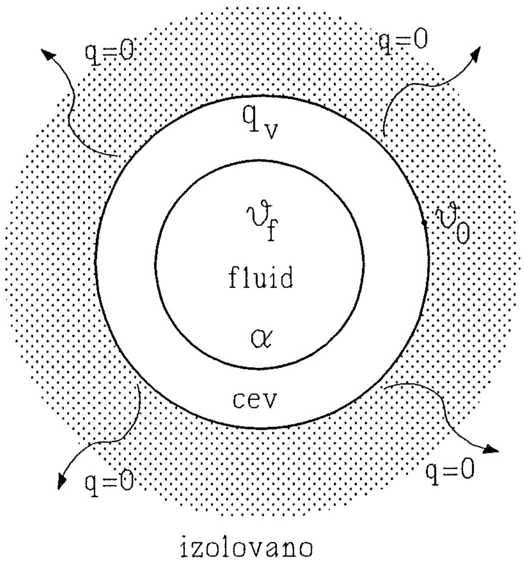
a) Odrediti opšti izraz za raspodelu temperature u zidu cevi (bez obzira na granične uslove).

b) Odrediti raspodelu temperature u zidu cevi za slučaj da se regulacijom protoka fluida temperatura izolovane površi (poluprečnika r_s) održava na konstantnoj vrednosti ϑ_0.

v) Odrediti snagu kojom se energija odvodi sa jedinice dužine cevi.

g) Ako je temperatura rashladnog fluida ϑ_f, odrediti koeficijent prelaska toplote strujanjem koji je neophodan da bi se imalo specificirano stanje (da je temperatura spoljašnje izolovane površi ϑ_0 i da se po zapremini generiše toplota zapreminskom gustinom snage q_v).

Opisana cev je prikazana na slici 9.1.



Slika 9.1

Napomene:

- posmatra se stacionarno stanje;
- smatra se da je temperatura fluida, kao i temperatura po dužini cevi, konstantna. Ovo je aproksimacija, s obzirom da će usled prelaska toplote doći do povećanja temperature fluida. Ona je realna u slučaju velikih protoka fluida, pri kojima se ima mali porast njegove temperature. Praktično, uslov za učinjenu aproksimaciju je da je proizvod protoka i specifičnog zapreminskog toplotnog kapaciteta fluida dovoljno veliki u odnosu na snagu generisane toplote u cevi;
- Izraz za *Laplace*-ov operator u cilindričnom koordinatnom sistemu glasi

$$\Delta(f(r,\varphi,z)) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad (9.1)$$

Rešenje:

a) Do diferencijalne jednačine čijim se rešavanjem odredjuje raspodela temperature unutar cevi se dolazi iz opšte jednačine temperaturnog polja za slučaj trodimenzionalnog prostiranja toplote provodjenjem kroz linearnu sredinu (5). *Laplace*-ov operator u cilindričnom koordinatnom sistemu je dat izrazom (9.1). Prema uslovima zadatka temperatura po dužini cevi (z koordinata) ima konstantnu vrednost. Iz razloga simetrije se zaključuje da temperatura ne zavisi ni od φ koordinate. Dakle, može se napisati da je $\vartheta(r_0,\varphi,z) = const.$ U opštem izrazu (5) izvod temperature po vremenu je jednak nuli, jer se razmatra stacionarno stanje. Na osnovu svega, opšta jednačina (5) se svodi na oblik

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) = - q_v . \tag{9.2}$$

Rešavanjem ove diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) = - \frac{q_v}{\lambda} r \tag{9.3}$$

$$\left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) = - \frac{q_v}{\lambda} \frac{r^2}{2} + C_1 \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = - \frac{q_v}{\lambda} \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} , \tag{9.5}$$

dolazi se do opšteg izraza za raspodelu temperature u zidu cevi koji glasi

$$\vartheta(r) = - \frac{q_v}{\lambda} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2 \tag{9.6}$$

b) Granični uslovi za slučaj da se temperatura idealno izolovane površi (poluprečnika r_s) održava na konstantnoj vrednosti ϑ_0 su ϑ $(r = r_s) = \vartheta_0$ i $(\partial\vartheta/\partial r)$ $(r = r_s) = 0$. Drugi uslov se dobija iz energetskog bilansa primenjenog na tanak granični cilindrični sloj cevi uz toplotnu izolaciju, odnosno izjednačavanjem snage razmene energije provodjenjem toplote sa susednim cilindričnim slojem cevi sa nulom. U cilindričnom kordinatnom sistemu, izraz za *Fourier*-ov zakon (1) glasi

$$q_s = - \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} r_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \varphi_0 + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} z_0 \right), \tag{9.7}$$

odakle se, prema uslovu $\vartheta(r_0,\varphi,z) = const$, dobija da je izvod temperature $\partial\vartheta/\partial r$ jednak nuli, odnosno postavljeni granični uslov $(\partial\vartheta/\partial r)$ $(r = r_s) = 0$.

Primenom graničnih uslova se dolazi do jednačina:

$$\vartheta_0 = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{r_s^2}{4} + C_1 \ln r_s + C_2 \tag{9.8}$$

$$0 = -\frac{q_v}{\lambda}\frac{r_s}{2} + \frac{C_1}{r_s} \tag{9.9}$$

Iz prethodnih izraza se odredjuju integracione konstante C_1 i C_2:

$$C_1 = \frac{q_v}{\lambda}\frac{r_s^2}{2} \tag{9.10}$$

$$C_2 = \vartheta_0 + \frac{q_v}{\lambda}\frac{r_s^2}{4} - \frac{q_v}{2\lambda} r_s^2 \ln r_s \tag{9.11}$$

Za postavljene granične uslove, izraz za raspodelu temperatura u cevi glasi

$$\vartheta(r) = \vartheta_0 + \frac{q_v}{4\lambda}(r_s^2 - r^2) - \frac{q_v}{2\lambda} r_s^2 \ln\frac{r_s}{r}. \tag{9.12}$$

v) Do snage kojom se energija odvodi sa jedinice dužine cevi se najlakše dolazi preko ukupnog energetskog bilansa. S obzirom da sa spoljašnje površi cevi nema odvodjenja toplote zbog dobre toplotne izolovanosti, celokupna generisana toplota u cevi se odvodi strujanjem. Generisana toplota po jedinici dužine cevi iznosi

$$q_l = q_v\, S = \pi\, q_v (r_s^2 - r_u^2). \tag{9.13}$$

Do istog rezultata se moglo doći na osnovu jednačine energetskog bilansa za tanak sloj cevi uz unutrašnju graničnu površ (videti zadatak 7a)). Snaga odvodjenja toplote strujanjem je jednaka snazi kojom se energija provodjenjem prenosi do unutrašnje granične površi. Snaga provodjenja se odredjuje prema izrazu

$$q_l = -\left(-\lambda\, 2\pi\, r_u \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right)_{r=r_u}\right). \tag{9.14}$$

Prethodni izraz se može dobiti na osnovu izraza (9.7), uočenih simetrija i izraza (3.2), pri čemu je površ kroz koju se računa fluks omotač valjka poluprečnika r_u. Podužna vrednost snage se dobija iz snage, deljenjem sa dužinom (visinom) postavljene površi omotača valjka.

g) Energija koja se generiše u cevi se odvodi strujanjem, tako da se za podužnu vrednost snage odvodjenja q_l može napisati

$$q_l = \alpha \, 2 \, \pi \, r_u \, (\vartheta_u - \vartheta_f), \tag{9.15}$$

gde je

$$\vartheta_u = \vartheta \, (r = r_u) = \vartheta_0 + \frac{q_v}{4 \lambda} \, (r_s^2 - r_u^2) - \frac{q_v}{2 \lambda} \, r_s^2 \ln \frac{r_s}{r_u} . \tag{9.16}$$

Ova snaga je, kao što je objašnjeno u delu v), jednaka podužnoj generisanoj snazi i data je izrazom (9.13). Dakle, izraz za traženi koeficijent prelaska toplote koji omogućava specificirano stanje glasi

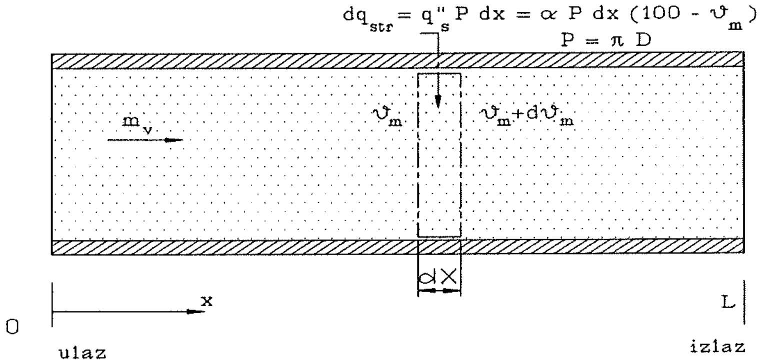
$$\alpha = \frac{q_v \, (r_s^2 - r_u^2)}{2 \, r_u \, (\vartheta_u - \vartheta_f)} . \tag{9.17}$$

10. Kondenzacijom vodene pare na spoljašnjoj površi tanke cilindrične cevi prečnika $D = 50$ mm i dužine $L = 6$ m ona se održava na temperaturi 100 ^{0}C. Maseni protok vode kroz cev (za vodu se može usvojiti da ima konstantnu temperaturu po preseku cevi) iznosi $m_v = 0{,}25$ kg/s, a temperature vode na ulazu i izlazu iz cevi su 15 ^{0}C i 57 ^{0}C. Kolika je srednja vrednost koeficijenta prelaska toplote strujanjem sa cevi na vodu?

Napomena: za vrednost specifičnog zapreminskog toplotnog kapaciteta vode u opsegu temperatura iz zadatka se može usvojiti konstantna vrednost $c_p = 4178$ J/(kg K).

Rešenje:

Na slici 10.1 je skicirana energetska razmena izmedju unutrašnje površi cevi i vode koja kroz nju struji.



Slika 10.1

Temperatura unutrašnje površi cevi je, zbog njene male debljine, jednaka temperaturi spoljašnje površi. Energija se strujanjem sa cevi prenosi na vodu, zbog čega dolazi do povećanja njene unutrašnje energije. Matematički, za deo cevi dužine dx, na rastojanju x od njenog početka, zakon održanja energije glasi

$$dq_{strujanja} = dq_{akumulisano} \, . \tag{10.1}$$

Snaga kojom se energija prenosi strujanjem sa cevi na vodu iznosi

$$dq_{strujanja} = \alpha \, \pi \, D \, dx \, (100^0C - \vartheta_m(x)) \, , \tag{10.2}$$

a snaga akumulisanja unutrašnje energije vode

$$dq_{akumulisano} = m_v\, c_p\, d\vartheta_m . \tag{10.3}$$

Uvrštavanjem izraza (10.2) i (10.3) u (10.1), dolazi se do diferencijalne jednačine

$$m_v\, c_p\, d\vartheta_m = \alpha(x)\, \pi\, D\, dx\, (100^0C - \vartheta_m(x)), \tag{10.4}$$

odnosno

$$\frac{d\vartheta_m}{100^0C - \vartheta_m} = \frac{\pi\, D}{m_v\, c_p}\, \alpha(x)\, dx. \tag{10.5}$$

Srednja vrednost koeficijenta prelaska toplote strujanjem sa cevi na vodu je jednaka

$$\alpha_{sr} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x)\, dx. \tag{10.6}$$

Integracijom jednačine (10.5) u granicama [0, L], odnosno odgovarajućim granicama za temperaturu [ϑ_{ul}, ϑ_{iz}],

$$\int_{\vartheta_{ul}}^{\vartheta_{iz}} \frac{d\vartheta_m}{100^0C - \vartheta_m} = \frac{\pi\, D}{m_v\, c_p} \int_0^L \alpha(x)\, dx, \tag{10.7}$$

dobija se

$$ln\, \frac{100 - \vartheta_{ul}}{100 - \vartheta_{iz}} = \frac{\pi\, D\, L}{m_v\, c_p}\, \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x)\, dx. \tag{10.8}$$

Iz prethodnog izraza se dobija srednja vrednost koeficijenta prelaska toplote strujanjem

$$\alpha_{sr} = \frac{m_v\, c_p}{\pi\, D\, L}\, ln\, \frac{100 - \vartheta_{ul}}{100 - \vartheta_{iz}}. \tag{10.9}$$

Izračunata, brojna vrednost iznosi

$$\alpha_{sr} = \frac{0{,}25\ 4178}{\pi\ 0{,}05\ 6}\, ln\, \frac{100 - 15}{100 - 57} = 755{,}2\, \frac{W}{m^2 K}. \tag{10.10}$$

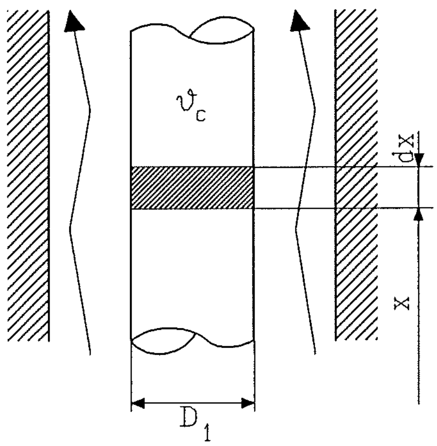
11. Kroz jednu cev od svetlog materijala slabe toplotne provodnosti, dobro toplotno izolovanu od okoline, prolazi koncentrično druga cev. Ona je napravljena od aluminijuma, manjeg prečnika (D_1 = 0,15 m). Kroz cev manjeg prečnika protiče voda temperature ϑ_c = 90 ^{0}C, koja se ne menja duž cevi. Kroz prostor izmedju zidova spoljašnje i unutrašnje cevi prinudno struji vazduh, protokom Q = 0,02 m^3/s, koji ima specifični zapreminski toplotni kapacitet c_v = 1040 J/(m^3 K).

Koliki će biti porast temperature vazduha na dužini L = 0,45 m i kolika će biti temperatura mase spoljašnje cevi, ako je koeficijent prelaska toplote sa unutrašnje cevi na vazduh konstantan i iznosi α = 20 W/(m^2 K). Temperatura vazduha na ulasku u cev iznosi ϑ_1 = 20 ^{0}C.

Rešenje:

Za opisani sistem se mogu usvojiti sledeće aproksimacije, bitne za rešavanje postavljenog zadatka. Temperatura spoljašnje površi unutrašnje cevi je konstantna i jednaka konstantnoj temperaturi vode koja kroz nju protiče. Ovo je jasno ako se ima u vidu dobra toplotna provodnost aluminijuma. S obzirom da su površi izmedju kojih se razmenjuje energija zračenjem (spoljašnja površ unutrašnje i unutrašnja površ spoljašnje cevi) svetle, ovaj oblik prenosa toplote se može zanemariti. Može se smatrati da je temperatura vazduha po poprečnom preseku konstantna.

Posle učinjenih pretpostavki se može napisati jednačina energetskog bilansa za deo cevi dužine dx koji se nalazi na rastojanju x od početka cevi.



Slika 11.1

Snaga kojom se energija prenosi strujanjem sa spoljašnje površi unutrašnje cevi na vazduh je jednaka snazi kojom se povećava unutrašnja energija vazduha:

$$\alpha(\vartheta_c - \vartheta_{vx}) D_1 \pi\, dx = c_v Q\, d\vartheta_{vx}, \tag{11.1}$$

odnosno

$$\frac{\alpha D_1 \pi}{c_v Q} dx = \frac{d\vartheta_{vx}}{\vartheta_c - \vartheta_{vx}}, \tag{11.2}$$

gde ϑ_{vx} predstavlja temperaturu vazduha na rastojanju x od početka cevi.

Rešenje ove jednačine, pri graničnim uslovima ϑ_{vx} $(x = 0) = \vartheta_1$ glasi

$$\vartheta_{vx}(x) = \vartheta_1 + (\vartheta_c - \vartheta_1)(1 - e^{-\frac{\alpha D_1 \pi x}{c_v Q}}). \tag{11.3}$$

Iz izraza za raspodelu temperature po x koordinati (11.3) se odredjuje temperatura na rastojanju $x = L$ od ulaska u cev (ϑ_2)

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + (\vartheta_c - \vartheta_1)(1 - e^{-\frac{\alpha D_1 \pi L}{c_v Q}}), \tag{11.4}$$

odnosno traženi porast temperature

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = (\vartheta_c - \vartheta_1)(1 - e^{-\frac{\alpha D_1 \pi L}{c_v Q}}). \tag{11.5}$$

Izračunat, on iznosi $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 13$ K.

Temperatura unutrašnje površi spoljašnje cevi je jednaka temperaturi vazduha. Ovo je jasno ako se ima u vidu da je cev idealno toplotno izolovana i da je toplotna provodnost materijala od koga je ona sačinjena mala. Iz uslova toplotne izolovanosti se zaključuje da nema ni prenosa toplote strujanjem sa vazduha na unutrašnju površ spoljašnje cevi. Zbog konačne vrednosti koeficijenta prelaska toplote strujanjem to implicira da su i temperature fluida i površi jednake. Zbog loše toplotne provodnosti materijala spoljašnje cevi nema razmene toplote provodjenjem po x koordinati, iako postoji temperaturni gradijent.

Analizirajmo uslov zadatka da je temperatura vode konstantna duž cevi. Ovakva pretpostavka je opravdana u slučaju većih protoka vode, kada se zbog predavanja energije vazduhu imaju mali padovi temperature. Pri ovome treba imati u vidu i činjenicu da je specifični zapreminski toplotni kapacitet vode oko 4000 puta veći od odgovarajuće vrednosti za vazduh.

Primera radi, pad temperature vode bi iznosio 0,1 K pri protoku vode od 0,647 lit/s. Ova vrednost se dobija iz integralnog energetskog bilansa - izjednačavanjem snaga prenosa toplote strujanjem sa vode i na vazduh.

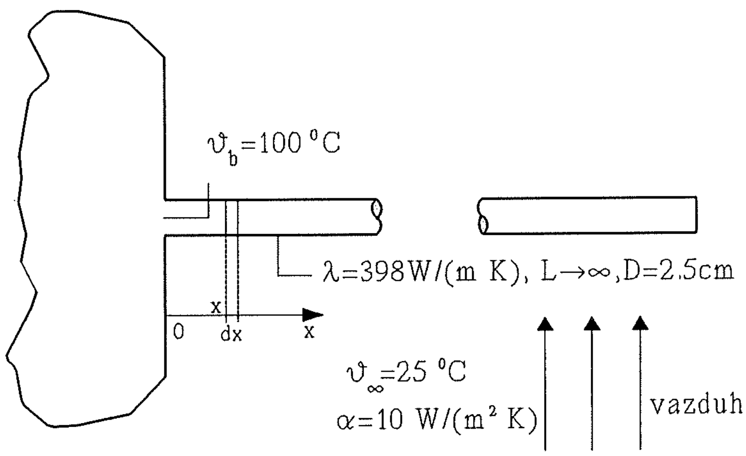
Rebra za hladjenje

Čest praktičan problem u elektrotehnici je odredjivanje snage kojom sa tela/mase uredjaja odvodi energija gubitaka kao toplota preko orebrene rashladne površi, pri definisanoj maksimalno dozvoljenoj temperaturi. Toplota se kroz rebara prenosi provodjenjem, a sa njih na rashladni fluid strujanjem. Razlika temperature površi rebra i fluida se, zbog opadanja temperature kroz rebra usled provodjenja, smanjuje sa povećanjem rastojanja od mesta na koja su rebra pričvršćena. Zbog opadanja temperature kroz rebra, preko njegove površi se može odvesti samo deo energije u odnosu na idealan slučaj da je temperatura celokupne površi rebra jednaka temperaturi površi na koju su ona pričvršćena. Efikasnost rebra za hladjenje je definisana kao odnos snage kojom se toplota odvodi rebrom za hladjenje i snage kojom bi se toplota odvodila u idealizovanom slučaju izotermičke površi rebra, čija je temperatura jednaka temperaturi površi tela na koje je ono pričvršćeno.

Do izraza za snagu odvodjenja toplote rebrom za hladjenje se dolazi na sledeći način:

1. postavi se diferencijalna jednačina energetskog bilansa za elementarni deo rebra. Oni razmenjuju energiju sa susednim delovima provodjenjem i sa fluidom strujanjem;
2. postave se dva granična uslova. Prvi granični uslov je obično uslov konstantne temperature za bazis koji je oslonjen na površ tela koje se hladi. Drugi granični uslov se postavlja za drugi bazis, koji se nalazi u struji rashladnog fluida. On može biti aproksimativan: da je temperatura bazisa jednaka temperaturi rashladnog fluida (izraz (6)) ili da je izvod temperature na kraju rebra jednak nuli (izraz (8)), ili tačan: uslov konvektivnog hladjenja (izraz (10));
3. nadje se opšte rešenje diferencijalne jednačine;
4. na bazi graničnih uslova, odrede se integracione konstante;
5. iz opšteg rešenja diferencijalne jednačine i integracionih konstanti, odredi se izraz za raspodelu temperature i
6. odredi se snaga provodjenja toplote sa površi tela, odnosno sa bazisa oslonjenog na telo koje se hladi (prema *Fourier*-ovom zakonu (1)). Ova snaga predstavlja snagu odvodjenja toplote rebrom za hladjenje.

12. Temperatura jednog bazisa vrlo dugačke bakarne šipke, specifične toplotne provodnosti λ i prečnika D, se održava na vrednosti ϑ_b. Sa površi omotača šipke, toplota se odvodi strujanjem vazduha temperature ϑ_∞, pri čemu koeficijent prelaska toplote strujanjem iznosi α. Odrediti ukupnu snagu kojom se energija odvodi sa površi bakarne šipke. Numeričke vrednosti svih veličina su date na slici 12.1.



Slika 12.1

Rešenje:

Posmatraće se deo šipke dužine dx, koji se nalazi na rastojanju x od koordinatnog početka, postavljenog na bazis čija se temperatura održava na konstantnoj vrednosti. Za njega se, uz pretpostavljeni jednodimenzionalni prenos toplote, može postaviti jednačina energetskog bilansa

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja}, \tag{12.1}$$

gde je q_x snaga kojom se u pravcu ose x toplota prenosi provodjenjem (na mestu x), a $dq_{strujanja}$ snaga kojom se toplota odvodi strujanjem sa omotača valjka dužine dx. Razlika $(q_{x+dx} - q_x)$ predstavlja diferencijal funkcije snage provodjenja toplote. Izraz za površinsku gustinu snage jednodimenzionalnog provodjenja toplote se dobija iz opšteg izraza za površinsku gustinu snage provodjenja toplote

$$q_s = - \lambda \; grad \; \vartheta \tag{12.2}$$

i glasi

$$q_{sx} = - \lambda \; \frac{\partial \vartheta}{\partial x} . \tag{12.3}$$

Množenjem površinske gustine snage sa površinom poprečnog preseka, s obzirom da je gustina snage po preseku konstantna, dobija se snaga kojom se energija prenosi provodjenjem u pravcu ose x. Ona je odredjena izrazom

$$q_x = - \lambda \; S \; \frac{\partial \vartheta}{\partial x} . \tag{12.4}$$

Sada se na osnovu definicije diferencijala funkcije jednostavno dolazi do njegove vrednosti:

$$\Delta \, q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} \, dx = - \, \lambda \, S \, \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \, dx \tag{12.5}$$

Snaga kojom se toplota odvodi strujanjem sa omotača šipke dužine dx je odredjena izrazom

$$dq_{strujanja} = \alpha \, \pi \, D \, dx \, (\vartheta - \vartheta_\infty) . \tag{12.6}$$

Uvrštavanjem u jednačinu (12.1) izraza za diferencijal funkcije snage kojom se energija prenosi provodjenjem u pravcu ose x i izraza za snagu kojom se toplota odvodi strujanjem sa omotača šipke dužine dx, dolazi se do nove jednačine, koja glasi

$$\lambda \, S \, \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} \, dx = \alpha \, \pi \, D \, dx \, (\vartheta - \vartheta_\infty) , \tag{12.7}$$

odnosno do diferencijalne jednačine raspodele temperature duž šipke

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha \, \pi \, D}{\lambda \, S} \, (\vartheta - \vartheta_\infty) . \tag{12.8}$$

Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine je

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_\infty, \tag{12.9}$$

gde je m parametar odredjen izrazom

$$m^2 = \frac{\alpha \pi D}{\lambda S} = \frac{4\alpha}{\lambda D}. \tag{12.10}$$

Iz uslova da na kraju šipke ($x \to \infty$) temperatura ima konačnu vrednost, prema izrazu (12.9) se zaključuje da je integraciona konstanta C_1 jednaka nuli. Iz drugog graničnog uslova ($\vartheta(0) = 100\ ^0$C) se dobija da je vrednost integracione konstante C_2 jednaka 100 ^{0}C - ϑ_∞. Prema ovako odredjenim integracionim konstantama i opštem rešenju diferencijalne jednačine (12.9), dobija se da izraz za raspodelu temperature duž šipke glasi

$$\vartheta(x) = (100^0C - \vartheta_\infty)\, e^{-mx} + \vartheta_\infty. \tag{12.11}$$

Ukupna snaga kojom se energija strujanjem odvodi sa površi omotača šipke je jednaka snazi odvodjenja energije sa tela na koje je postavljena šipka. Najjednostavniji način da se odredi ova snaga je preko odredjivanja snage provodjenja toplote na bazisu konstantne temperature 100 ^{0}C. Ona je odredjena izrazom (12.4), odnosno

$$q = -\lambda\, S \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0}. \tag{12.12}$$

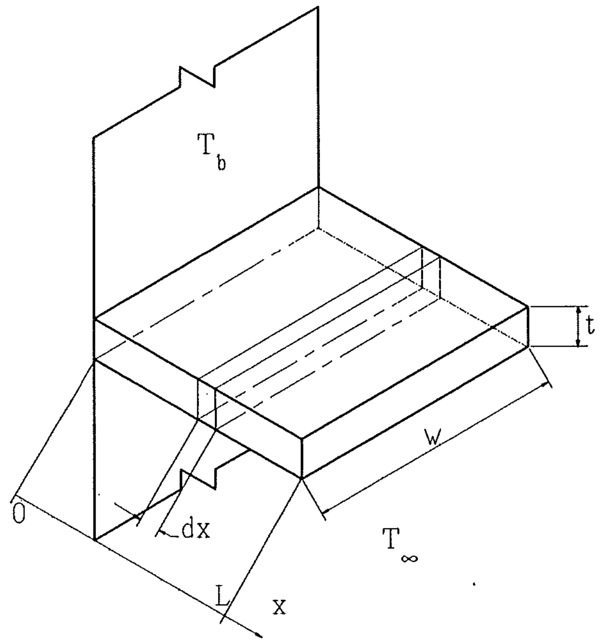
Zamenom vrednosti prvog izvoda temperature u tački $x = 0$ u prethodnu jednakost, dobija se

$$q = \lambda S \sqrt{\frac{\alpha \pi D}{\lambda S}}\,(100^0C - \vartheta_\infty). \tag{12.13}$$

Izračunata, snaga odvodjenja toplote iznosi

$$q = 29{,}38\, W. \tag{12.14}$$

13. Odrediti snagu kojom se toplota odvodi sa površi tela preko jednog rebra za hladjenje, pravougaonog poprečnog preseka i konačne dužine L. Rebro se hladi strujanjem vazduha. Može se usvojiti da je koeficijent prelaska toplote strujanjem sa površi rebra na okolni vazduh (α) konstantan. Pri rešavanju zadatka usvojiti aproksimaciju da je izvod temperature po koordinati x na kraju rebra ($x = L$) jednak nuli. Temperatura površi tela iznosi T_b, a vazduha kojim se toplota odvodi strujanjem sa rebra za hladjenje T_∞. Dimenzije rebra za hladjenje su prikazane na slici 13.1. S obzirom da je dimenzija t mala, može se smatrati da je temperatura po svakom od poprečnih preseka (upravnih na osu x) konstantna. Poznata je i vrednost toplotne provodnosti λ.



Slika 13.1

Rešenje:

Postavljanjem energetskog bilansa za deo rebra dužine dx, dolazi se do diferencijalne jednačine čijim se rešavanjem može odrediti raspodela temperature duž ose x. Posmatrani deo razmenjuje energiju provodjenjem sa susednim delovima rebra i strujanjem (konvekcijom) sa vazduhom:

$$q_{\lambda x} - q_{\lambda x+dx} - q_{konv\,x} = 0 \tag{13.1}$$

Izmedju snaga prenosa energije provodjenjem sa susednim delovima rebra postoji zavisnost

$$q_{\lambda x+dx}=q_{\lambda x}+dq_{\lambda x}=q_{\lambda x}-\lambda\, S\,\frac{d^2T}{dx^2}\,dx\,, \tag{13.2}$$

gde je vrednost $dq_{\lambda x}$ odredjena iz (12.4). Snaga prenosa toplote strujanjem sa dela rebra dužine dx iznosi

$$q_{konv\,x}=\alpha\,(O\,dx)\,\left(T-T_{\infty}\right). \tag{13.3}$$

S označava površinu poprečnog preseka rebra, a O njegov obim.

Sredjivanjem prethodnih izraza i uvodjenjem oznaka $\theta=T-T_{\infty}$ i $n=(\alpha\ O\ /\ \lambda\ S)^{1/2}$, dobija se

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-n^2\,\theta=0. \tag{13.4}$$

Rešavanjem ove jednačine, uz postavljene granične uslove $\theta\ (x=0)=T_b-T_{\infty}=\theta_b$ i $d\theta\ /\ dx\ (x=L)=0$, dobija se izraz za raspodelu temperature

$$\frac{\theta}{\theta_b}=\frac{\cosh\left(n(L-x)\right)}{\cosh\left(n\,L\right)}\,, \tag{13.5}$$

odnosno tražena snaga

$$P=-\lambda\,S\,\frac{d\theta}{dx}(x=0)=\lambda\,S\,n\,\theta_b\tanh\left(n\,L\right). \tag{13.6}$$

Napomena: Čitaocima se preporučuje da samostalno dodju do izraza (13.5) i (13.6).

14. Bakarna šipka, prečnika $D = 1$ cm i specifične toplotne provodnosti $\lambda = 377$ W/(m K), služi kao hladnjak za uredjaj u kome dolazi do disipacije energije u procesu koji se u njemu odvija. Dužina šipke iznosi $L = 4$ cm. Hladjenje površi šipke se izvodi strujanjem vazduha temperature $\vartheta_a = 22$ °C, pri koeficijentu prelaska toplote $\alpha = 11$ W/(m^2 K). Merenjem temperature na površi uredjaja ustanovljeno je da je njena vrednost 150 °C. Koliko puta je potrebno povećati dužinu šipke da bi se temperatura površi smanjila na 80 °C?

Zadatak rešiti za dva načina usvajanja graničnog uslova za slobodan bazis šipke:

a) aproksimativni, da je izvod temperature na njemu jednak nuli (izraz (8)) i

b) tačan, na bazi uslova konvektivnog hladjenja (izraz (10)).

Rešenje:

a) Prema prethodnom zadatku, sa površi tela, rebrom za hladjenje se odvodi toplota snagom

$$P = \lambda\, S\, n\, \theta_b \tanh(n\, L)\,, \tag{14.1}$$

gde $\theta_b = \vartheta_b - \vartheta_a$ predstavlja razliku temperatura bazisa i rashladnog fluida, S površinu poprečnog preseka rebra, a $n = (\alpha\, O\, /\, \lambda\, S)^{1/2} = (4\, \alpha\, /\, \lambda\, D)^{1/2}$.

Za dužinu rebra od $L = 4$ cm, prema izmerenoj temperaturi površi uredjaja, dobija se da je snaga disipacije, koja se u celosti odvodi preko rebra za hladjenje,

$$P = 377\,\frac{\pi\, 0{,}01^2}{4}\sqrt{\frac{4\cdot 11}{377\cdot 0{,}01}}\,(150-22)\tanh\left(\sqrt{\frac{4\cdot 11}{377\cdot 0{,}01}}\;0{,}04\right) = 1{,}758\, W. \tag{14.2}$$

Potrebna dužina šipke se može odrediti iz jednačine

$$1{,}758 = 377\,\frac{\pi\, 0{,}01^2}{4}\sqrt{\frac{4\cdot 11}{377\cdot 0{,}01}}\,(80-22)\tanh\left(\sqrt{\frac{4\cdot 11}{377\cdot 0{,}01}}\;L^*\right), \tag{14.3}$$

odnosno

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{4\cdot 11}{377\cdot 0{,}01}}\;L^*\right) = 0{,}29964\,. \tag{14.4}$$

Njenim rešavanjem se dobija

$$\sqrt{\frac{4\cdot 11}{377\cdot 0{,}01}}\;L^* = 0{,}30913\,, \tag{14.5}$$

odnosno potrebna dužina bakarne šipke

$$L^* = 0{,}0905\,m \approx 9\,cm\,. \tag{14.6}$$

Znači da je njenu dužinu potrebno povećati 2,25 puta da bi se porast temperature površi u odnosu na temperaturu ambijenta smanjio 2,207 puta.

b) Uvodjenje tačnog graničnog uslova, da je snaga kojom se energija prenosi provodjenjem do bazisa u vazduhu jednaka snazi kojom se energija sa njega odvodi strujanjem (izraz (10)), dovodi do drugačijeg izraza za raspodelu temperatura i snagu odvodjenja toplote rebrom za hladjenje.

Opšte rešenje temperaturne diferencijalne jednačine je isto kao u prethodna dva zadatka, odnosno delu ovog zadatka pod **a)**,

$$\theta(x) = C_1 e^{nx} + C_2 e^{-nx}, \tag{14.7}$$

gde su oznake zadržane iz prethodnog dela zadatka. Integracione konstante se dobijaju iz graničnih uslova $\theta\ (x\ =0) = \theta_b$ i $-\lambda\ d\theta\ /\ dx\ (x = L) = \alpha\ \theta\ (x = L)$. Njihovom primenom se dobijaju dve jednačine sa nepoznatim integracionim konstantama C_1 i C_2:

$$\theta_b = C_1 + C_2 \tag{14.8}$$

$$\lambda\, n\,(C_2 e^{-nL} - C_1 e^{nL}) = \alpha\,(C_1 e^{nL} + C_2 e^{-nL}) \tag{14.9}$$

Iz jednačine (14.8), konstanta C_2 se može izraziti preko konstante C_1, kao

$$C_2 = \theta_b - C_1. \tag{14.10}$$

Jednačina (14.9) se jednostavnim transformacijama može dovesti u oblik

$$\left(\frac{\lambda n}{\alpha} - 1\right) C_2 = C_1 \left(1 + \frac{\lambda n}{\alpha}\right) e^{2nL}. \tag{14.11}$$

Uvodjenjem zavisnosti C_2 od C_1, prema izrazu (14.10), u prethodni izraz, dobija se jednačina po integracionoj konstanti C_1. Njenim rešavanjem se dobija

$$C_1 = \frac{\left(\dfrac{\lambda n}{\alpha} - 1\right)\theta_b}{\left(\dfrac{\lambda n}{\alpha} - 1\right) + \left(\dfrac{\lambda n}{\alpha} + 1\right)e^{2nL}}, \tag{14.12}$$

a prema (14.10)

$$C_2 = \frac{\left(\dfrac{\lambda n}{\alpha} + 1\right)e^{2nL}\,\theta_b}{\left(\dfrac{\lambda n}{\alpha} - 1\right) + \left(\dfrac{\lambda n}{\alpha} + 1\right)e^{2nL}}. \tag{14.13}$$

Smenom integracionih konstanti u izraz (14.7) se dolazi do zakonitosti promene temperature duž šipke. Primenom jednostavnih matematičkih transformacija, može se doći do forme

$$\theta = \theta_b \frac{\cosh(n(L-x)) + \dfrac{\alpha}{\lambda n}\sinh(n(L-x))}{\cosh(nL) + \dfrac{\alpha}{\lambda n}\sinh(nL)}. \tag{14.14}$$

Snaga odvodjenja toplote je odredjena izrazom

$$P = -\lambda S \frac{d\theta}{dx}(x=0), \tag{14.15}$$

odnosno

$$P = \lambda S \theta_b n \frac{\sinh(nL) + \dfrac{\alpha}{\lambda n}\cosh(nL)}{\cosh(nL) + \dfrac{\alpha}{\lambda n}\sinh(nL)}. \tag{14.16}$$

Za dužinu rebra od L = 4 cm se dobija da je snaga disipacije, koja se u celosti odvodi preko rebra za hladjenje jednaka

$$P = 12{,}948\,\frac{\sinh(0{,}13665) + 0{,}0085407\cosh(0{,}13665)}{\cosh(0{,}13665) + 0{,}0085407\sinh(0{,}13665)} = 1{,}753\,W. \tag{14.17}$$

Potrebna dužina šipke se može odrediti iz jednačine

$$1{,}753 = 5{,}867\,\frac{\sinh(n\,L^*) + 0{,}0085407\cosh(n\,L^*)}{\cosh(n\,L^*) + 0{,}0085407\sinh(n\,L^*)}\,, \tag{14.18}$$

odnosno

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{4\cdot 11}{377\cdot 0{,}01}}\,L^*\right) = 0{,}2906\,. \tag{14.19}$$

Njenim rešavanjem se dobija potrebna dužina bakarne šipke $L^* = 8{,}7594$ cm, što je povećanje dužine za 2,19 puta u odnosu na dužinu od 4 cm.

U slučaju da je zadatak bio postavljen na identičan način, sa jedinom razlikom da je prečnik šipke bio D = 2 cm, dobilo bi se da je dužinu potrebno povećati 2,4 puta (pri uslovu konvektivnog hladjenja granične površi). Ovaj rezultat je logičan s obzirom da se sa povećanjem preseka smanjuje otpor prelasku toplote strujanjem, odnosno povećava pad temperature duž šipke usled provodjenja. Zbog toga se umanjuje efekat povećanja dužine šipke.