



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Термички процеси у електроенергетици

Материјали за рачунске вежбе 4-6

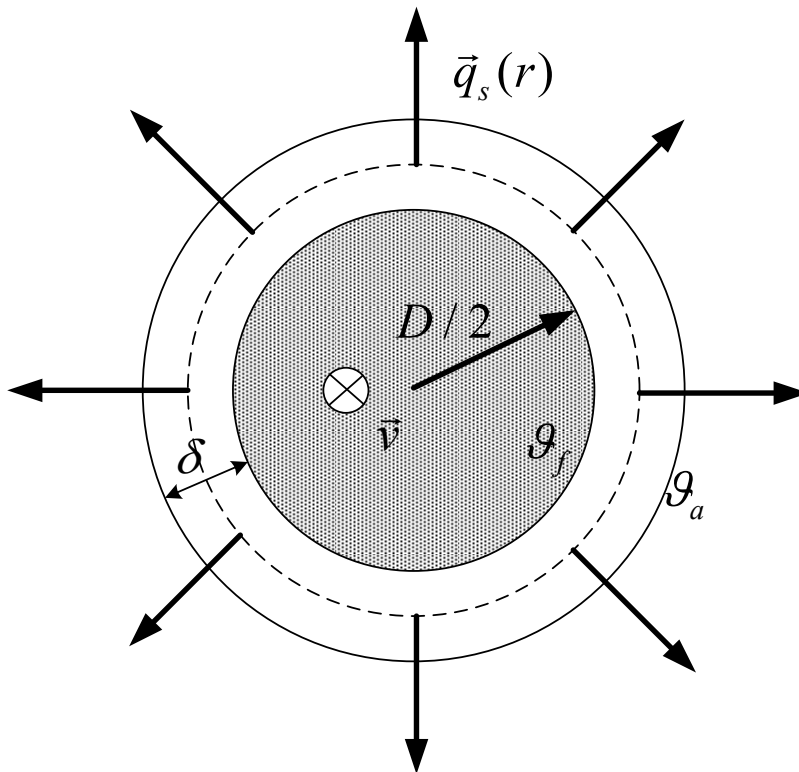
Новембар 2015.

Задатак 5

Кроз једну металну цев кружног попречног пресека и спољашњег пречника 40 mm великом брзином протиче флуид температуре веће од амбијента. Може се сматрати да је отпор преласку топлоте струјањем са флуида на унутрашњи зид цеви занемарљиво мали. Цев је танка, тако да се може сматрати да је и отпор провођењу топлоте кроз цев занемарљив. Око цеви се поставља слој изолације топлотне проводности $\lambda = 0.2 \text{ W / (m K)}$. Коефицијент преласка топлоте са спољне површи изолације на околни ваздух износи $\alpha = 8.5 \text{ W / (m}^2 \text{ K)}$. Одредити при којој дебљини изолације је снага преноса топлоте од флуида ка ваздуху температуре амбијента максимална. Која је минимална дебљина изолације којом се постиже да су губици 50% мањи од оних који се имају када изолација уопште не постоји.

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи

$$\text{grad } \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \vec{i}_z.$$



Решење задатка

Укупан отпор преносу топлоте са флуида ка амбијенту састоји се из отпора преносу топлоте провођењем кроз слој изолације и отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи изолације. Поменути топлотни отпори (њихове подужне вредности) износе:

$$R_{izolacije}^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D+2 \cdot \delta}{D} \quad (5.1)$$

$$R_{strujanja}^T = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)} \quad (5.2)$$

Израз (5.1) је изведен у задатку 3, те овде то извођење неће бити поновљено.

Укупан подужни топлотни отпор износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T \quad (5.3)$$

$$R^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D+2 \cdot \delta}{D} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)} \quad (5.4)$$

Сврха постављања изолације је да се умањи снага која се преноси са флуида ка амбијенту. Снага која се по јединици дужине преноси са флуида ка амбијенту износи:

$$P = \frac{g_f - g_a}{R^T} \quad (5.5)$$

Да би се поменута снага умањила, потребно је повећати топлотни отпор дат релацијом (5.4). Са повећањем дебљине изолације расте топлотни отпор провођењу топлоте кроз изолацију, али се истовремено повећава и спољна површина изолације са које се струјањем одводи топлота, што доводи до опадања отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи.

Критична дебљина изолације је она при којој снага губитака достиже свој максимум. Да би се одредила критична дебљина изолације, потребно је анализирати зависност топлотних отпора од дебљине изолације. Вредност за коју се има екстремум функције топлотних губитака, односно подужног отпора, добија се изједначавањем првог извода укупног подужног отпора по дебљини изолације са нулом:

$$\frac{\partial R^T}{\partial \delta} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \frac{D}{D+2 \cdot \delta} \cdot \frac{2}{D} - \frac{2}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)^2} = \frac{-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta}{\pi \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot (D+2 \cdot \delta)^2} = 0 \quad (5.6)$$

$$-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta_{kr} = 0 \quad (5.7)$$

$$\delta_{kr} = \frac{2 \cdot \lambda - \alpha \cdot D}{2 \cdot \alpha} \quad (5.8)$$

Дата критична дебљина изолације има физички смисао само за $\delta_{kr} > 0$. При томе за $\delta < \delta_{kr}$ укупни топлотни отпор опада (снага губитака расте), а за $\delta > \delta_{kr}$ расте (снага губитака опада). При некој дебљини изолације, укупни топлотни отпор постаје једнак оном који би се имао да изолација не постоји. Дебљина изолације мора бити већа од те вредности да би се постигао жељени ефекат умањења снаге губитака. Овај случај се најчешће јавља код цеви малог пречника и у случају да се има мала вредност коефицијента преласка топлоте струјањем.

Уколико је $\delta_{kr} \leq 0$, тада се за свако $\delta > 0$ укупна вредност топлотног отпора повећава, а снага губитака смањује.

У конкретном случају, критична дебљина изолације износи:

$$\delta_{kr} = 3.53\text{mm} \quad (5.9)$$

Снага губитака по јединици дужине у случају да изолације нема износи:

$$P_{g0} = \frac{\mathcal{G}_f - \mathcal{G}_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} \quad (5.10)$$

Након постављања изолације, нова подужна вредност снаге губитака износи:

$$P_{g1} = \frac{\mathcal{G}_f - \mathcal{G}_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D+2 \cdot \delta}{D} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)}} \quad (5.11)$$

Пошто је снага губитака много мања од снаге која се посредством флуида преноси дуж цеви, сматрано је да је температура флуида \mathcal{G}_f иста без обзира на дебљину изолације.

Из поставке задатка је:

$$P_{g0} = 2 \cdot P_{g1} \quad (5.12)$$

$$\frac{\mathcal{G}_f - \mathcal{G}_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} = 2 \cdot \frac{\mathcal{G}_f - \mathcal{G}_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D+2 \cdot \delta}{D} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)}} \quad (5.13)$$

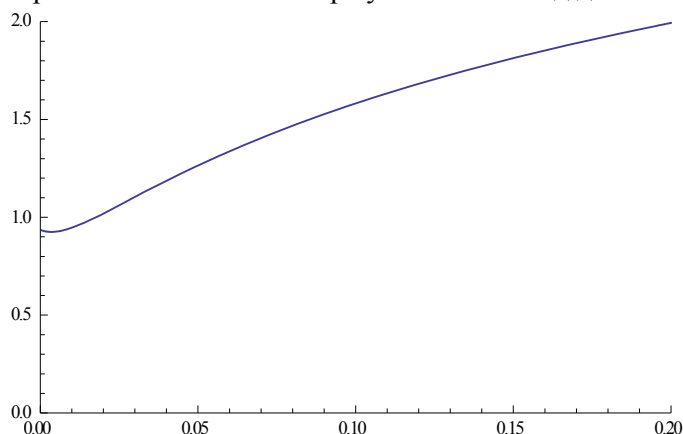
$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{D+2 \cdot \delta}{D} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2 \cdot \delta)} = 2 \cdot \frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi} \quad (5.14)$$

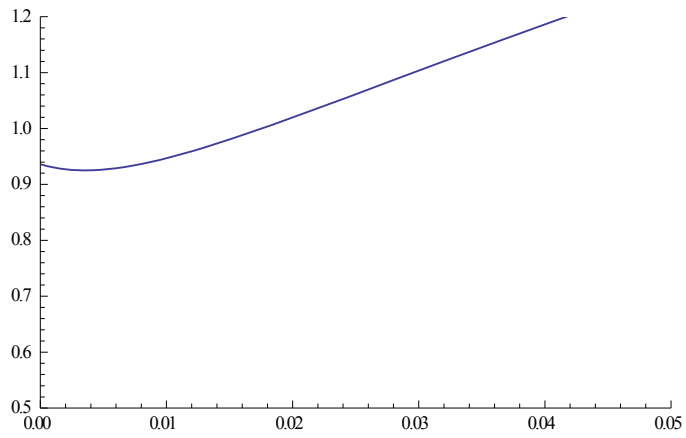
Из једначине (5.14) се налази потребна дебљина изолације:

$$\delta = 165.24\text{mm} \quad (5.15)$$

што је јако велика вредност, те се поставља питање економске оправданости постављања изолације толике дебљине.

Промена топлотног отпора у зависности од дебљине изолације је дата на слици:





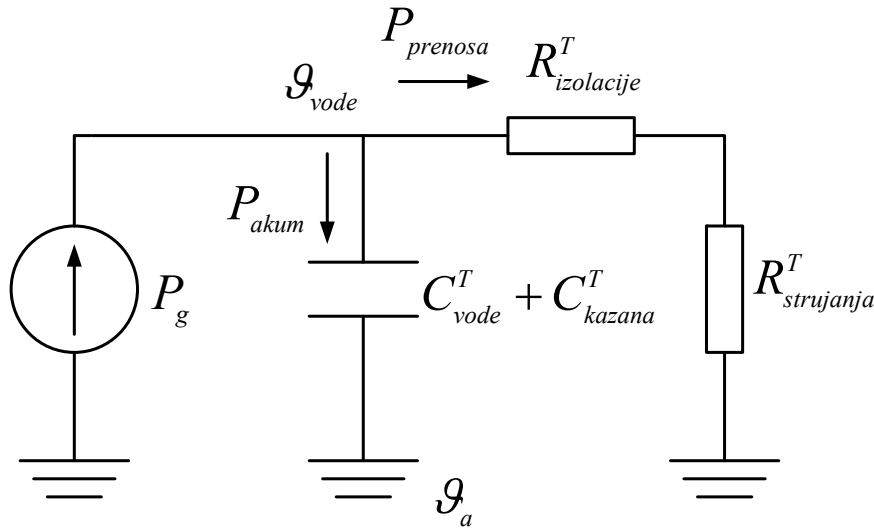
Задатак 6

У бојлеру запремине 50 l налази се вода на температури амбијента $\vartheta_a = 20\text{ }^\circ\text{C}$. Бојлер поседује “on-off” (хистерезисни) регулатор који искључује грејач када температура воде пређе подешену вредност за 5 K, а укључује грејач када температура воде падне испод подешене вредности за 5 K. Израчунати утрошену електричну енергију (у kWh) у периоду од 24 h ако је подешена температура у бојлеру $90\text{ }^\circ\text{C}$. Сматрати да се у бојлеру током посматраних 24 h не размењује вода. Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача $P_{gr} = 2\text{ kW}$, маса казана $m_k = 9.5\text{ kg}$, површина казана (унутрашња површина топлотне изолације) $S_u = 0.8\text{ m}^2$, дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности $\lambda = 0.1\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $\delta = 30\text{ mm}$, спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације) $S_s = 1\text{ m}^2$. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи $\alpha_s = 5\text{ W/(m}^2\text{K)}$, а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан $\alpha_u \gg \alpha_s$. Густина воде износи $\rho_v = 1000\text{ kg/m}^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200\text{ J/(kgK)}$ и специфични топлотни капацитет казана $c_{pk} = 474\text{ J/(kgK)}$. Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана израчунавати по формула за раван зид површине $(S_u + S_s) / 2$.

Решење задатка

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења: занемарен је отпор преношењу топлоте кроз воду и зид казана, као и топлотни капацитет изолације. Сматра се да маса воде и зид бојлера представљају изотермичку запремину.

Пошто се вода у бојлеру на почетку посматраног интервала (дужине 24h) налази на температури амбијента, хистерезисни регулатор укључује грејач. Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на слици.



Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214.5 \text{ kJ/kg} \quad (6.1)$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{(S_s + S_u)/2} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0.5333 \text{ K/W} \quad (6.2)$$

Укупна снага којом грејач генерише топлотну енергију представља збир снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (6.3)$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (6.4)$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \quad (6.5)$$

Са θ је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент.

Треба напоменути да ова анализа и њени резултати важе само под условом да нема протока воде кроз бојлер. У супротном би се јавиле додатне компоненте снаге којом се енергија размењује са амбијентом, јер би посматрани систем представљао отворени систем са протоком флуида. У том случају би и варијације температуре воде по запремини бојлера биле веће, па би се поставило питање оправданости претпоставке да унутрашњост бојлера представља изотермичку запремину.

Заменом израза (6.4) и (6.5) у једначину (6.3) се добија диференцијална једначина која описује промену пораста температуре воде и казана у односу на амбијент.

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (6.6)$$

Даљим сређивањем се добија једначина у следећој форми:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (6.7)$$

$$R^T \cdot P_g = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (6.8)$$

где је са τ означена временска константа система.

Њено решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (6.9)$$

где је са θ_0 означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са θ_∞ пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго, што овде није случај).

У стационарном стању нема промене температуре, те је извод температуре (па и пораста температуре) једнак нули:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (6.10)$$

те се заменом у једначину (6.8) добија:

$$\theta_\infty = P_g \cdot R^T \quad (6.11)$$

У тренутку t^* пораст температуре достиже вредност θ^* (који у овом случају одговара температури воде од 95°C). Време t^* се израчунава из једначине (6.9) примењене за тренутак t^* :

$$\theta^* = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) \quad (6.12)$$

$$(\theta_0 - \theta_\infty) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \theta^* - \theta_\infty \quad (6.13)$$

$$e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (6.14)$$

$$-\frac{t^*}{\tau} = \ln \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (6.15)$$

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta^* - \theta_\infty} \quad (6.16)$$

Израз (6.16) је општи и важи како за загревање, тако и за хлађење и у даљем тексту ће бити искључиво коришћен.

За конкретан случај, време загревања воде од 20°C до 95°C износи:

$$t_{zagr1} = 0.5333 \cdot 214.503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{0 - 0.5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0.5333 \cdot 2000} = 2.3168 \text{h} \quad (6.17)$$

Након што температура воде достигне 95°C, регулатор искључује грејач и вода у бојлеру почиње да се хлади.

За време хлађења од 95°C до 85°C се добија:

$$t_{\text{hladjenja}} = 0.5333 \cdot 214.503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(95 - 20) - 0.5333 \cdot 0}{(85 - 20) - 0.5333 \cdot 0} = 4.547\text{h} \quad (6.18)$$

Након што температура воде падне на 85°C, регулатор поново укључује грејач и температура воде у бојлеру почиње да расте. Време загревања воде од 85°C до 95°C износи:

$$t_{\text{zagrevanja}} = 0.5333 \cdot 214.503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(85 - 20) - 0.5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0.5333 \cdot 2000} = 0.3188\text{h} \quad (6.19)$$

Анализира се период од 24h. На почетку тог периода, вода се загрева од 20°C до 95°C. Након тога се одиграва више циклуса хлађења од 95°C до 85°C и загревања од 85°C до 95°C. Један такав циклус траје:

$$t_{\text{ciklusa}} = t_{\text{zagrevanja}} + t_{\text{hladjenja}} = 4.8658\text{h} \quad (6.20)$$

Укупан број таквих циклуса у току дана је:

$$n = \frac{24\text{h} - 2.3168\text{h}}{4.8658\text{h}} = 4.45 \quad (6.21)$$

Пети циклус започиње хлађењем воде. Оно не стигне да се заврши у току посматраног дана јер је:

$$24\text{h} - 2.3168\text{h} - 4 \cdot 4.8658\text{h} = 2.22\text{h} < 4.547\text{h} \quad (6.22)$$

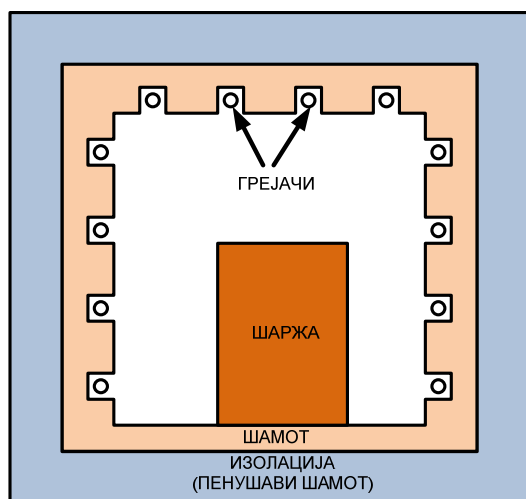
Закључак је да се загревање воде од 85°C до 95°C обави четири пута у току дана. Укупна утрошена електрична енергија у току једног дана износи:

$$\begin{aligned} W_{el} &= P_g \cdot (t_{\text{zagr1}} + 4 \cdot t_{\text{zagrevanja}}) = 2\text{kW} \cdot (2.3168\text{h} + 4 \cdot 0.3188\text{h}) = \\ &= 4.6336\text{kWh} + 2.5504\text{kWh} = 7.184\text{kWh} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Задатак 7

Електроотпорна коморна пећ са индиректним загревањем, инсталисане снаге $P_n = 5 \text{ kW}$, састоји се из два слоја: унутрашњег, који носи електроотпорни извор топлоте и кога карактерише велики топлотни капацитет и велика топлотна проводност, и спољашњег, топлотно изолационог, кога карактерише мали топлотни капацитет и мала топлотна проводност. Пораст температуре унутрашњости пећи (пећ је празна и њена снага износи 4 kW) у устаљеном стању износи 1600 K , а после прва два часа рада 800 K . У празну пећ, која се налази на температури амбијента, убацује се челични комад масе 200 kg (специфични топлотни капацитет челика износи $0.48 \text{ kJ}/(\text{kg K})$). Израчунати време загревања овог комада до пораста температуре 1000 K и енергетску ефикасност овог процеса уколико пећ ради номиналном снагом. Колико би износили време загревања и енергетска ефикасност да се исти комад (на температури амбијента) убаца у већ загрејану пећ чији пораст температуре износи 700 K ? Сматрати да се температуре унутрашњег слоја пећи и челичног комада тренутно по убацивању комада изједначе тренутно.

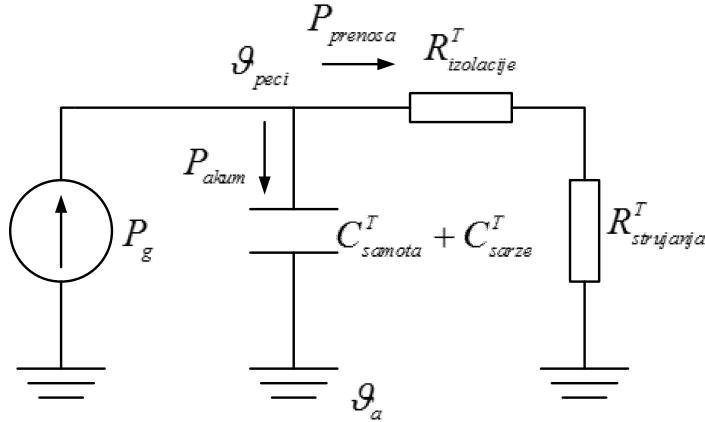
Решење задатка



На слици је приказана унутрашњост електроотпорне коморне пећи са шаржом. Унутар пећи одвија се сложени пренос топлоте који укључује пренос топлоте струјањем са грејача на ваздух и са ваздуха на шамот и шаржу, зрачењем са грејача на шаржу, са шарже на шамот и са грејача на шамот, као и провођење топлоте кроз шамот и изолацију и струјање и зрачење ка амбијенту на спољашњој површи пећи. Овако развијен детаљни модел пећи би се састојао из четири чвора којима би биле представљене изотермичке запремине (шаржа, грејач, ваздух, шамот) и захтевао би детаљно познавање унутрашње конструкције пећи и примењених материјала.

Даље решавање задатка приказано је под претпоставком да целокупна унутрашњост пећи представља једну изотермичку запремину и да је уважен пренос топлоте кроз

изолацију ка амбијенту. Топлотна шема која одговара овако поједностављеном моделу приказана је на слици.



Укупан топлотни капацитет пећи представља збир топлотних капацитета шамота и шарже. Овај топлотни капацитет зависи од материјала и тежине шарже која се налази у комори пећи.

$$C^T = C_{samota}^T + C_{sarze}^T = C_{samota}^T + m_{sarze} \cdot c_{sarze} \quad (7.1)$$

Промена пораста температуре унутрашњости пећи у односу на амбијент описана је следећом диференцијалном једначином:

$$C^T \cdot \frac{d\theta_{pec_i}}{dt} + \frac{\theta_{pec_i}}{R^T} = P_g \quad (7.2)$$

Сређивање једначине (7.2) се добија:

$$R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta_{pec_i}}{dt} + \theta_{pec_i} = R^T \cdot P_g \quad (7.3)$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta_{pec_i}}{dt} + \theta_{pec_i} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \quad (7.4)$$

где је са τ означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T \cdot C^T \quad (7.5)$$

Решење диференцијалне једначине (7.4) гласи:

$$\theta_{pec_i}(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (7.6)$$

θ_0 - пораст температуре унутрашњости пећи у тренутку $t=0$

θ_{stac} - пораст температуре унутрашњости пећи у устаљеном стању које би наступило када би загревање трајало неограничено дуго.

Пораст температуре у устаљеном стању може се одредити на следећи начин:

$$\theta_{stac} = P_g \cdot R^T \quad (7.7)$$

У случају загревања празне пећи, на основу пораста температуре у устаљеном стању може се одредити укупни топлотни отпор ка амбијенту, који представља збир топлотног отпора изолације и топлотног отпора којим је моделовано струјање ка амбијенту.

$$R^T = \frac{\theta_{stac0}}{P_g} = \frac{1600}{4000} = 0.4 \text{ K/W} \quad (7.8)$$

На основу познавања температуре после прва два часа рада са празном пећи, могуће је одредити топлотни капацитет шамота (пошто је топлотни капацитет шарже у том случају једнак нули).

$$\theta(t^*) = 800 \text{ K} = \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) + \theta(0) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} \Rightarrow \tau = \frac{t^*}{\ln\left(\frac{\theta_{stac} - \theta(0)}{\theta_{stac} - \theta(t^*)}\right)} = \frac{2h}{\ln\left(\frac{1600-0}{1600-800}\right)} = 2.885h \quad (7.9)$$

$$C_{samota}^T = \frac{\tau}{R^T} = \frac{2.885 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}}{0.4 \text{ K/W}} = 25965 \text{ J/K} \quad (7.10)$$

Топлотни капацитет шарже износи:

$$C_{sarze}^T = m_{sarze} \cdot c_{sarze} = 200 \cdot 480 = 96000 \text{ J/K} \quad (7.11)$$

Укупни топлотни капацитет пећи са шаржом износи:

$$C^T = C_{samota}^T + C_{sarze}^T = 121965 \text{ J/K} \quad (7.12)$$

Пораст температуре при загревању шарже би у устаљеном стању износио:

$$\theta_{stac1} = P_g \cdot R^T = 5000 \cdot 0.4 = 2000 \text{ K} \quad (7.13)$$

Ова вредност пораста температуре се неће достићи јер се шаржа загрева само до достизања пораста температуре од 1000 K.

Временска константа пећи са датом шаржом износи:

$$\tau = R^T \cdot C^T = 0.4 \cdot 121965 = 48786 \text{ s} = 13.552 \text{ h} \quad (7.14)$$

Време потребно да се достигне пораст температуре од 1000 K, уколико је почетна температура у комори била једнака температури амбијента, износи:

$$t_{zagr1} = \tau \cdot \ln\left(\frac{\theta_{stac} - \theta_1(0)}{\theta_{stac} - \theta(t^*)}\right) = 13.552 \cdot \ln\left(\frac{2000-0}{2000-1000}\right) = 9.394 \text{ h} \quad (7.15)$$

Утрошена електрична енергија је једнака производу снаге грејача и времена трајања загревања:

$$W_{gr1} = P_g \cdot t_{zagr1} = 5 \cdot 9.394 = 46.97 \text{ kWh} \quad (7.16)$$

Енергија предата шаржи у току загревања једнака је порасту унутрашње енергије шарже:

$$W_{sarze1} = C_{sarze}^T \cdot (\theta^* - \theta_1(0)) = 96000 \cdot (1000 - 0) = 96 \cdot 10^6 \text{ J} = 26.67 \text{ kWh} \quad (7.17)$$

Степен искоришћења износи:

$$\eta_1 = \frac{W_{sarze1}}{W_{gr1}} = \frac{26.67}{46.97} = 0.568 \quad (7.18)$$

Ниска вредност степена искоришћења последица је енергије утрошене на загревање пећи. Уколико би се вршило загревање више шаржи једне након друге, степен искоришћења би био већи јер би унутрашњост пећи била на већој температури при убацивању шарже и била би потребна мања енергија за загревање унутрашњости пећи. Уколико би се више шаржи загревало истовремено, укупна енергија предата шаржама би била већа и то би довело до пораста степена искоришћења.

Уколико се шаржа уноси у загрејану пећ, долази до размене топлоте са шаржом и топлотна енергија се прерасподељује тако да шаржа и унутрашњост пећи имају исту температуру.

$$C_{samota}^T \cdot \theta_{peci0} + C_{sarze}^T \cdot \theta_{sarze} = C^T \cdot \theta_{peci1} \Rightarrow \theta_{peci1} = \frac{C_{samota}^T \cdot \theta_{peci0} + C_{sarze}^T \cdot \theta_{sarze}}{C^T} = \frac{25.965 \cdot 700 + 96 \cdot 0}{121.965} = 149 \text{ K} \quad (7.19)$$

Време потребно да се достигне пораст температуре од 1000 К, полазећи од почетне температуре израчунате у (7.19), износи:

$$t_{zagr2} = \tau \cdot \ln \left(\frac{\theta_{stac} - \theta_2(0)}{\theta_{stac} - \theta(t^*)} \right) = 13.552 \cdot \ln \left(\frac{2000 - 149}{2000 - 1000} \right) = 8.344 \text{ h} \quad (7.20)$$

Утрошена електрична енергија је једнака производу снаге грејача и времена трајања загревања:

$$W_{gr2} = P_g \cdot t_{zagr2} = 5 \cdot 8.344 = 41.72 \text{ kWh} \quad (7.21)$$

Енергија предата шаржи у току загревања једнака је порасту унутрашње енергије шарже:

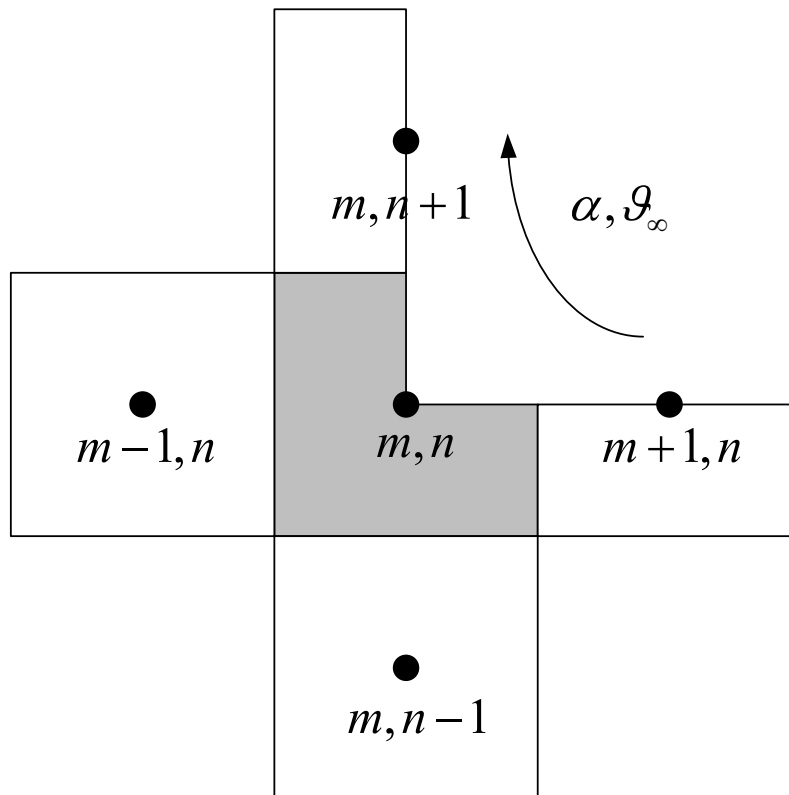
$$W_{sarze2} = C_{sarze}^T \cdot (\theta^* - \theta_2(0)) = 96000 \cdot (1000 - 0) = 96 \cdot 10^6 \text{ J} = 26.67 \text{ kWh} \quad (7.22)$$

Степен искоришћења износи:

$$\eta_2 = \frac{W_{sarze2}}{W_{gr2}} = \frac{26.67}{41.72} = 0.639 \quad (7.23)$$

Задатак 8

Извести израз за методу коначних елемената за елемент топлопроводне средине приказан на слици. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре користити експлицитну методу. Познати су сви подаци о карактеристикама материјала и коефицијенту преласка топлоте струјањем са тела на околни флуид температуре ϑ_∞ . Дискретизација топлопроводне средине је извршена тако да је $\Delta x = \Delta y$.



Решење задатка

Једначине по методи коначних елемената постављају се на основу енергетског биланса и из њега проистеклог биланса снага, примењеног на поједине елементе.

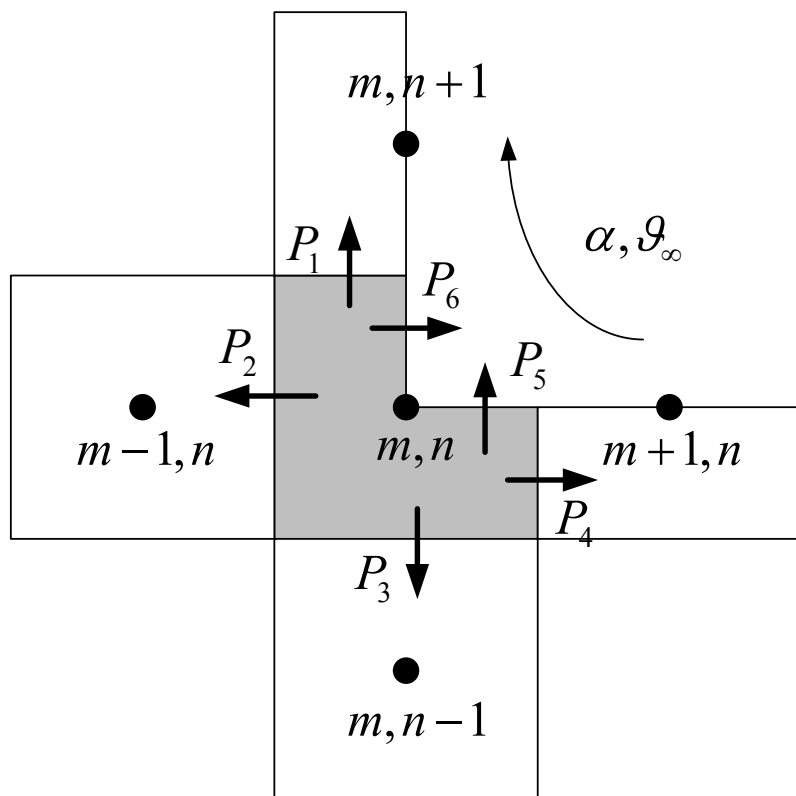
$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (8.1)$$

где су P_{gen} укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу, P_{akum} укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и $P_{prenosa}$ снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

На слици су приказане снаге којима се енергија размењује са суседним елементима и снаге којима се енергија преноси струјањем на флуид. Свака од поменутих снага може се изразити помоћу температура поменутих елемената и параметара средине.

$$P_1 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n+1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \quad (8.2)$$

$$P_2 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m-1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot L} \quad (8.3)$$



$$P_3 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n-1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot L} \quad (8.4)$$

$$P_4 = \frac{g_{m,n}^p - g_{m+1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \quad (8.5)$$

Компоненте снаге којима се енергија преноси струјањем са површи посматраног елемента на флуид износе:

$$P_5 = \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} \quad (8.6)$$

$$P_6 = \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{1} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L \quad (8.7)$$

Пошто су написани изрази (8.2)-(8.7) са сваку од компонената снаге којима се енергија преноси ка суседним елементима, може се одредити и израз за укупну снагу којом се енергија преноси из посматраног елемента ка остатку материјалне средине.

$$P_{prenosa} = \sum_{i=1}^6 P_i = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \quad (8.8)$$

Заменом израза (8.2)-(8.7) у (8.8) се добија:

$$P_{prenosa} = \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n+1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_{m-1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_{m,n-1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_{m+1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{g_{m,n}^p - g_\infty}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \quad (8.9)$$

Укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу износи:

$$P_{gen} = q_v \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (8.10)$$

Укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу износи:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \frac{d g_{m,n}}{dt} \quad (8.11)$$

Извод температуре по времену у једначини (8.11) се мора дискретизовати. У супротном, добијена једначина би била диференцијална једначина првог реда, а одређивање расподеле температуре у коначном (али јако великом) броју елемената би изискивао решавање система диференцијалних једначина. Уколико се извод по времену у једначини (8.11) дискретизује, добија се систем алгебарских једначина.

У оба случаја олакшавајућа околност је то што је одговарајућа матрица система слабо попуњена, што је директна последица чињенице да сваки од елемената енергију размењује само са себи суседним елементима.

Пошто се ради о експлицитној методи, извод по времену се дискретизује као количник разлике температура посматраног елемента у наредном (p+1-ом) и текућем (p-том) тренутку и одговарајућег корака временске дискретизације (Δt).

$$\frac{d g_{m,n}}{dt} \approx \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (8.12)$$

Заменом израза (8.12) у једначину (8.11) се добија коначан израз за снагу којом се енергија акумулише у посматраном елементу:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \frac{g_{m,n}^{p+1} - g_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (8.13)$$

Заменом једначина (8.9), (8.10) и (8.13) у (8.1) се добија:

$$\begin{aligned}
 q_v \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L = \rho \cdot c_p \cdot \frac{3}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} + \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n+1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \\
 + \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m-1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n-1}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m+1,n}^p}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_\infty}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_\infty}{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Даљим сређивањем израза (8.14) се добија:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{m,n}^{p+1} = \frac{q_v \cdot \Delta t}{\rho \cdot c_p} + \frac{4}{3} \cdot Fo \cdot Bi \cdot \vartheta_\infty + \frac{2}{3} \cdot Fo \cdot (\vartheta_{m,n+1}^p + 2 \cdot \vartheta_{m-1,n}^p + 2 \cdot \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m+1,n}^p) + \\
 + (1 - 4 \cdot Fo - \frac{4}{3} \cdot Bi \cdot Fo) \cdot \vartheta_{m,n}^p
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

где су Fourier-ов и Biot-ов број дати следећим изразима:

$$Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \tag{8.16}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \tag{8.17}$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} \tag{8.18}$$