ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

Катедра за енергетске претвараче и погоне

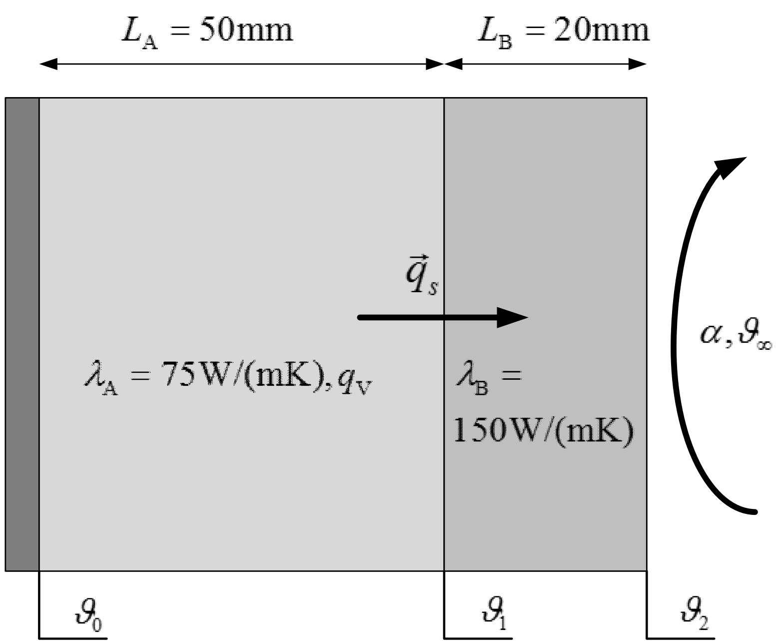
Термички процеси у електроенергетици

Материјали за рачунске вежбе 1-3

Новембар 2015.

<u>Задатак 1</u>

Раван зид се састоји из два слоја, израђена од различитих материјала A и B. У слоју A се равномерно по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v = 1.5 \cdot 10^6\,\mathrm{W/m^3}$. Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици 1. Гранична површ слоја A је добро топлотно изолована, а гранична површ слоја B се хлади водом температуре $\vartheta_\infty = 30^\mathrm{o}\mathrm{C}$, уз коефицијент преласка топлоте струјањем $\alpha = 1000\,\mathrm{W/(m^2K)}$. Скицирати расподелу температуре дуж x осе у стационарном стању. Одредити температуру граничне изоловане површи слоја A (ϑ_0) и температуру граничне хлађене површи слоја B (ϑ_2).



<u>Решење задатка</u>

За сваки од слојева се може поставити и решити општа једначина температурног поља. За слој A она гласи:

$$\lambda_\mathrm{A} \cdot \Delta\vartheta + q_\mathrm{V} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \tag{1.1}$$

где је са Δ означен Laplace-ов оператор који у Descartes-овом координатном систему има следећи облик

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.2}$$

У стационарном стању се расподела температуре не мења у времену, те важи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

Општа једначина температурног поља за слој А у стационарном стању гласи:

$$\lambda_{\mathrm{A}} \cdot \Delta \vartheta + q_{\mathrm{V}} = 0 \tag{1.4}$$

$$\lambda_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + q_{\mathrm{V}} = 0 \tag{1.5}$$

Пошто се посматра једнодимензиони пренос топлоте важи:

$$\vartheta = \vartheta(x) = const(y, z) \tag{1.6}$$

што повлачи за собом:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \tag{1.8}$$

Заменом у (1.5) се добија:

$$\lambda_{\mathrm{A}} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + q_{\mathrm{V}} = 0 \tag{1.9}$$

Њено опште решење је:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_{\mathrm{V}} \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_{\mathrm{A}}} + C_1 \cdot x + C_2 \tag{1.10}$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе.

За слој В општа једначина температурног поља гласи:

$$\lambda_{\mathrm{B}} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0 \tag{1.11}$$

чије опште решење је:

$$\vartheta(x) = C_3 \cdot x + C_4 \tag{1.12}$$

где су C_3 и C_4 произвољне константе.

Четири константе се могу одредити из граничних услова који се постављају на површима дисконтинуитета материјалне средине:

$$-\lambda_{\mathrm{A}} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\left(0_{+}\right) = 0 \tag{1.13}$$

$$-\lambda_{\mathrm{A}} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\left(L_{\mathrm{A}-}\right) = -\lambda_{\mathrm{B}} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\left(L_{\mathrm{A}+}\right) \tag{1.14}$$

$$\vartheta(L_{\mathrm{A}-}) = \vartheta(L_{\mathrm{A}+}) \tag{1.15}$$

$$-\lambda_{\mathrm{B}} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}) = \alpha \cdot (\vartheta(L_{\mathrm{A}} + L_{\mathrm{B}}) - \vartheta_{\infty}) \tag{1.16}$$

Из услова (1.13) се добија:

$$-\frac{q_\mathrm{V} \cdot 0}{\lambda_\mathrm{A}} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \tag{1.17}$$

Из услова (1.15) се добија:

$$-\frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}^2}{2 \cdot \lambda_\mathrm{A}} + C_2 = C_3 \cdot L_\mathrm{A} + C_4 \tag{1.18}$$

Из услова (1.14) се добија:

$$-\lambda_\mathrm{A} \cdot \left(-\frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{A}} \right) = -\lambda_\mathrm{B} \cdot C_3 \Rightarrow C_3 = -\frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}} \tag{1.19}$$

Из услова (1.16) се добија:

$$-\lambda_\mathrm{B} \cdot C_3 = \alpha \cdot (C_3 \cdot (L_\mathrm{A} + L_\mathrm{B}) + C_4 - \vartheta_\infty) \tag{1.20}$$

$$-\lambda_\mathrm{B} \cdot \left(-\frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}} \right) = \alpha \cdot \left(-\frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}} \cdot (L_\mathrm{A} + L_\mathrm{B}) + C_4 - \vartheta_\infty \right) \tag{1.21}$$

$$q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A} = -\frac{q_\mathrm{V} \cdot \alpha \cdot L_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{B}} - \frac{q_\mathrm{V} \cdot \alpha \cdot L_\mathrm{A} \cdot L_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{B}} + \alpha \cdot C_4 - \alpha \cdot \vartheta_\infty \tag{1.22}$$

$$C_4 = \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\alpha} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{B}} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A} \cdot L_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{B}} + \vartheta_\infty \tag{1.23}$$

На основу једначина (1.12), (1.19) и (1.23) може се добити расподела температуре у слоју B

$$\vartheta(x) = -\frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}} \cdot x + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\alpha} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{B}} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A} \cdot L_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{B}} + \vartheta_\infty \tag{1.24}$$

Заменом у (1.24) се добија температура граничне хлађене површи слоја B:

$$\vartheta_2 = \vartheta(L_\mathrm{A} + L_\mathrm{B}) = -\frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\lambda_\mathrm{B}} \cdot (L_\mathrm{A} + L_\mathrm{B}) + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\alpha} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}^2}{\lambda_\mathrm{B}} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A} \cdot L_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{B}} + \vartheta_\infty \tag{1.25}$$

$$\vartheta_2 = \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^\circ\mathrm{C} \tag{1.26}$$

Заменом (1.19) и (1.23) у (1.18) се добија:

$$C_2 = \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}^2}{2 \cdot \lambda_\mathrm{A}} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\alpha} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A} \cdot L_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{B}} + \vartheta_\infty \tag{1.27}$$

Расподела температуре у слоју A се добија заменом израза (1.17) и (1.27) у (1.10):

$$\vartheta(x) = -\frac{q_\mathrm{V} \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_\mathrm{A}} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}^2}{2 \cdot \lambda_\mathrm{A}} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A}}{\alpha} + \frac{q_\mathrm{V} \cdot L_\mathrm{A} \cdot L_\mathrm{B}}{\lambda_\mathrm{B}} + \vartheta_\infty \tag{1.28}$$

из чега се израчунава тражена температура изоловане површи:

$$\vartheta_0 = \vartheta(0) = \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}^2}{2 \cdot \lambda_{\mathrm{A}}} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}}{\alpha} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}} \cdot L_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{B}}} + \vartheta_\infty = 140^{\mathrm{o}}\mathrm{C} \tag{1.29}$$

Могућ је и препоручљив други приступ решавању овог задатка:
Укупна генерисана снага у слоју А се може израчунати на следећи начин:

$$q_{\mathrm{A}} = \iiint_{V_{\mathrm{A}}} q_{\mathrm{V}} \cdot dV = q_{\mathrm{V}} \cdot \iiint_{V_{\mathrm{A}}} dV = q_{\mathrm{V}} \cdot V_{\mathrm{A}} = q_{\mathrm{V}} \cdot S \cdot L_{\mathrm{A}} \tag{1.30}$$

Снага генерисана у слоју А се у стационарном стању преноси струјањем на воду на граничној површи 2:

$$q_{\mathrm{A}} = q_{\mathrm{V}} \cdot S \cdot L_{\mathrm{A}} = \alpha \cdot S \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_\infty) \tag{1.31}$$

Из (1.31) се може израчунати температура граничне површи 2:

$$\vartheta_2 = \frac{q_{\mathrm{V}} L_{\mathrm{A}}}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^{\mathrm{o}}\mathrm{C} \tag{1.32}$$

Познајући отпор преносу топлоте кроз слој B, може се израчунати температура граничне површи 1:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_{\mathrm{A}} \cdot R_{\mathrm{B}}^T \tag{1.33}$$

$$R_{\mathrm{B}}^T = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{B}}} \cdot \frac{L_{\mathrm{B}}}{S} \tag{1.34}$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}} \cdot S \cdot \frac{1}{\lambda_{\mathrm{B}}} \cdot \frac{L_{\mathrm{B}}}{S} \tag{1.35}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}} \cdot L_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{B}}} = \vartheta_\infty + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}}{\alpha} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}} \cdot L_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{B}}} = 115^{\mathrm{o}}\mathrm{C} \tag{1.36}$$

Користећи услов (1.15) може се одредити расподела температуре у слоју А:

$$-\frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}^2}{2 \cdot \lambda_{\mathrm{A}}} + C_2 = \vartheta_1 = \vartheta_\infty + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}}{\alpha} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}} \cdot L_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{B}}} \tag{1.37}$$

$$C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}^2}{2 \cdot \lambda_{\mathrm{A}}} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}}{\alpha} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}} \cdot L_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{B}}} \tag{1.38}$$

Температура граничне изоловане површи слоја А се добија заменом (1.38) у (1.10):

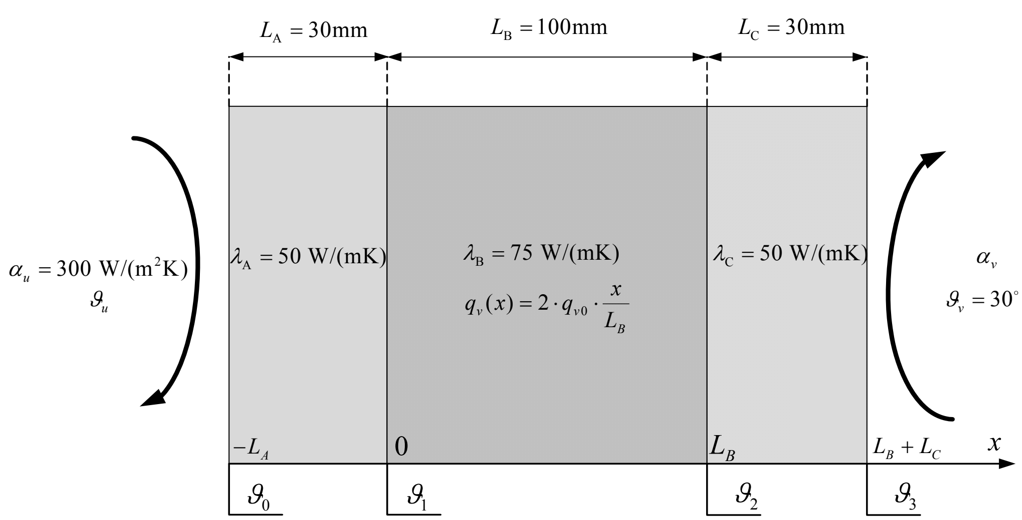
$$\vartheta_0 = C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}^2}{2 \cdot \lambda_{\mathrm{A}}} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}}}{\alpha} + \frac{q_{\mathrm{V}} \cdot L_{\mathrm{A}} \cdot L_{\mathrm{B}}}{\lambda_{\mathrm{B}}} = 140^{\mathrm{o}}\mathrm{C} \tag{1.39}$$

Задатак 2.

(1. задатак са првог колоквијума одржаног 16.11.2013.)

Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала A, B и C. У слоју B се по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v(x) = 2 \cdot q_{v0} \cdot \dfrac{x}{L_B}$ ($q_{v0} = 250 \cdot 10^3\ \mathrm{W/m^3}$). Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици 1. Гранична површ слоја A се хлади уљем непознате температуре (ϑ_u), уз коефицијент преноса топлоте струјањем $\alpha_u = 300\ \mathrm{W/(m^2K)}$, а гранична површ слоја C се хлади водом температуре $\vartheta_v = 30^\circ\mathrm{C}$, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ($\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta| / 20)^{0.25}$ ($\alpha_{v0} = 1000\ \mathrm{W/(m^2K)}$).

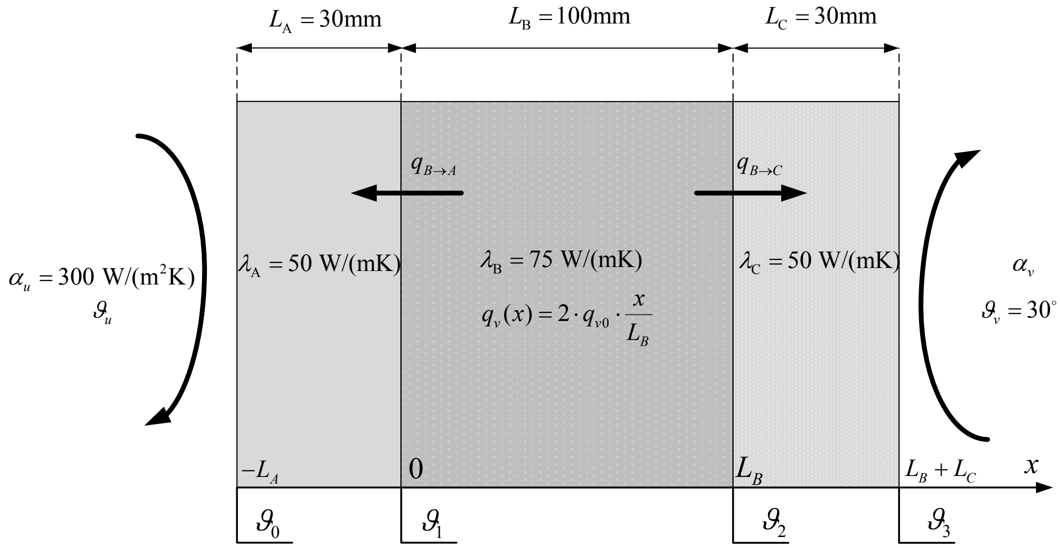
Одредити непознату температуру уља тако да се тачно четвртина укупне снаге генерисане у слоју B преноси на уље. Колико износе температуре ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 ϑ_3? Колико износи и максимална температура слоја B?



Решења задатка

Укупна снага којом се топлота генерише у области B добија се интеграцијом запреминске густине снаге по запремини области:

$$q_{genB} = \iiint_B q_v \cdot dV = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x) \cdot S \cdot dx = \frac{q_{v0} \cdot S}{L_B}(L_B^2 - 0) = q_{v0} \cdot S \cdot L_B \qquad (2.1)$$



Слика 1

На основу услова задатка да се четвртина снаге генерисане у области В преноси на уље, снаге којима се енергија преноси из области В ка области А ($q_{B\to A}$) и из области В ка области С ($q_{B\to C}$) (слика 1) износе:

$$q_{B\to A} = \frac{1}{4}\cdot q_{genB} = \frac{1}{4}\cdot q_{v0}\cdot S\cdot L_B$$
$$q_{B\to C} = q_{genB} - q_{B\to A} = \frac{3}{4}\cdot q_{genB} = \frac{3}{4}\cdot q_{v0}\cdot S\cdot L_B \tag{2.2}$$

С обзиром да се посматра се устаљено стање, без генерисања топлоте у области С, целокупна снага која се из области В пренесе ка области С се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура ϑ_3 ($\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$):

$$q_{strujanja\_v} = q_{B\to C} = \alpha_v(\theta)\cdot S\cdot\theta = \frac{\alpha_{v0}\cdot S}{20^{0.25}}\cdot\theta^{1.25} \tag{2.3}$$

$$\theta = \left(\frac{q_{B\to C}\cdot 20^{0.25}}{\alpha_{v0}\cdot S}\right)^{0.8} = \left(\frac{3\cdot q_{v0}\cdot L_B\cdot 20^{0.25}}{4\cdot\alpha_{v0}}\right)^{0.8} = 19^{\circ}\mathrm{C} \tag{2.4}$$

$$\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v \Rightarrow \vartheta_3 = \theta + \vartheta_v = 49^{\circ}\mathrm{C} \tag{2.5}$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = q_{B\to C}\cdot R_C^T = q_{B\to C}\cdot\frac{L_C}{\lambda_C\cdot S} \tag{2.6}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + q_{B\to C}\cdot\frac{L_C}{\lambda_C\cdot S} = \vartheta_3 + \frac{3\cdot q_{v0}\cdot L_B\cdot L_C}{4\cdot\lambda_C} = 60.25^{\circ}\mathrm{C} \tag{2.7}$$

Расподела температуре у области В добија се решавањем опште температурне једначине која за поменуту област има следећи облик:

$$\lambda_B\cdot\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\frac{q_v(x)}{\lambda_B} = -\frac{2\cdot q_{v0}\cdot x}{\lambda_B\cdot L_B} \tag{2.9}$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_{v0} \cdot x^3}{3 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot x + C_2 \tag{2.10}$$

Интеграционе константе које фигуришу у (2.10) могу се одредити из граничних услова за десну граничну површ слоја B (на тој граничној површи познајемо и вредност температуре и њен градијент – у овом случају извод по x координати).

$$\begin{aligned} &\vartheta(L_B\,\_) = \vartheta_2 \\ &-\lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(L_B\,\_) \cdot S = q_{B\to C} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Након одређивања интеграционих константи, и уврштавањем њихових вредности у једначину (2.10) може се добити температура ϑ_1.

$$\vartheta_1 = \vartheta(0) = C_2 = 63.027^{\circ}\mathrm{C} \tag{2.12}$$

Остале непознате температуре се добијају на следећи начин:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = R_A^T \cdot q_{B\to A} \Rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_1 - R_A^T \cdot q_{B\to A} = 59.277^{\circ}\mathrm{C} \tag{2.13}$$

$$q_{B\to A} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_u) \Rightarrow \vartheta_u = \vartheta_0 - \frac{q_{B\to A}}{\alpha_u \cdot S} = 38.44^{\circ}\mathrm{C} \tag{2.14}$$

Вредност x координате на којој се постиже максимална температура у области B (x^*) може се добити диференцирањем расподеле температуре која је дата изразом (2.10) и изједначавањем добијеног израза са нулом. Потом се заменом из (2.10) за тако добијену вредност x^* добија максимална температура у области B.

$$x^* = \frac{L_B}{2} = 50\mathrm{mm} \tag{2.15}$$

$$\vartheta_{\max B} = \vartheta(x^*) = 65.806^{\circ}\mathrm{C} \tag{2.16}$$

<u>3. задатак</u>

На слици 1 је приказан конусни пресек тела начињеног од керамике.

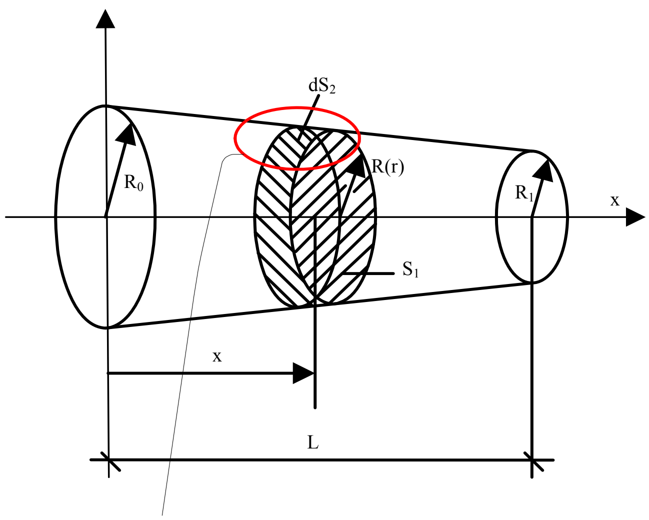
Пречник кружног попречног пресека је променљив. У постављеном координатном систему зависност пречника од растојања x је линеарна и одређена изразом $D = D_0 + a \cdot x$, при чему је $a = -0.25$ и $D_0 = 62.5\mathrm{mm}$. Базис керамичког тела мањег пречника налази се на растојању $x_1 = L = 200\mathrm{mm}$ од координатног почетка (слика 1). Температуре граничних базиса су константне и износе $T_0 = 400\mathrm{K}$ и $T_1 = 600\mathrm{K}$, а омотач је идеално топлотно изолован од околине.

а) извести израз за расподелу температуре по x координати у општим бројевима

б) израчунати бројну вредност снаге преноса топлоте провођењем од једног до другог базиса

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\,\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\vec{i}_x$.

Специфична топлотна проводност керамике се у посматраном температурном опсегу не мења значајно (3.64 W/mK за 400 K и 3.28 W/mK за 600 K), па се може усвојити да она има приближно константну вредност од 3.46 W/mK.



Решење задатка

Из услова да је извод температуре по x координати константан у сваком од пресека по x оси следи:

$$\vec{q}_s = \vec{q}_s(x) = const(r,\varphi) \tag{3.1}$$

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot grad\,\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\vec{i}_x \right) \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следи:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\vec{i}_x \tag{3.3}$$

Флукс вектора површинске густине снаге представља снагу (q), чија је вредност константна у сваком од пресека по x оси:

$$q = \iint_S \vec{q}_s \cdot d\vec{S} \tag{3.4}$$

$$q = \iint_S -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x \cdot dS \tag{3.5}$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \iint_S dS = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \frac{D^2(x)\cdot \pi}{4} \tag{3.6}$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{(D_0 + a\cdot x)^2 \cdot \pi}{4} \tag{3.7}$$

Интеграљењем једначине (3.7) може се одредити просторна расподела температуре у стационарном стању:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{4\cdot q}{\lambda\cdot(D_0 + a\cdot x)^2\cdot\pi} \tag{3.8}$$

$$d\vartheta = -\frac{4\cdot q}{\lambda\cdot(D_0 + a\cdot x)^2\cdot\pi}\cdot dx \tag{3.9}$$

Једначина (3.9) представља диференцијалну једначину код које су променљиве раздвојене. Њено решење се налази интеграцијом:

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(x)} d\vartheta = -\int_0^x \frac{4\cdot q}{\lambda\cdot(D_0 + a\cdot x)^2\cdot\pi}\cdot dx \tag{3.10}$$

$$\vartheta(x) - \vartheta_0 = -\frac{4\cdot q}{\lambda\cdot a\cdot\pi}\left(-\frac{1}{D_0 + a\cdot x} + \frac{1}{D_0}\right) \tag{3.11}$$

Из једначине (3.11) написане за десни базис се може одредити снага којом се преноси топлота између 2 базиса:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = -\frac{4\cdot q}{\lambda\cdot a\cdot\pi}\left(-\frac{1}{D_0 + a\cdot L} + \frac{1}{D_0}\right) \tag{3.12}$$

$$q = -\frac{\lambda\cdot a\cdot\pi\cdot(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{4\cdot\left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a\cdot L}\right)} = -2.123\mathrm{W} \tag{3.13}$$

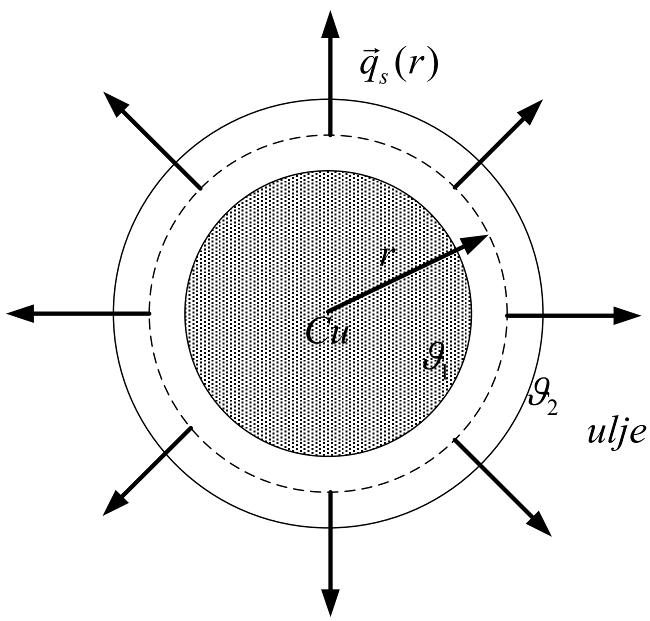
Заменом израза (3.13) у (3.11), добија се расподела температуре по x оси:

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 + \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a\cdot L}\right)}\cdot\left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a\cdot x}\right) \tag{3.14}$$

Задатак 4.

Један електрични проводник је начињен од бакра, чија специфична електрична отпорност на 20°C износи ρ_{20}=1.7×10^{-8} Ωm, а коефицијент његовог линеарног пораста са температуром α_{Cu20}=3.9×10^{-3}°C^{-1}: $\rho=\rho_{20}\,(1+\alpha_{Cu20}\,(\vartheta - 20))$. Површина кружног попречног пресека проводника износи S_{Cu} = 263.25 mm^2. Проводник се налази у уљу температуре 60 °C и изолован је папирном изолацијом топлотне проводности λ_P = 0.15 W/(m K) , чија максимална температура не сме да пређе 110°C. Одредити максимално оптерећење овог проводника једносмерном струјом за 4 ситуације, настале комбинацијом: а) дебљина изолације износи 1 mm / 4 mm, б) уље струји природно (65 W / (m^2 K)) / принудно (300 W / (m^2 K)). Због добре топлотне проводности може се сматрати да је температура по запремини бакра константна. Пад температуре на слоју папирне изолације кабла се са задовољавајућом тачношћу може израчунавати као пад температуре при провођењу топлоте кроз раван зид.

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\,\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\,\vec{i}_z$.



Решење

Укупан топлотни отпор преношењу топлоте од места његовог генерисања (бакарни проводник) до уља састоји се из две компоненте – отпора провођењу топлоте кроз слој изолације кабла и отпор на граничној површи на којој се струјањем топлотна енергија одводи са изолације кабла. У даљем тексту биће одређена компонента топлотног отпора провођењу кроз слој изолације.

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot grad\,\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \vec{i}_z \right) \tag{4.1}$$

Из разлога симетрије, температура је константна на свакој од цилиндричних површи које су концентричне са бакарним проводником:

$$\vartheta = \vartheta(r) = const(\varphi, z) \tag{4.2}$$

Заменом (4.2) у (4.1) се добија:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \vec{i}_r \tag{4.3}$$

Посматра се стационарно стање. Флукс вектора површинске густине снаге кроз цилиндричну површ провучену кроз изолацију, концентрично бакарном проводнику, на растојању r од центра проводника, представља снагу (q) која се преноси из унутрашњости кабла ка расхладном флуиду (уљу). Ова снага је иста кроз сваку тако формирану површ, зато што се у изолацији не генерише топлота.

$$q = \iint_S \vec{q}_S \cdot d\vec{S} \tag{4.4}$$

$$q = \iint_S q_S \cdot \vec{i}_r \cdot \vec{i}_r \cdot dS = \iint_S q_S \cdot dS \tag{4.5}$$

$$q = q_s(r) \cdot \iint_S dS = q_s(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \tag{4.6}$$

Заменом (4.3) у (4.6) се добија:

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \tag{4.7}$$

чијим решавањем се може одредити расподела температуре дуж радијалних праваца:

$$d\vartheta = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot r \cdot L} \cdot dr \tag{4.8}$$

Интеграцијом од спољне површи проводника до спољне површи изолације се добија:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R_{Cu} + \delta}{R_{Cu}} \right) = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{D_{Cu} + 2 \cdot \delta}{D_{Cu}} \right) \tag{4.9}$$

Топлотна снага (q) која се преноси из унутрашњости кабла ка расхладном флуиду (уљу) се може приказати у следећем облику:

$$q = q_L \cdot L \tag{4.10}$$

где је q_L снага преноса топлоте по јединици дужине.

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R_{Cu} + \delta}{R_{Cu}} \right) = -\frac{q_L}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D_{Cu} + 2 \cdot \delta}{D_{Cu}} \right) \tag{4.11}$$

Топлотни отпор изолације по јединици дужине износи:

$$R_{izol}^{T} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{q_L} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D_{Cu} + 2 \cdot \delta}{D_{Cu}}\right) \tag{4.12}$$

Приметимо да у граничном процесу када дебљина изолације δ поприма мале вредности, важи следеће:

$$\lim_{\delta \to 0} R_{izol}^{T} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \lim_{\delta \to 0} \ln\left(1 + \frac{2 \cdot \delta}{D_{Cu}}\right) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \frac{2 \cdot \delta}{D_{Cu}} = \frac{\delta}{\lambda \cdot \pi \cdot D_{Cu}} \tag{4.13}$$

што је исто као да се топлотни отпор рачунао по формули за раван зид.
Друга компонента топлотног отпора износи:

$$R_{strujanja}^{T} = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D_{Cu} + 2 \cdot \delta)} \tag{4.14}$$

Укупан топлотни отпор износи:

$$R^{T} = R_{strujanja}^{T} + R_{izol}^{T} \tag{4.15}$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_\infty = q_L \cdot R^{T} \tag{4.16}$$

Снага Џулових губитака по јединици дужине проводника износи:

$$q_L = \frac{\rho \cdot I^2}{S_{Cu}} \tag{4.17}$$

Заменом (4.17) у (4.16) се добија:

$$\vartheta_1 - \vartheta_\infty = \frac{\rho_{20}(1 + \alpha_{Cu20} \cdot (\vartheta_1 - 20^{\circ}\mathrm{C})) \cdot I^2}{S_{Cu}} \cdot R^{T} \tag{4.18}$$

Слој изолације који се налази на највишој температури (критичан слој) је онај који се налази непосредно уз површ бакра. Према томе, критичан случај према коме се одређује дозвољено струјно оптерећење кабла је:

$$\vartheta_1 = \vartheta_{MAX} = 110^{\circ}\mathrm{C} \tag{4.19}$$

Дозвољено струјно оптерећење кабла се израчунава из (4.18):

$$I_{MAX} = \sqrt{\frac{(\vartheta_{MAX} - \vartheta_\infty) \cdot S_{Cu}}{\rho_{20}(1 + \alpha_{Cu20} \cdot (\vartheta_{MAX} - 20^{\circ}\mathrm{C})) \cdot R^{T}}} \tag{4.20}$$

У наставку су дати резултати за сва четири случаја (δ=1mm и α=65W/m^{2}K, δ=4mm и α=65W/m^{2}K, δ=1mm и α=300W/m^{2}K, δ=4mm и α=300W/m^{2}K). У заградама су вредности топлотног отпора рачунате на основу (4.12), а ван заграда на основу израза (4.13).

$R_{izol}^{T} = 0.11590(0.11589)\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}_{strujanja}^{T} = 0.24112\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}^{T} = 0.35702\mathrm{mK/W}; \mathrm{I}_{MAX} = 1266.98\mathrm{A}$

$R_{izol}^{T} = 0.46359(0.38463)\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}_{strujanja}^{T} = 0.18613\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}^{T} = 0.64972\mathrm{mK/W}; \mathrm{I}_{MAX} = 939.19\mathrm{A}$

$R_{izol}^{T} = 0.11590(0.11589)\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}_{strujanja}^{T} = 0.05224\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}^{T} = 0.16814\mathrm{mK/W}; \mathrm{I}_{MAX} = 1846.21\mathrm{A}$

$R_{izol}^{T} = 0.46359(0.38463)\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}_{strujanja}^{T} = 0.04033\mathrm{mK/W}; \mathrm{R}^{T} = 0.50392\mathrm{mK/W}; \mathrm{I}_{MAX} = 1066.44\mathrm{A}$