

## 5. Расподељени мешовити пренос топлоте

Досадашња разматрања су се односила на случајеве чврсте материјалне средине у којој се пренос топлоте одвија провођењем, при чему је тело ограничено површима коначних величина, од којих свака има константну температуру. У пракси постоји низ случајева код којих се температура граничне површи чврсте материјалне средине континуално мења, због чега се гранични услови не могу поставити на површима коначне величине. Као што ће се видети из даљег излагања, у таквим случајевима се мора решавати расподељени пренос топлоте провођењем и струјањем (струјање се евентуално разматра у комбинацији са зрачењем). Такви случајеви се имају код ребара за хлађење и размењивача топлоте између два флуида.

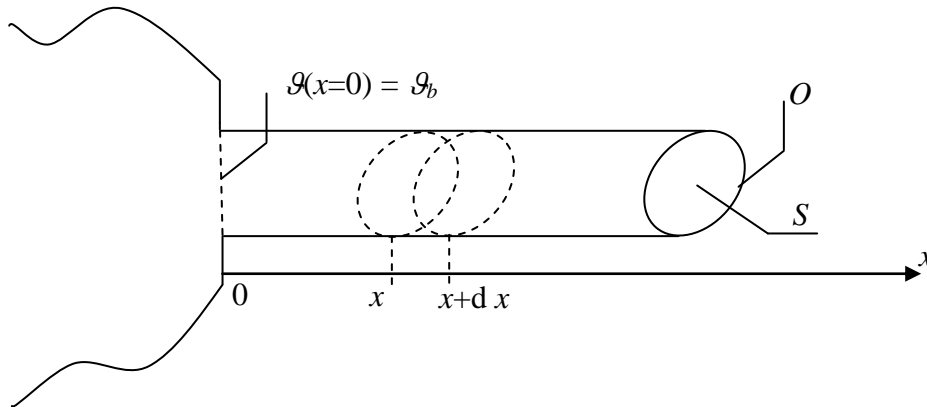
### 5. 1. Ребра за хлађење

При раду електротехничких уређаја јављају се губици енергије, односно долази до генерисања топлоте. Ова топлота изазива повећање температуре појединих делова уређаја, које не смеју да пређу дефинисане вредности. Отпор преласку топлоте од уређаја до расхладног флуида мора бити довољно мали да би пораст температуре уређаја, одређен као производ снаге губитака и топлотног отпора, био испод дозвољених вредности. Једна од могућности да се то постигне је да се на тело које треба охладити постави хладњак ребрасте конструкције. Критеријум задовољавајућег хлађења се може исказати и на следећи начин: потребно је да снага одвођења топлоте, коју хладњак одводи при температури тела ослоњеног на хладњак једнакој максимално дозвољеној, и при дефинисаној температури расхладног флуида који одводи топлоту са ребрене површи  $q_{\infty}$ , буде већа од губитака у уређају.

Температура се дуж ребра за хлађење преноси провођењем, док се у попречном правцу ка флуиду преноси струјањем. **Површинска густина снаге ка флуиду се смањује са повећањем растојања од хлађеног тела, као последица опадања температуре ребра.** Базни израз (диференцијална једначина) се добија на основу енергетског биланса за елементарни део ребра. Енергетски биланс обухвата два члана размене енергије провођењем са суседним елементима ребра и члан конвективног одвођења топлоте са површи омотача елементарног дела. Иницијално постављање и решавање диференцијалне једначине ће се извршити за случај да је коефицијент преласка топлоте струјањем ( $\alpha$ ) дуж ребра константан. У случају природног струјања флуида промена  $\alpha$  дуж ребра је значајна, па је треба узети у обзир.

## 5. 1. 1. Елементарна геометрија – константан попречни пресек ребра

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра на растојању  $x$  од тела на које је ребро ослоњено, дужине  $dx$  (слика 48) гласи:



Слика 48

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (154)$$

$q_x$  представља снагу којом се топлота преноси провођењем у правцу осе  $x$  (на месту  $x$ ), а  $dq_{strujanja}$  снагу којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине  $dx$ . Разлика  $(q_{x+dx} - q_x)$  представља диференцијал функције снаге провођења топлоте.

Из математике је познато да је диференцијал (прираштај) функције  $y(x)$ ,  $\Delta y(x)$ , једнак производу извода функције  $y'(x)$  и прираштаја независно променљиве  $\Delta x$ :  $\Delta y(x) = y'(x) \Delta x$ .

Функционална зависност снаге провођења од координате  $x$  гласи

$$q_x = -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (155)$$

па је њен диференцијал  $\Delta q_x(x)$

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx = -\lambda S \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx - \lambda \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} dx. \quad (156)$$

У случају да се попречни пресек ребра не мења по координати  $x$

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx = -\lambda S \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dx. \quad (157)$$

Изрази (156) и (157) важе за линеарну топлопроводну средину (константна вредност топлотне проводности  $\lambda$ ); уколико је  $\lambda$  променљиво, не може се извући из заграда.

Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача износи

$$dq_{strujanja} = \alpha O dx (\vartheta - \vartheta_{\infty}). \quad (158)$$

На основу (154), (157) и (158) може се написати

$$\lambda S \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} dx = \alpha O dx (\vartheta - \vartheta_{\infty}), \quad (159)$$

Одакле се формира диференцијална једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha O}{\lambda S} (\vartheta - \vartheta_{\infty}). \quad (160)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине (подсетимо, разматра се случај да се коефицијент преласка топлоте струјањем не мења дуж ребра) је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_{\infty}, \quad (161)$$

где је  $m$  параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha O}{\lambda S} = \frac{4 \alpha}{\lambda D}. \quad (162)$$

( $O$  представља обим попречног пресека ребра,  $S$  површину попречног пресека; у случају да је попречни пресек кружног облика, однос  $S / O = D / 4$ ).

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалне једначине (161) одређују се на основу граничних услова за два базиса ребра за хлађење. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра која је ослоњена на тело ( $x = 0$ ) –  $\vartheta(x = 0) = \vartheta_b$ . Други гранични услов се поставља за други базис ребра ( $x = L$ ;  $L$  представља дужину ребра), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре  $\vartheta_{\infty}$ , при чему је коефицијент преласка топлоте струјањем са базиса на флуид  $\alpha$ . Прецизан исказ другог граничног услова гласи

$$-\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L} = \alpha (\vartheta(x=L) - \vartheta_{\infty}). \quad (163)$$

Некада се, у циљу поједностављивања израза, које може бити од интереса за задатке на испиту, користе и два упрошћена гранична услова. Први је да је снага преноса топлоте ка базису једнака нули,

$$\left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L} = 0, \quad (164)$$

и други је да је температура базиса једнака температури флуида:

$$\vartheta(x=L) = \vartheta_{\infty} \quad (165)$$

Снага одвођења топлоте се може израчунати сабирањем (интеграцијом) снага које са омотача одводе струјањем:

$$P = \int_{x=0}^L \alpha O(\vartheta(x) - \vartheta_{\infty}) dx + \alpha S(\vartheta(x=L) - \vartheta_{\infty}), \quad (166)$$

или, што је једноставније, као снага која пође са базиса на који је ослоњено тело које се хлади

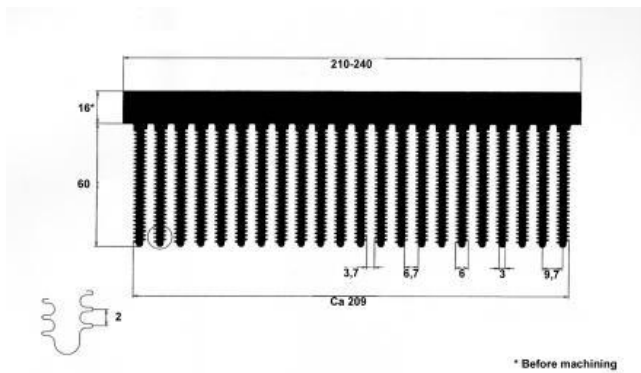
$$P = -\lambda S \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0}. \quad (167)$$

Појам ефикасности ребра ( $\eta$ ) за хлађење се дефинише као снага хлађења подељена са снагом која би се имала када би читава температура ребра била једнака температури базиса на који је ослоњено тело које се хлади:

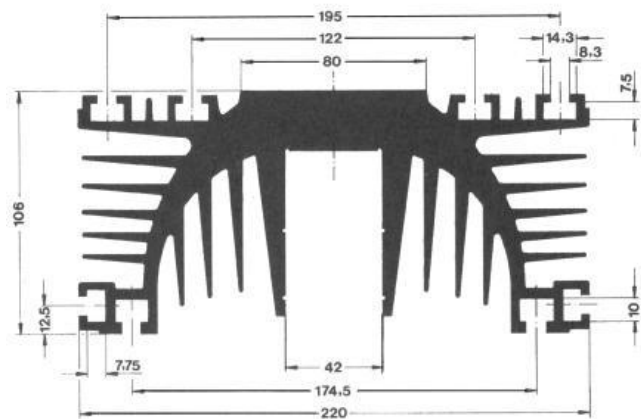
$$\eta = \frac{P}{\alpha(O L + S)(\vartheta_b - \vartheta_{\infty})} \quad (168)$$

### 5. 1. 2. Хладњаџи засновани на ребрима за хлађење

Теорија ребара за хлађење из одељка 5.1.1. је разматрала случај елементарних геометријских облика, односно посматрао се случај константног попречног пресека ребра. Хладњаџи који се користе у пракси имају доста сложеније облике. Примера ради, на сликама 49 и 50 су приказана два хладњаџа намењена за хлађење полупроводничких компоненти енергетских претварача. Прорачун преноса топлоте код хладњаџа са оваквим „ребрима за хлађење“ је компликованији и по правилу се врши од стране произвођача хладњаџа применом софтвера (на данашњем нивоу технике, широко је у примени метода коначних елемента – модули за пренос топлоте провођењем комбиновани са модулима за механику флуида – у оваквим софтверима, као међурезултат, израчунавају се и коефицијенти преласка топлоте). Након реализације (производње) хладњаџа, произвођачи експериментално одређују карактеристике хладњаџа, на основу чега у својим каталозима дају карактеристике које су погодне за практични одабир хладњаџа у уређајима енергетске електронике.



Слика 49

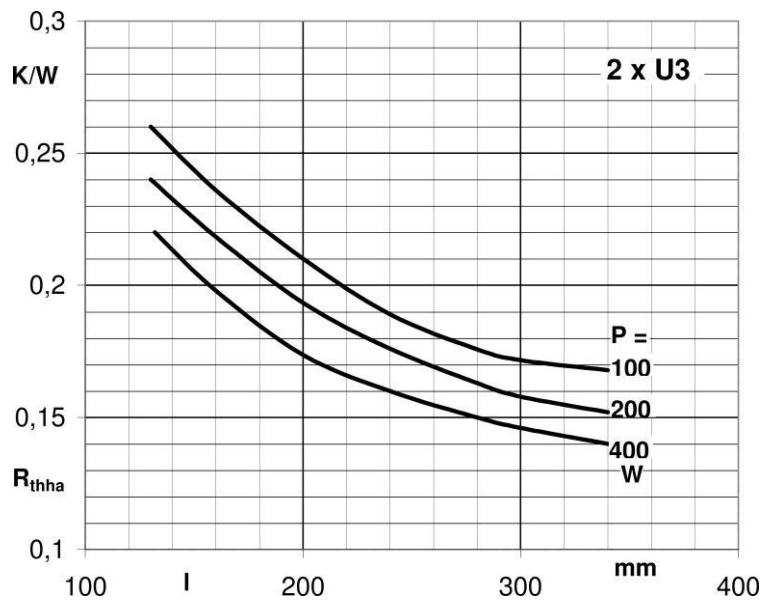


Слика 50

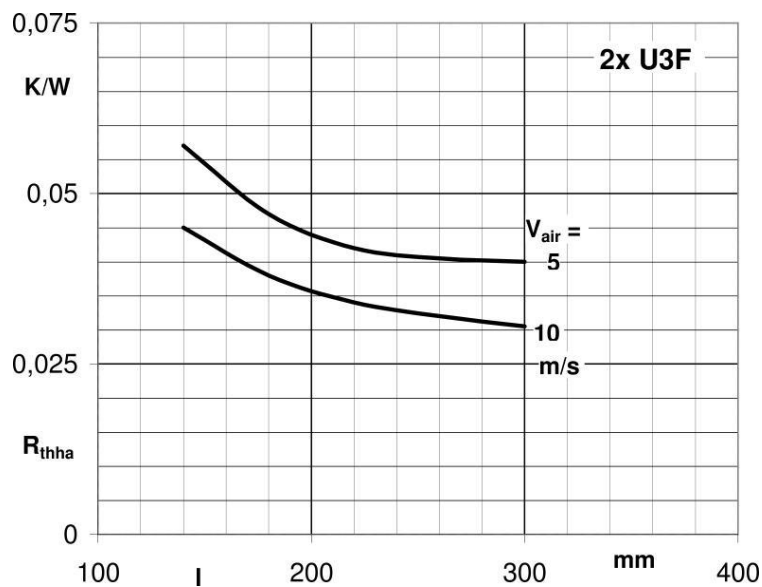
Произвођачи дају термичку карактеристику у облику термичког отпора  $R_{th}^{hl}$  (K / W) (однос разлике температура хлађеног тела и температуре амбијента и одведене топлоте), за сваки од предвиђених начина хлађења хладњака. Пример вредности топлотног отпора се даје за хладњак са слике 50 (комерцијална ознака U 3), у конфигурацији два хладњака по компоненти, за природно и принудно хлађење. У табели (слика 51) су дате вредности за хладњак дужине 300 mm, а на графицима вредности при природном хлађењу (слика 52) и при принудном хлађењу (слика 53) у зависности од дужине хладњака.

Хладњак	За компоненту пречника mm	$R_{th\ priр}$	$R_{th\ prin}$
		Природно хлађење K/W	Принудно хлађење ваздухом K/W
2 x U 3 / 300	47 ± 2	0.145 (400W)	0.04 ( $V_{air} = 4\text{ m/s}$ )

Слика 51



Слика 52



Слика 53

Са слике 52 се може приметити да са порастом снаге опада топлотни отпор – разлог је пораст коефицијента преласка топлоте струјањем  $\alpha$  (са растом снаге расте и разлика температура на површи хладњака и околног ваздуха, а због тога и коефицијент преласка топлоте струјањем).

Типична ситуација је да се топлота генерише унутар полупроводничке компоненте, због чега постоји разлика температуре од најтоплије тачке у компоненти и температури на површи

компоненте, која је ослоњена на хладњак. Карактеристику преноса топлоте унутар компоненте по правилу даје произвођач, у форми топлотног отпора. Примера ради, за један брзи IGBT модул (приказан на слици 54) топлотни отпор преносу топлоте кроз полупроводничку компоненту ( $R_{th}^{pp}$ ) износи 0.4 K / W по транзистору.



Слика 54

Ако је дозвољена температура полупроводника на месту где се јављају губици и генерише топлота  $\mathcal{G}_{pp}$  (у случају конкретне компоненте она износи 150 °C), температура расхладног ваздуха  $\mathcal{G}_a$  (рецимо 25 °C), а снага губитака  $P_\gamma$ , мора бити испуњен услов

$$(R_{th}^{hl} + R_{th}^{pp})P_\gamma \leq \mathcal{G}_{pp} - \mathcal{G}_a \quad (169)$$

Пад температуре унутар полупроводничке компоненте је диктиран конструкцијом, карактерисаном топлотним отпором  $R_{th}^{pp}$ , и радним режимом, од кога зависи снага губитака  $P_\gamma$ . Да не би дошло до термичког оштећења уређаја, потребно је одабрати хладњак тако да му термички отпор буде мањи од

$$R_{th}^{hl*} \leq \frac{\mathcal{G}_{pp} - \mathcal{G}_a}{P_\gamma} - R_{th}^{pp} \quad (170)$$

Из претходног израза се одређује максимална дозвољена вредност топлотног отпора хладњака ( $R_{th}^{hl*}$ ). На основу ње се, користећи каталог произвођача, може одабрати хладњак. Одабир хладњака подразумева одабир типа хладњака, одређивање његове дужине и евентуалног вентилатора.

Поред наведених топлотних отпора у стационарним топлотним стањима, као карактеристика полупроводничких компоненти и хладњака даје се и транзијентни топлотни отпор. Његово значење ће се објаснити на примеру компоненте која се хлади струјањем флуида познате температуре ( $\mathcal{G}_\infty$ ). Нека је температура компоненте у почетном тренутку била једнака температури расхладног флуида ( $\mathcal{G}(t=0) = \mathcal{G}_\infty$ ). Ако од почетног тренутка ( $t=0$ ) почну да се генеришу

топлотни губици константном снагом  $P_\gamma$ , доћи ће до загревања компоненте, односно до пораста температуре. Означимо са  $\mathcal{G}(t)$  снимљену вредност промене температуре током таквог процеса. Транзијентни топлотни отпори компоненте ( $R_{trans}$ ) се дефинише као

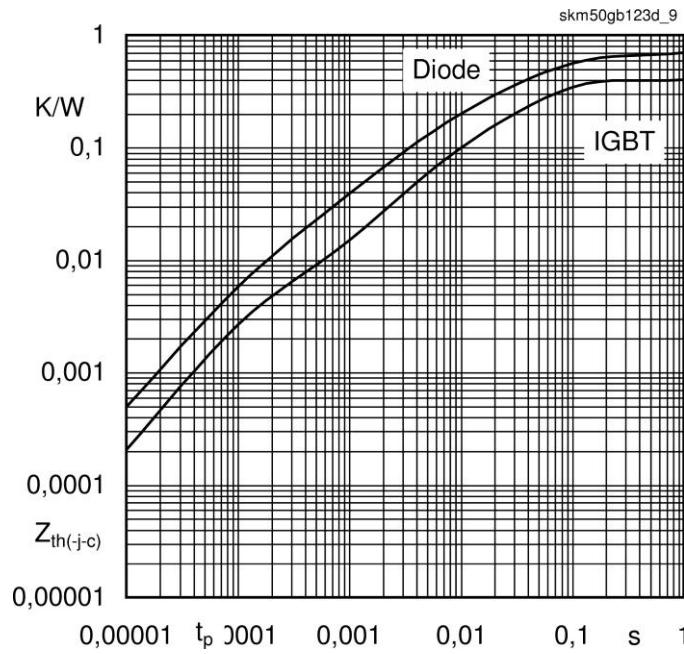
$$R_{trans}(t) = \frac{\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_\infty}{P_\gamma} \quad (171)$$

Наведени принцип, односно дефиниција транзијентног топлотног отпора могу се применити на саму компоненту и на хладњак. При томе, за компоненту се посматра пораст температуре на месту генерисања топлоте ( $pn$  спој) у односу на површ компоненте која се ослања на површ хладњака. Дакле, при одређивању топлотног отпора компоненте, генеришу се губици константном снагом ( $P_\gamma$ ), мери се температура на месту генерисања топлоте, при чему се спољна површ компоненте одржава на константној температури ( $\mathcal{G}_\infty$ ). За хладњак је потребно неким спољним извором топлоте генерисати константну снагу губитака ( $P_\gamma$ ), обезбедити да се она комплетно преноси ка површи хладњака (ова површ је у стварном уређају у контакту са компонентом) и мерити температуру ове површи ( $\mathcal{G}_{hl}$ ). Подразумева се да је температура ваздуха којом се хладњак током експеримента хлади константна ( $\mathcal{G}_\infty$ ). На основу претходног може се написати

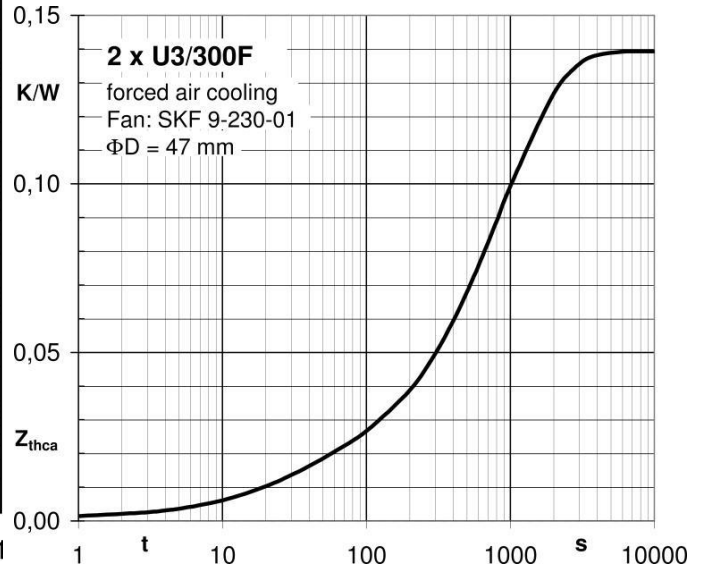
$$R_{trans\ pp}(t) = \frac{\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_\infty}{P_\gamma}, R_{trans\ hl}(t) = \frac{\mathcal{G}_{hl}(t) - \mathcal{G}_\infty}{P_\gamma}$$

Примери транзијентних топлотних отпора за полупроводничку компоненту су дати на слици 55, а за хладњак на слици 56. Приметимо да је време за које транзијентни топлотни отпор (односно одговарајућа разлика температура) достигне стационарно стање за неколико редова величина већи код хладњака него код полупроводничке компоненте.





Слика 55



Слика 56

На основу вредности транзијентног топлотног отпора може да се израчуна промена температуре у времену и у случају да је снага губитака променљива. Илустрација поступка ће се дати за пример двостепене промене снаге губитака (снага  $P_{\gamma 1}$  од почетног до тренутка  $t_1$  и снага  $P_{\gamma 2}$  од тренутка  $t_1$  до тренутка  $t_2$ ), при чему је температура у почетном тренутку била  $\vartheta_p$ . Температура флуида којим се хлади компонента је константна ( $\vartheta_\infty$ ). За овај случај временски ток промене температуре је одређен следећим изразима:

$$\vartheta(t) = \vartheta_\infty + (\vartheta_p - \vartheta_\infty) + \left( R_{thtrans}(t \rightarrow \infty) P_{\gamma 1} - (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \right) \frac{R_{thtrans}(t)}{R_{thtrans}(t \rightarrow \infty)} \tag{172a}$$

$$t \in [0, t_1]$$

$$\vartheta_{p1} = \vartheta(t = t_1) = \vartheta_\infty + (\vartheta_p - \vartheta_\infty) + \left( R_{thtrans}(t \rightarrow \infty) P_{\gamma 1} - (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \right) \frac{R_{thtrans}(t = t_1)}{R_{thtrans}(t \rightarrow \infty)} \tag{172b}$$

$$\vartheta(t - t_1) = \vartheta_\infty + (\vartheta_{p1} - \vartheta_\infty) + \left( R_{thtrans}(t \rightarrow \infty) P_{\gamma 2} - (\vartheta_{p1} - \vartheta_\infty) \right) \frac{R_{thtrans}(t - t_1)}{R_{thtrans}(t \rightarrow \infty)} \tag{172b}$$

$$t \in [t_1, t_2]$$

У случају компоненте ослоњене на хладњаку, израз (172) се примењује:

1. На хладњаку. Почетна температура  $\mathcal{G}_p$  представља почетну температуру површи хладњака на коју се ослања компонента,  $R_{th\ trans} = R_{th\ trans\ hl}$ . Описаним поступком се тада добија температура површи хладњака на коју је ослоњена компонента ( $\mathcal{G}_{hl}(t) \equiv \mathcal{G}(t)$ )
2. На компоненту  $R_{th\ trans} = R_{th\ trans\ pp}$ . При примени израза (172)  $\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_\infty$  се замењује разликом температуре компоненте и површи хладњака  $\theta_{pp-hl}(t)$ .  $\theta_{pp-hl\ p}$  представља разлику ових температура у почетном тренутку. Израз (172) добија форму

$$\theta_{pp-hl}(t) = \theta_{pp-hl\ p} + \left( R_{th\ trans}(t \rightarrow \infty) P_{\gamma 1} - \theta_{pp-hl\ p} \right) \frac{R_{th\ trans}(t)}{R_{th\ trans}(t \rightarrow \infty)}$$

$$t \in [0, t_1]$$

$$\theta_{pp-hl\ p1} = \theta_{pp-hl\ p} + \left( R_{th\ trans}(t \rightarrow \infty) P_{\gamma 1} - \theta_{pp-hl\ p} \right) \frac{R_{th\ trans}(t = t_1)}{R_{th\ trans}(t \rightarrow \infty)}$$

$$\theta_{pp-hl}(t - t_1) = \theta_{pp-hl\ p1} + \left( R_{th\ trans}(t \rightarrow \infty) P_{\gamma 2} - \theta_{pp-hl\ p1} \right) \frac{R_{th\ trans}(t - t_1)}{R_{th\ trans}(t \rightarrow \infty)}$$

$$t \in [t_1, t_2]$$

Сабирањем ове две компоненте,  $\mathcal{G}_{hl}(t)$  и  $\theta_{pp-hl}(t)$  добија се вредност промене температуре места на коме се генерише топлота у компоненти  $\mathcal{G}_{pp}$ .

Транзијентни топлотни отпор, као и стационарни топлотни отпор, мења се са снагом у случају природног струјања ваздуха мења, као резултат зависности коефицијента преласка топлоте струјањем  $\alpha$  од температуре површи.

Претходни резултат је заснован на усвојеној апроксимацији да се, посматрано са стране хладњака, прелазни топлотни процес у компоненти одвија тренутно, односно да се ка хладњаку одмах преноси целокупна генерисана топлота губитака  $P_\gamma$ . Грешка која се тиме чини није велика јер је термичка временска константа компоненте много мања од оне за хладњаку. Другим речима, прелазни топлотни процеси услед промене снаге (брзи у компоненти и спори у хладњаку) су „декупловани“ – када се посматра прелазни топлотни процес у хладњаку може се сматрати да се топлотни процес у компоненти одвија тренутно, а када се посматра прелазни топлотни процес у компоненти може се сматрати да се температура хладњака не мења.

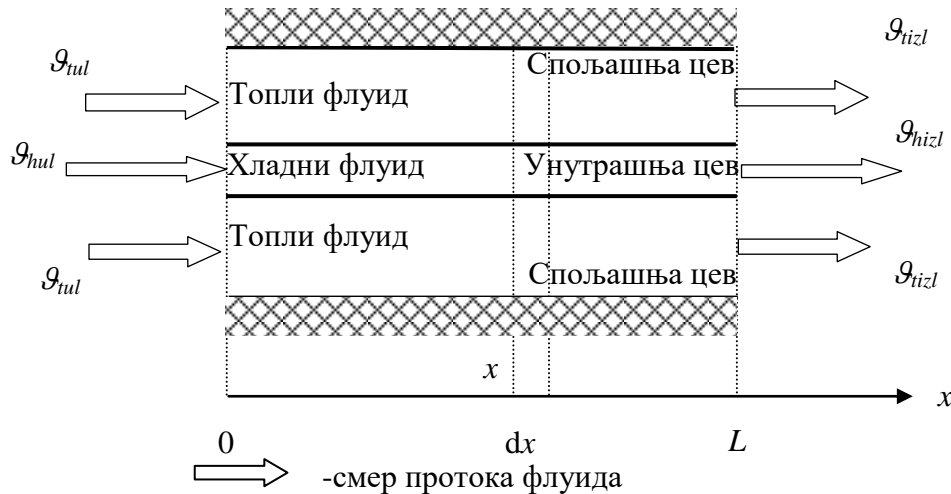
## 5. 2. Размењивачи топлоте између два флуида

Под размењивачем топлоте се подразумева конструкција код које два флуида размењују топлоту преко зида цеви са чије једне стране протиче топлији флуид, а са друге хладни флуид. Пренос топлоте од једног ка другом флуиду обухвата две компоненте преноса топлоте струјањем и компоненту преноса топлоте провођењем кроз цев. Основне једначине које описују размењиваче топлоте се изводе за елементарну конструкцију двоструке цеви, у две варијанте: 1) да флуиди у обе цеви струје у истом смеру (слика 57) и 2) да струје у супротним смеровима (слика 58). При постављању и решавању математичког модела размењивача топлоте полази се од претпоставке да се коефицијенти преласка топлоте струјањем са топлијег флуида на цев и са цеви на хладнији флуид, као и отпор преласку топлоте провођењем кроз цев, не мењају дуж цеви. Спољашња површ спољашње цеви се посматра као идеално топлотно изолована од околине.

У наставку текста се анализирају размењивачи топлоте код којих флуиди струје у истом правцу и истом или супротном смеру. Поред њих постоје и размењивачи топлоте код којих флуиди струје попречно један у односу на други. Теорија, односно једначине којима се описује њихово понашање, могу се наћи у литератури.

Слично као код ребара за хлађење, у случају да је смер топлог и хладног флуида исти, температура топлог флуида опада са одаљавањем од уласка у цев, температура хладног расте, па разлика топлог и хладног флуида опада. Разлика у односу на ребра за хлађење је у томе што се код ребара за хлађење температура ваздуха који хлади ребро није мењала дуж ребра. Основна диференцијална једначина чијим се решавањем долази до промена температуре топлог и хладног флуида, а на основу њих и осталих релевантних величина, поставља се преко енергетског биланса за топли и хладни флуид, за елементарну дужину цеви преко које флуиди размењују топлоту.

## 5.2.1. Размењивач топлоте у облику двоструке цеви са истим смеровима струјања флуида



Слика 57

Елементарна снага која се на елементарној дужини  $dx$ , на координати  $x$ , преноси од топлог ка хладном флуиду износи

$$dq = \frac{q_t(x) - q_h(x)}{dR^T}, \quad (173)$$

где су:

$q_t(x)$  - температура топлог флуида на координати  $x$ ,

$q_h(x)$  - температура хладног флуида на координати  $x$  и

$dR^T$  - отпор преласку топлоте на елементарном делу цеви, који се састоји од три компоненте: прелазак топлоте струјањем са топлог флуида на спољашњу површ унутрашње цеви, провођење кроз унутрашњу цев и струјање са унутрашње површи унутрашње цеви на хладни флуид. Овим компонентама одговарају, респективно, сабирци у изразу

$$dR^T = \frac{1}{\pi d \alpha_s dx} + \frac{1}{\lambda} \frac{\delta}{\pi d dx} + \frac{1}{\pi d \alpha_u dx}, \quad (174)$$

где су:

$d$  - пречник цеви,

$\delta$  - дебљина цеви ( $\delta \ll d$ ),

$\alpha_s$  - коефицијент преласка топлоте струјањем са топлог флуида на спољашњу површ унутрашње цеви

$\lambda$  - специфична топлотна проводност материјала унутрашње цеви,

$\alpha_u$  – коефицијент преласка топлоте струјањем са унутрашње површи унутрашње цеви на хладни флуид

Претходни израз важи под претпоставком да је дебљина цеви много мања од њеног полупречника, због чега се може приближно сматрати да су пречници обе површи на којима се врши пренос топлоте струјањем једнаки, а отпор провођењу топлоте се може одредити по формули која важи за раван зид. У даљим разматрањима ће се претпоставити да коефицијенти преласка топлоте дуж цеви имају константну вредност, што приближно важи јер је струјање флуида принудно. Израз за елементарну снагу преноса топлоте се може трансформисати у форму:

$$dq = \pi d dx \left( \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_u} \right)^{-1} (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)), \quad (175)$$

што као погодно намеће увођење јединственог коефицијента преноса топлоте ( $K_p$ ):

$$K_p = \left( \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_u} \right)^{-1} \quad (176)$$

Дакле,

$$dq = \pi d K_p (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) dx \quad (177)$$

С обзиром да је спољашња цев идеално топлотно изолована од околине, елементарна снага којом се енергија одводи од топлог флуида је једнака елементарној снази којом се енергија предаје хладном флуиду:

$$dq = -m_t c_{pt} d\vartheta_t(x) \quad (178)$$

(знак минус потиче од тога што је негативан градијент температуре топлог флуида у смеру  $x$  осе)

$$dq = +m_h c_{ph} d\vartheta_h(x) \quad (179)$$

(знак плус потиче од тога што је у смеру  $x$  позитиван градијент температуре хладног флуида)

Значење ознака у претходна два израза је:

$m_t$  – масени проток топлог флуида,

$m_h$  – масени проток хладног флуида,

$c_{pt}$  – специфични масени топлотни капацитет топлог флуида и

$c_{ph}$  – специфични масени топлотни капацитет хладног флуида.

Претходне три једначине представљају основне енергетске билансе, односно основне једначине из којих се могу одредити три непознате величине: промена температуре топлог флуида, хладног флуида и снага преноса топлоте између њих. У тексту који следи извршиће се интеграција ових

једначина у границама од уласка у цев до изласка из цеви, чиме ће се добити веза између снаге укупног преноса енергије и температура топлог и хладног флуида на уласку и изласку из цеви.

Изражавањем диференцијала температура у изразима (178) и (179) преко осталих величина, а затим формирањем њихове разлике, добија се

$$d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) = - \left( \frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) dq. \quad (180)$$

Заменом  $dq$  из израза (177) у (180), после примене елементарне трансформације долази се до

$$\frac{d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x))}{\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)} = -K_p \pi d \left( \frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) dx. \quad (181)$$

Интеграцијом претходне једначине у границама  $[\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}, \vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}]$ , односно  $[0, L]$  добија се

$$\ln \frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} = -K_p \left( \frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) S, \quad (182)$$

где  $S$  означава површину размењивача топлоте ( $\pi d L$ ).

Следећа интеграција ће се применити на елементарне изразе промене енергије топлог флуида (178) и хладног флуида (179):

$$q = m_t c_{pt} (\vartheta_{tul} - \vartheta_{tizl}) \quad (183)$$

$$q = m_h c_{ph} (\vartheta_{hizl} - \vartheta_{hul}) \quad (184)$$

Слично као што су изрази (178) – (179) представљали основне једначине у диференцијалном облику, изрази (182) – (184) представљају основне везе између интегралних вредности, од уласка до изласка из хладњака.

Уобичајено, за неки хладњак су познати протоци и карактеристике оба флуида, температура хладног флуида на уласку  $\vartheta_{hul}$  (пре него што се загреје) и температура топлог флуида на уласку  $\vartheta_{tul}$  (пре него што се охлади). Тада се из израза (182) – (184) одређује снага хлађења и температура хладног флуида на изласку (након што он преузме топлоту од топлог флуида) и температура топлог флуида на изласку (након што он топлоту преда хладном флуиду).

Снага размене енергије између топлог и хладног флуида може се израчунати и ако нису познати протоци, али су познате све четири температуре флуида (топлог и хладног, на уласку и изласку), што у одређеним ситуацијама у пракси може бити од интереса (у принципу је једноставније мерити температуру него проток). Након изражавања протока преко снаге пренете топлоте од

топлог ка хладном флуиду и разлике температура, користећи изразе (183) и (184), а затим уврштавањем у (182), добија се

$$\ln\left(\frac{\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}}{\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}}\right) = K_p S \left( -\frac{\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{tizl}}{q} - \frac{\mathcal{G}_{hizl} - \mathcal{G}_{hul}}{q} \right) \quad (185)$$

а одатле

$$q = \frac{K_p S (\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl} - \mathcal{G}_{tul} + \mathcal{G}_{hul})}{\ln\left(\frac{\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}}{\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}}\right)} \quad (186)$$

Увођењем ознака

$$\Delta \mathcal{G}_{izl} = \mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}$$

и

$$\Delta \mathcal{G}_{ul} = \mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}$$

израз (186) постаје

$$q = \frac{K_p S (\Delta \mathcal{G}_{izl} - \Delta \mathcal{G}_{ul})}{\ln\left(\frac{\Delta \mathcal{G}_{izl}}{\Delta \mathcal{G}_{ul}}\right)} \quad (187)$$

Из (183) и (184) се може успоставити веза између температура

$$m_t c_{pt} (\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{tizl}) = m_h c_{ph} (\mathcal{G}_{hizl} - \mathcal{G}_{hul}), \quad (188)$$

што је израз који може бити од користи при решавању неког практичног инжењерског проблема / задатка на испиту.

## 5.2.2. Размењивач топлоте у облику двоструке цеви са супротним смеровима струјања флуида



Слика 58

Елементарна снага која се на елементарном делу дужине цеви  $dx$ , на координати  $x$ , преноси од топлог ка хладном флуиду износи

$$dq = \pi d K_p (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) dx, \quad (189)$$

Изрази за елементарну снагу се могу написати и на следећи начин:

$$dq = -m_t c_{pt} d\vartheta_t(x) \quad (190)$$

(знак минус потиче од тога што је негативан градијент температуре топлог флуида у смеру  $x$  осе)

$$dq = -m_h c_{ph} d\vartheta_h(x) \quad (191)$$

(знак минус потиче од тога што је негативан градијент температуре хладног флуида у смеру  $x$  осе)

Изражавањем диференцијала температура из израза (190) и (191), а затим формирањем њихове разлике, добија се

$$d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) = \left( -\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) dq. \quad (192)$$

Заменом израза (189) у (190) и елементарном трансформацијом долази се до

$$\frac{d(\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x))}{\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)} = K_p \pi d \left( -\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) dx. \quad (193)$$



Интеграцијом претходне једначине у границама [ $\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}$ ,  $\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}$ ], односно  $[0, L]$  добија се

$$\ln \frac{\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}}{\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}} = \mathbf{K}_p \left( -\frac{1}{m_t c_{pt}} + \frac{1}{m_h c_{ph}} \right) S, \quad (194)$$

где  $S$  означава површину размењивача топлоте ( $\pi d L$ ). Снага размене енергије између топлог и хладног флуида се може добити после исказивања сабирака из члана у загради на десној страни једначине преко снаге  $q$ . То се може учинити преко интеграције једначина (190) и (191), односно преко енергетских биланса за топли, односно хладни флуид. Интеграцијом са границама на уласку и изласку из размењивача топлоте:

$$q = m_t c_{pt} (\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{tizl}) \quad (195)$$

$$q = m_h c_{ph} (\mathcal{G}_{hul} - \mathcal{G}_{hizl}) \quad (196)$$

На основу израза (195), (196) и (196), долази се до

$$\ln \left( \frac{\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}}{\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}} \right) = \mathbf{K}_p S \left( -\frac{\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{tizl}}{q} + \frac{\mathcal{G}_{hul} - \mathcal{G}_{hizl}}{q} \right), \quad (197)$$

а одатле

$$q = \frac{\mathbf{K}_p S (\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl} - \mathcal{G}_{tul} + \mathcal{G}_{hul})}{\ln \left( \frac{\mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}}{\mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}} \right)}. \quad (198)$$

Увођењем ознака

$$\Delta \mathcal{G}_{izl} = \mathcal{G}_{tizl} - \mathcal{G}_{hizl}$$

и

$$\Delta \mathcal{G}_{ul} = \mathcal{G}_{tul} - \mathcal{G}_{hul}$$

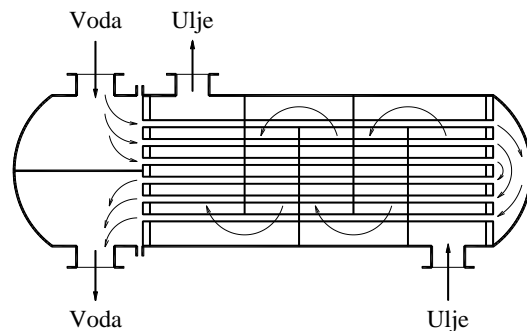
израз (198) постаје

$$q = \frac{\mathbf{K}_p S (\Delta \mathcal{G}_{izl} - \Delta \mathcal{G}_{ul})}{\ln \left( \frac{\Delta \mathcal{G}_{izl}}{\Delta \mathcal{G}_{ul}} \right)}. \quad (199)$$

Израз (199) је идентичан изразу (187) који је изведен за случај струјања флуида у истом смеру.

### 5.2.3. Размењивачи топлоте комплекснијег облика

На сликама 57 и 58 приказане су елементарне конфигурације размењивача топлоте које су имале академски значај. Стварни размењивачи топлоте су комплекснијег облика, како би постигло да размењивач заузме што мању запремину, односно како би се по јединици заузетог простора имала што већа површина преко које флуиди размењују топлоту. Једна стварна конструкција размењивача топлоте је приказана на слици 59 (на левој фотографији приказан је део хладњака у коме хладна вода улази у хладњак и из кога загревава вода излази из хладњака, а на десној фотографији комора на супротној страни хладњака, у којој вода мења смер). Ова се конструкција по правилу користи код уљних енергетских трансформатора код којих је уље унутрашњи расхладни флуид (њиме се хлади активни део – намотаји и језгро), а вода спољашњи расхладни флуид (њоме се топлота преузима од уља и одводи у околину).

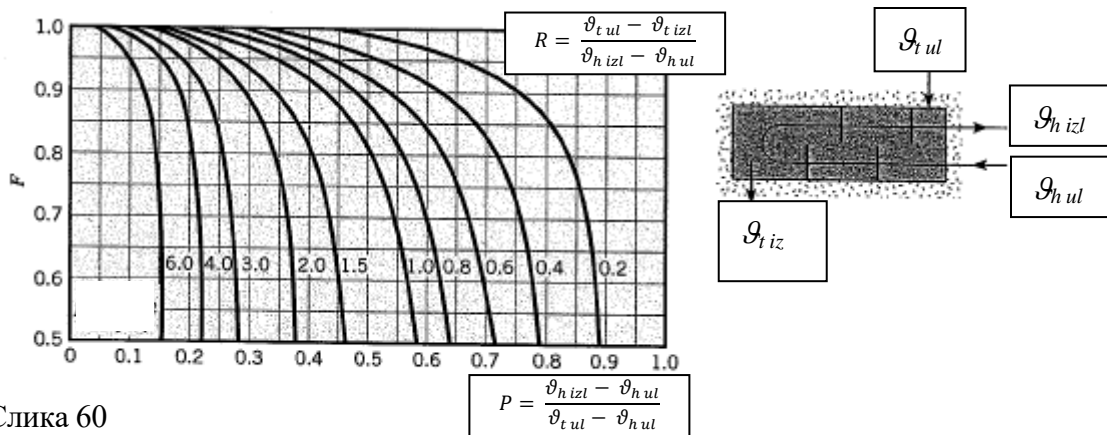


Слика 59

За типичне стварне облике размењивача топлоте, попут претходно наведеног, у литератури се могу наћи вредности коефицијената  $F$ , чијим се множењем са снагом елементарног размењивача топлоте која би се имала при истом коефицијенту преласка топлоте, истој површини хладњака и истим температурама, добија снага преноса топлоте од топлог ка хладном флуиду код реалног размењивача:

$$q = \frac{K_p S F (\Delta \vartheta_{izl} - \Delta \vartheta_{ul})}{\ln \left( \frac{\Delta \vartheta_{izl}}{\Delta \vartheta_{ul}} \right)} \quad (200)$$

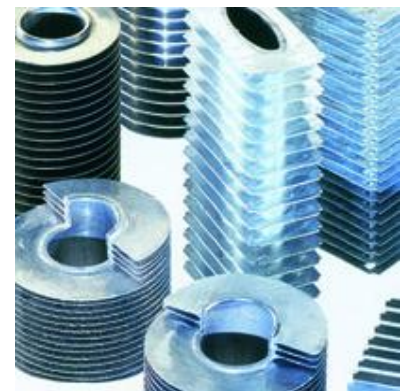
За размењивач топлоте са слике 59 вредност коефицијената  $F$  се одређује са графика приказаног на слици 60.



Слика 60

#### 5.2.4. Размењивачи топлоте са различитим површима према једном и другом флуиду

До сада је разматран случај да су површине површи ка сваком од флуида ( $S$ ) једнаке. Код стварних размењивача топлоте то често није случај, односно по правилу се повећава површина на страни на којој коефицијент преласка топлоте ( $\alpha$ ) има мању вредност. Разлог због кога се ово чини је да се постигне максимална ефикасност хладњака – оптимизација по простору и утрошеном материјалу. Дакле, циљ је постићи што већу снагу од топлог ка хладном флуиду, са хладњаком који заузима што мањи простор и захтева што мањи



утрошак материјала. У случају неједнаких површи топлотни отпори преласку топлоте струјањем на страни топлог флуида и на страни хладног флуида износе  $1 / (\alpha_t S_t)$  и  $1 / (\alpha_h S_h)$ , респективно. Отпор провођењу топлоте се такође рачуна између унутрашње и спољашње површи цеви, уважавајући оребрење профила. У случају оребрења цеви, за одређивање укупног подужног топлотног отпора

између топлог и хладног флуида, односно коефицијента преноса топлоте са топлог на хладни флуид, користи се теорија ребра за хлађење.

### 5.2.5. Фактор запрљања размењивача топлоте

У досадашњем излагању је посматран идеализован случај да се коефицијент преноса топлоте са топлог на хладни флуид  $K_p$  током времена не мења. Он је дат изразом (176) и садржи компоненте преласка топлоте струјањем са топлог флуида на цев, провођењем кроз цев и струјањем са цеви на хладни флуид. Компоненте преласка топлоте струјањем зависе од брзине флуида, термичких карактеристика флуида и температуре. Провођење кроз цев зависи превасходно од дебљине цеви и топлотне проводности материјала цеви. Током рада хладњака долази до запрљања цеви, односно таложења материја са стране једног и другог флуида на површ цеви, које доводи до тога да се карактеристике размењивача топлоте (коефицијент преноса топлоте са топлог на хладни флуид) током времена мењају. Таложење материја доводи до појаве додатних отпора провођењу топлоте кроз сваки од два „нова слоја“ настала таложењем. У том случају израз за коефицијент преноса топлоте са топлог на хладни флуид гласи

$$K_p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s} + \frac{1}{\alpha_u} + \frac{\delta}{\lambda} + fD_s + fD_u}, \quad (201)$$

Где су додатни топлотни отпори по јединици површине услед наталожених материја описани чланом  $fD_s$  за спољашњу страну цеви, а  $fD_u$  за унутрашњу страну цеви.

Из израза за снагу преноса топлоте (187) и (199) се види да се коефицијент преноса топлоте са топлог на хладни флуид  $K_p$  множи са површи. У ситуацији када се површи према унутрашњем ( $S_u$ ) и спољашњем ( $S_s$ ) флуиду разликују, као површ се може узети једна од ових површи. Уколико се, на пример, као референтна узме површ ка унутрашњем флуиду  $S_u$ , коефицијент проласка топлоте за чист хладњак би износио (израз (176) важи за случај да су површи  $S_u$  и  $S_s$  сличне)

$$K_{p_{cisto}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s} \frac{S_u}{S_s} + \frac{1}{\alpha_u} + \frac{S_u}{(S_u + S_s)/2} \frac{\delta}{\lambda}}$$

(топлотни отпор провођењу одређен је приближно као да се топлота проводи кроз раван зид дебљине  $\delta$  и површине попречног пресека једнаког средњој вредности унутрашње и спољашње површи  $(S_u + S_s)/2$ .)

Површи према којима се рачуна додатни топлотни отпор услед наталожених материја ( $R_{fd}=1/(fd S)$ ) се разликују, односно узима се површ (унутрашња или спољашња) на коју се материје таложе. У случају

да се као референтна површ у изразима (187) и (199) узме површ ка унутрашњем флуиду  $S_u$  коефицијент преласка топлоте износи (израз (201) важи за случај да су површи  $S_u$  и  $S_s$  сличне)

$$K_{Pzaprlijano} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s} \frac{S_u}{S_s} + \frac{1}{\alpha_u} + \frac{S_u}{(S_u + S_s)/2} \frac{\delta}{\lambda} + fD_s \frac{S_u}{S_s} + fD_u}$$

*Пример: размењивачи топлоте уље/вода на трансформатору снаге 380 MVA*

Примена изложене теорије ће се илустровати на примеру трансформатора снаге 380 MVA, код кога се уље хлади преко размењивача топлоте уље-вода.

Блок-трансформатор на једној хидро електрани (трансформатор је трофазни, тронамотајни, са два ниженапонска намотаја, на која се прикључују генератори, и једним вишенапонским намотајем, ка мрежи) има називну снагу 2 x 190 MVA / 380 MVA, називни напон  $U_{rl} = 15.75$  kV, на ниженапонској страни и  $U_{rh} = 420$  kV, на вишенапонској страни. Називни губици трансформатора, одређени током примопредајних испитивања у фабрици, износе  $P_{Fe} = 318$  kW (губици у празном ходу) и  $P_{Tr} = 780$  kW (губици услед оптерећења номиналном струјом при средњој температури намотаја од 75 °C).

Пренос топлоте од уља, које се загрева услед губитака у активном делу трансформатора, ка спољњем расхладном флуиду (води) се врши преко два размењивача топлоте уље-вода, сваки спољњег пречника 300 mm и дужине 2.5 m, чија је конструкција приказана на слици 59. Вода струји кроз 105 цеви U профила, пречника  $D = 15.7$  mm. Површ суда, са кога се топлота одводи природним струјањем ваздуха, износи  $S_i = 160$  m<sup>2</sup>, а његова висина  $L = 4$  m.

На трансформатору су обављена мерења у стационарном топлотном стању при оптерећењу 362 MVA, чему одговара снага губитака од 1026 kW. На трансформатор је постављен одређен број термопарова за мерење температура у карактеристичним тачкама – уље у цепу, уље на уласку и изласку из размењивача топлоте, вода на уласку и изласку из размењивача топлоте, температура амбијента и температура суда. Последње две вредности су битне за одређивање снаге којом се топлота одводи са површи суда ка околном ваздуху.

Мерења су показала да постоји потпуна симетрија између два размењивача топлоте.

Мерења су извршена пре и после чишћења унутрашње површи цеви U профила, кроз које протиче вода. Спољна страна цеви U профила, преко које струји уље, није чишћена. Мерене вредности карактеристичних температура су приказане у Табели П1-1.

Табела П1-1 – Измерене вредности карактеристичних температура

	$\vartheta_{uul} (^{\circ}\text{C})$	$\vartheta_{uizl} (^{\circ}\text{C})$	$\vartheta_{vul} (^{\circ}\text{C})$	$\vartheta_{vizl} (^{\circ}\text{C})$
После чишћења	54.5	34.5	6.5	17.1
Пре чишћења	60.1	40.5	6.7	17.4

Термичким прорачунима, чији су детаљи приказану у раду [http://elektrotermija.etf.bg.ac.rs/paper\\_3.pdf](http://elektrotermija.etf.bg.ac.rs/paper_3.pdf), добијене су вредности снага хлађења преко површи суда на ваздух. Након одузимања ове снаге хлађења од снаге губитака и дељењем разлике са 2 долази се до снаге преноса топлоте са уља на воду у сваком од хладњака. Вредности су приказане у Табели П1-2.

Табела П1-2 – Снага преноса топлоте са површи суда и кроз сваки од хладњака

	$P_{sa\ suda}$ (kW)	$P_{hladjaka}$ (kW)
После чишћења	20.45	501.5
Пре чишћења	22.82	503

Међурезултат термичких прорачуна ([http://elektrotermija.etf.bg.ac.rs/paper\\_3.pdf](http://elektrotermija.etf.bg.ac.rs/paper_3.pdf)), добијен коришћењем израза за коефицијенте преласка топлоте струјањем из литературе, са вредностима брзине струјања уља и воде као улазним параметрима, дошло се до вредности коефицијената преласка топлоте са уља на цев  $\alpha_{ulja} = 3196 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$  и са цеви на воду  $\alpha_{vode} = 2510 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ . Напоменимо да геометрија за струјање воде („једноставно“ струјање кроз цев) и уља (попречно струјање преко снопа цеви) није иста, па се разликују и једначине по којима се израчунавају коефицијенти преноса топлоте струјањем. Вредност топлотног отпора (по јединици површи) провођењем кроз цев износи  $R_{\lambda\ cevi} = 2.653 \cdot 10^{-6} \text{ (K/W) m}^2$ .

На бази ових података израчунати су фактори запрљања на странама хладњака према уљу и према води на следећи начин.

Из израза (200), полазећи од измерених температура уља и воде, снага која се од уља ка води преноси у сваком од хладњака, укупне површине свих 105 цеви У профила и коефицијента  $F$  одређеног са графика на слици 60, долази се до вредности коефицијента преноса топлоте са уља на воду: после чишћења стране цеви кроз коју протиче вода  $K_{P\ cisto\ voda} = 608 \text{ W}/\text{m}^2 \text{ K}$  ( $fD_u = 0, fD_s > 0$ ) и

пре чишћења стране цеви кроз коју протиче вода  $K_{P\text{ prljavo}} = 520 \text{ W/m}^2 \text{ K}$  ( $fD_u > 0$ ,  $fD_s > 0$ ). У идеалном случају, када су чисте обе стране, и према уљу и према води, коришћењем израза (201), у коме су  $fD_u = 0$  и  $fD_s = 0$ , а  $\alpha_s (\equiv \alpha_{ulja}) = 3196 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$  и  $\alpha_u (\equiv \alpha_{vode}) = 2510 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ , добија се да вредност коефицијента преноса топлоте са уља на воду износи  $K_{P\text{ cisto}} = 1401 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ .

Прима (201),

$$\frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + fD_u + fD_s = \frac{1}{k_{P\text{ prljavo}}}$$

$$\frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} + fD_s = \frac{1}{k_{P\text{ cisto voda}}}$$

$$\frac{1}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_s} + \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{k_{P\text{ cisto}}}$$

Одавде се добија:

$$fD_u = \frac{1}{k_{P\text{ prljavo}}} - \frac{1}{k_{P\text{ cisto voda}}}$$

$$fD_s = \frac{1}{k_{P\text{ cisto voda}}} - \frac{1}{k_{P\text{ cisto}}}$$

Резултат израчунавања:

- са унутрашње стране, према води  $fD_u = 0.0002781$
- са спољашње стране, према уљу  $fD_s = 0.000391$