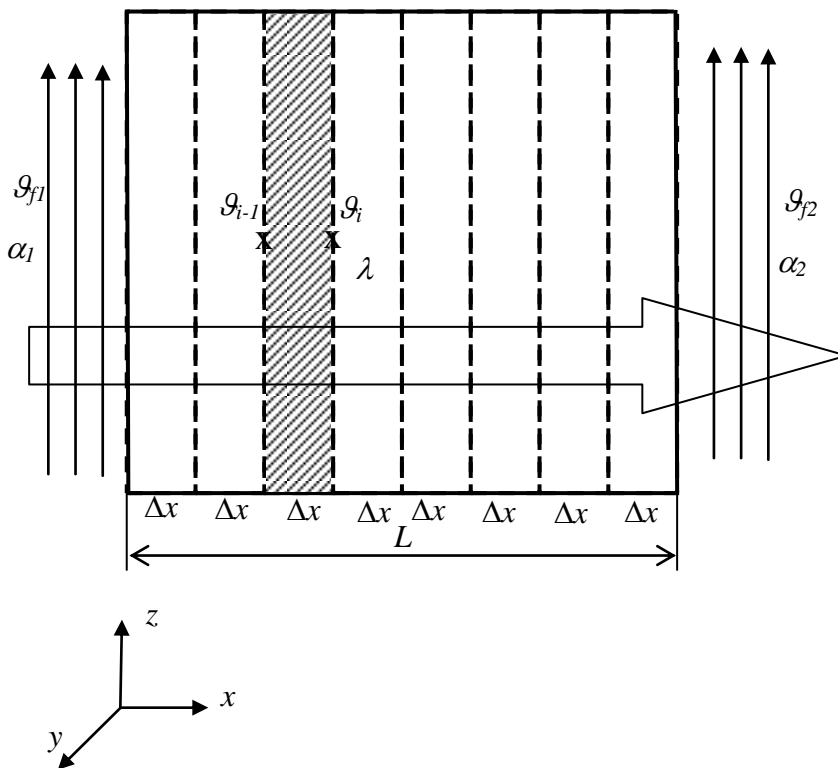


5.2.1. Једначине написане на основу поделе топлопроводне средине на мали број изотермичких делова

Јасно је да свака подела топлопроводне средине не делове као последицу има смањење градијента температуре у сваком од делова (у односу на укупни градијент) – тиме је оправданија претпоставка да делови представљају изотермичке запремине. Примера ради, посматрајмо једнодимензиони пренос топлоте кроз раван зид дебљине L , направљен од материјала специфичне топлотне проводности λ , који се са једне стране загрева флуидом температуре ϑ_{f1} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем са флуида на зид α_1 , а са друге стране се хлади флуидом температуре ϑ_{f2} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем са зида на флуид α_2 .



Слика 27

$$\vartheta = f(x, t) = \text{const.}(y, z)$$

За зид подељен на n једнаких делова (на примеру приказаном на слици $n = 8$) отпор преносу топлоте кроз један део зида (ширина једног дела зида $\Delta x = L / n$) износи

$$R_{\lambda 1}^T = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{S} \tag{113}$$

Пад температуре, услед преноса топлоте провођењем кроз један део зида, исказан преко укупне разлике температура флуида температуре ϑ_{f1} на флуида температуре ϑ_{f2} , износи

$$\Delta \vartheta_{\lambda 1} = (\vartheta_{i-1} - \vartheta_i) = (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{\lambda S} + \frac{1}{\alpha_2 S}}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{\lambda S} + \frac{1}{\alpha_2 S} + \frac{1}{\lambda S} + \frac{1}{\alpha_2 S}} = \frac{1}{n} (\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}) \frac{\frac{L}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (114)$$

Дакле, што је већи број делова на које је подељен зид, односно што је мања дебљина једног дела зида, то је мањи пад температуре на њему у односу на укупни пад температуре $\frac{(\vartheta_{i-1} - \vartheta_i)}{(\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2})}$,

односно то је оправданија претпоставка да део зида представља изотермичку запремину. Прихватљивост претпоставке о томе да је температура по запремини дела константна може се исказати и користећи приступ преко *Biot*-овог броја дефинисаног као однос топлотног отпора провођењу топлоте кроз један део зида и збирног преосталог топлотног отпора преносу топлоте

$$\text{са флуида 1 на флуид 2: } B_i = \frac{\frac{1}{\lambda} \frac{L/n}{S}}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{\lambda} \frac{(n-1)L/n}{S} + \frac{1}{\alpha_2 S}} < 0.1.$$

Кад се топлопроводна средина „издели“ (дискретизује), за сваки од делова се пише једначина енергетског биланса, практично у складу са објашњењем из 2.1.1. (енергетски биланс за затворен систем) и 2.1.3. (енергетски биланс на граничној површи).

Граничне површи делова, на којима се дефинишу гранични услови на сваком од делова, могу бити ка другом делу топлопроводне средине (у примеру са претходне слике постоји 6 унутрашњих делова са две граничне површи овога типа и 2 спољашња дела са једном граничном површи овога типа) или ка околини (у примеру са претходне слике постоје 2 спољашња дела са граничном површи овога типа, један је према флуиду температуре ϑ_{f1} и један ка флуиду температуре ϑ_{f2}).

Ако је површ према другом делу топлопроводне средине (координата $x=0$), гранични услов је типа 6. (видети уводни део у поглавље 5.): $-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t}$; градијент температуре

се израчунава као коначни прираштај температуре у дискретизованим моделу, као разлика температура доступних у моделу. Ако се са ϑ_{2l} означи температура на граничној површи између делова 1 и 2, са ϑ_1 температура на средини дела 1 и са ϑ_2 температура на средини дела

2, градијент температуре у делу лево од граничне површи, чија је дебљина L_1 износи

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = \lambda_1 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{12}}{L_1/2}, \text{ а градијент температуре у делу десно од граничне површи, чија је}$$

$$\text{дебљина } L_2 \text{ износи } -\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t} = \lambda_2 \frac{\vartheta_{12} - \vartheta_2}{L_2/2} \text{ (у случају да се посматра гранична површ између}$$

делова 1 и 2 хомогеног зида: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Топлотни отпор преносу топлоте провођењем од левог дела ка граничној површи, одређен као количник разлике температура $\vartheta_1 - \vartheta_{12}$ и снаге преноса

$$\text{топлоте, износи } R_{\lambda 1}^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S}; \text{ аналогно, топлотни отпор провођењу топлоте ка десном делу}$$

$$\text{износи } R_{\lambda 2}^T = \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S}. \text{ Ова два топлотна отпора су везана на ред, тако да је топлотни отпор}$$

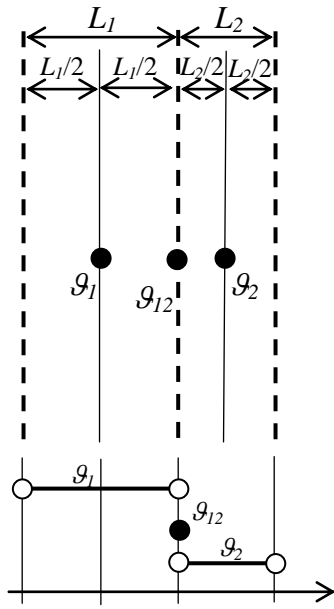
између средишних тачака суседних делова топлопроводне средине (слика 28)

$$R^T = R_{\lambda 1}^T + R_{\lambda 2}^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S} \quad (115)$$

Снага којом се енергија од дела 1 преноси у део 2 једнака је

$$P_{izl} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S}} \quad (116)$$

Интересантно је сагледати какав профил температуре одговара приближној представи да су запремине на које је подељена топлопроводна средина изотермичке, а да је отпор преносу топлоте између њих једнак топлотном отпору провођењу топлоте између средишњих тачака запремина. Скица два суседна дела зида и профил температуре су приказани на следећој слици.



Слика 28

$$g_{12} = g_1 - \frac{g_1 - g_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2/2}{S}} \frac{1}{\lambda} \frac{L_1/2}{S} \quad (117)$$

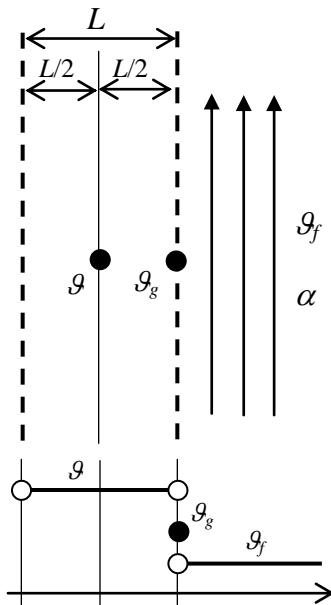
Ако је површ према околина, гранични услов је један од типова 1. – 5.; као пример представе преко топлотног отпора (аналогно претходном) приказаће се гранични услов типа 4.; као и у претходном случају, посматраће се једнодимензиони пренос топлоте. Топлотни отпор између средишње тачке дела зида дужине L који се налази уз граничну површ која се хлади струјањем флуида температуре g_f (при чему коефицијент преласка топлоте струјањем са површи на флуид износи α) одређен је изразом

$$R^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L/2}{S} + \frac{1}{\alpha S} \quad (118)$$

Снага којом се енергија од дела зида предаје флуиду једнака је

$$P_{izl1} = \frac{g - g_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L/2}{S} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (119)$$

Скица дела зида и суседног флуида, као и профил температуре који одговара усвојеном моделу, приказани су на следећој слици.



Слика 29

$$\theta_g = \theta - \frac{\theta - \theta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha} \frac{L}{2}} \frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} \quad (120)$$

На претходна два примера илустровано је како се описује размена енергије кроз сваку од граничних површи које „затварају“ сваку од изотермичких запремина. Укупна снага размене енергије изотермичких запремина са околином је једнака збиру снага размене енергије кроз граничне површине те запремине.

На овај начин је постављен модел за одређивање снаге којом посматрани део енергију размењује са околином (P_{izl}). Снага генерисања топлоте (P_g), као следећа компонента енергетског биланса посматраног дела, одређује се интеграцијом снаге генерисања топлоте по запремини посматраног дела. Последња компонента, којом се „затвора математички модел“, је снага којом се енергија акумулише у запремини посматраног дела (P_{ak}). Полазећи од претпоставке да део запремине V има константну температуру (θ), P_{ak} је једнако $\rho c_p V \frac{d\theta}{dt}$ (ρ (kg/m^3) је густина материјала топлопроводне средине је, а c_p ($\text{J}/(\text{m}^3 \text{K})$) специфични запремински топлотни капацитет).

Дакле, за елемент код кога је снага кроз једну граничну површ одређена изразом (116), а кроз другу износи P_{izl2} , комплетна једначина енергетског биланса гласи

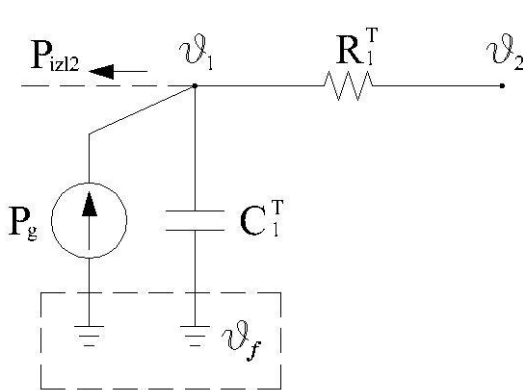
$$P_g = \rho c_p V \frac{d\vartheta_1}{dt} + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{2}} + P_{izl2} \quad (121)$$

За елемент код кога је снага кроз једну граничну површ одређена изразом (119), а кроз другу износи P_{izl2} , комплетна једначина енергетског биланса гласи

$$P_g = \rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\vartheta - \vartheta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha S}} + P_{izl2} \quad (122)$$

Ово је била основа на којој „се граде“ многе од метода које ће се изложити у наставку предавања.

Корак даље у представи термичких процеса је увођење топлотних шема, што је форма која је посебно погодна за електроинжењере и студенте електротехнике. Примера ради, на наредне две слике су приказани елементи топлотне шеме који одговарају претходно изнетим примерима, односно једначинама (121) – Слика 30 и (122) – Слика 31. **Стриктно посматрано, шеме важе за случај да температура флуида ϑ_f није константна, а приближно се могу применити и ако се ϑ_f споро мења.** Уколико то није случај, не могу се користити заменске шеме, већ изрази (121) и (122).

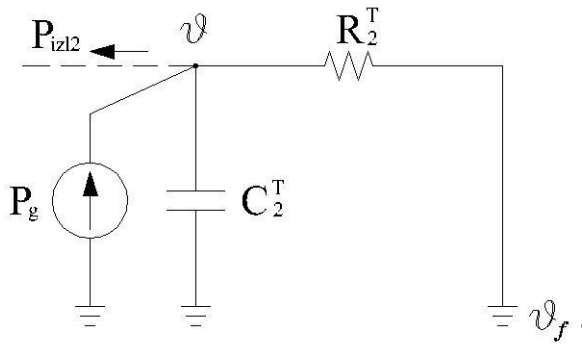


$$R_1^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L_1}{2} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2}{2} \quad (123)$$

$$C_1^T = \rho c_p L_1 S \quad (124)$$

P_g представља снагу генерисања топлоте у запремини $L_1 S$

Слика 30



$$R_2^T = \frac{1}{\lambda} \frac{L/2}{S} + \frac{1}{\alpha S} \quad (125)$$

$$C_2^T = \rho c_p L S \quad (126)$$

P_g представља снагу генерисања топлоте у запремини $L S$

Слика 31

За елемент топлотне шеме са слике 31 коришћењем истих принципа као у теорији кола може се написати једначина:

$$P_g = C_2^T \frac{d(\vartheta - \vartheta_f)}{dt} + P_{izl2} + \frac{\vartheta - \vartheta_f}{R_2^T} \quad (127)$$

$$P_g = \rho c_p L S \frac{d(\vartheta - \vartheta_f)}{dt} + P_{izl2} + \frac{\vartheta - \vartheta_f}{\frac{1}{\lambda} \frac{L/2}{S} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (128)$$

Уколико се за пораст температуре у односу на референтну температуру (ϑ_f) уведе ознака $\theta = \vartheta - \vartheta_f$, израз (127) постаје

$$P_g = \rho c_p L S \frac{d\theta}{dt} + P_{izl2} + \frac{\theta}{\frac{1}{\lambda} \frac{L/2}{S} + \frac{1}{\alpha S}} \quad (129)$$

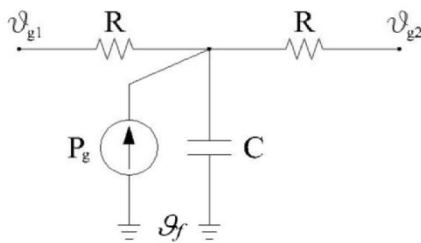
Аналогно, за елемент топлотне шеме са слике 30 има се

$$P_g = \rho c_p L_1 S \frac{d\theta_1}{dt} + P_{izl2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{\lambda} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda} \frac{L_2/2}{S}} \quad (130)$$

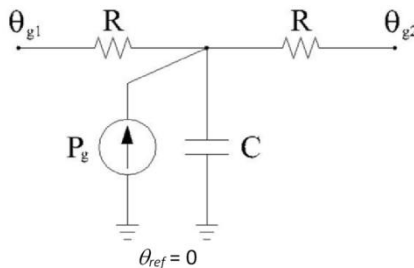
Код примене топлотних шема на реалне системе постоји значајне разлика у односу на електрична кола, код којих је референтни потенцијал (пандан температури ϑ_f у топлотној шеми) константан, температура ϑ_f често није константна – на пример, температура ваздуха у просторији којом се хлади трансформатор смештен у њу, је виша од споропроменљиве температуре ваздуха ван проторије и зависи од вредности губитака у трансформатору. У овом случају није могуће формирати топлотну шему трансформатора са референтним чвором на температури ваздуха у просторији, већ се мора применити једначине базиране на принципима једначина (121) и (122). Поред

тога, термички модел је потребно проширити тако да обухвати не само термичке процесе унутар трансформатора и између трансформатора и просторије, већ и за саму просторију, која се доминантно хлади кроз вентилационе отворе.

Поступак увођења топлотних шема се базирао на основним једначинама температурног поља и дискретизацији топлопроводне средине. На основу претходно изложеног, једноставним расуђивањем може се доћи до модела дела кроз који се врши једнодимензиони пренос топлоте кроз изотермички део, за случај да се може сматрати да је референтна температура (амбијент) константна. Модел је приказан на наредне две слике; на слици 32 чворовима су додељене температуре – референтни чвор је на температури амбијента, а на слици 33 пораста – референтни чвор је на вредности нула.

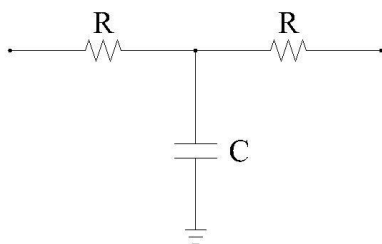


Слика 32



Слика 33

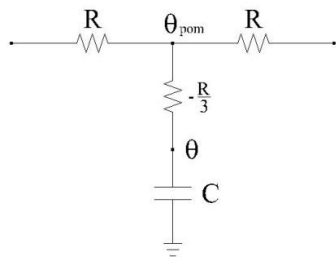
Уколико по запремини не постоји генерисање топлоте, шема се своди на следећу.



Слика 34

У литератури постоје и „софистициранији“ модели. Претходно коришћени модели су били базирани на претпоставци да је температура по запремини константна, а да се размена енергије кроз део одвија као провођење топлоте од средишње тачке дела. Полазећи од тога да је извод температуре, а не температура, константан по запремини, долази се до модела дела приказаног на

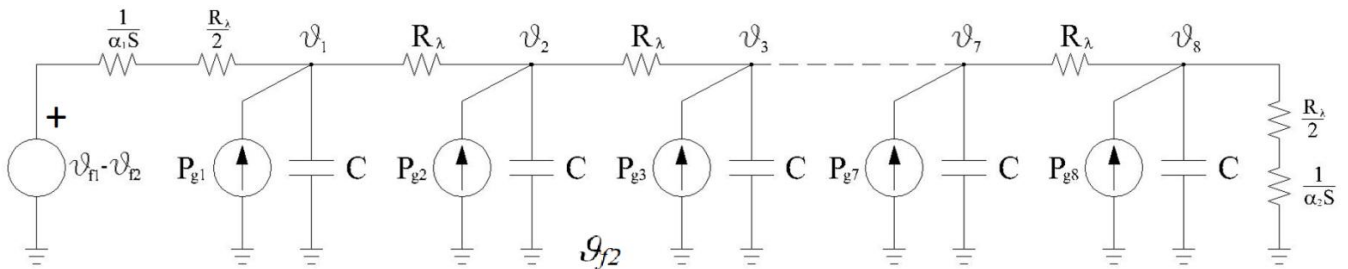
следећој слици. Овакав модел је прецизнији и његова примена доводи до тачнијих резултата при моделовању преноса топлоте кроз тело: за добијање резултата исте тачности, потребно је применити мање оваквих делова (подела средине се може извршити на мањи број делова), односно за исти број делова (за исту поделу) добијају се тачнији резултати. θ је пораст средње температуре посматраног дела, а θ_{pom} помоћна величина која нема физичко објашњење, а настала је као помоћна променљива у спроведеном математичком поступку.



Слика 35

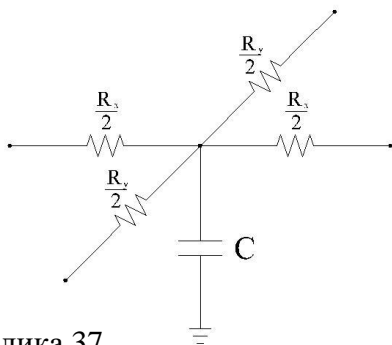
Пример комплетне топлотне шеме ће се дати за случај раваног зида по чијој се запремини генерише топлота и који се са леве стране загрева струјањем флуида температуре ϑ_{f1} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем α_1 , а са десне стране хлади струјањем флуида температуре ϑ_{f2} , при коефицијенту преласка топлоте струјањем α_2 . Топлотна шема којом се описује овај систем, односно нестационарни једнодимензиони пренос топлоте кроз зид, приказана је на слици 36. Као референтна температура је узета температура хладнијег флуида ϑ_{f2} . Део топлотне шеме који описује загревање левог базиса ваљка одговара следећем изразу за снагу загревања P_{zagr}

$$P_{zagr} = \frac{\vartheta_{f1} - \vartheta_{f2}}{\frac{1}{\lambda} \frac{L}{2} + \frac{1}{\alpha_1}}$$

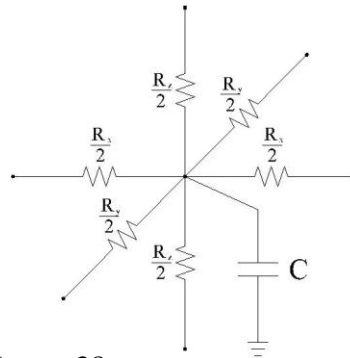


Слика 36

Коначно, на следеће две слике приказани су модели за случај дводимензионалног, односно тродимензионалног преноса топлоте у правоугаоном (*Descartes*-ом) координатном систему (случај када не постоји генерисање топлоте по запремини).



Слика 37



Слика 38

Топлотне шеме се могу применити и у случајевима када се топлотни систем састоји од више тела, сачињених од различитих материјала (такав случај је већ помињан у претходном тексту – једначина (115)). Примера ради, ако би делови дужина L_1 и L_2 на слици 28 припадали различитим телима (зидовима), сачињених од материјала топлотне проводности λ_1 и λ_2 , респективно, топлотни отпор између средишта ова два дела би износио

$$R^T = \frac{1}{\lambda_1} \frac{L_1/2}{S} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{L_2/2}{S} \quad (131)$$

У електроенергетици су чести системи у којима су поједина тела у топлотном систему направљена од материјала много веће топлотне проводности него друга тела: на пример, у случају кабла једно хомогено тело представља електропроводни део (бакар или алуминијум), а друго хомогено тело електрична изолација. У топлотној шеми електропроводни део се може (без практичног смањења прецизности модела) приказати као топлотни капацитет, а изолација као топлотни отпор. Другим речима, због односа вредности параметара електропроводног и изолационог материјала, за електропроводни део се може сматрати да представља изотермичку запремину, а за електроизолациони део се може занемарити акумулисање топлоте у њему. Генерисање топлоте је доминантно у електропроводном делу, односно генератор снаге у топлотној шеми је везан паралелно са топлотним капацитетом.

Коначно, топлотне шеме се могу применити и за стационарне топлотне режиме, тако да се у претходно описаним моделима само „изостави кондензатор“. Скуп једначина који одговара таквим топлотним шемама представља скуп алгебарских једначина (за разлику од скупа диференцијалних једначина, којима се описују прелазни топлотни процеси).

5.2.1.1. Аналитичко решавање скупа алгебарских (за стационарне топлотне режиме) или диференцијалних (за прелазне топлотне процесе) једначина

Као што је већ речено, предност оваквог начина решавања је добијање експлицитних аналитичких израза просторне / временске расподеле температуре. Реално се може применити само за мали број једначина, односно грубу поделу топлопроводне средине и за мали број тела који сачињавају топлотни систем. Друго реално ограничење је да је материјална средина линеарна, као и да су гранични услови линеарни, односно да је пренос топлоте са граничних површи пропорционалан разлици температура граничне површи и температуре флуида (другим речима, елементи топлотне шеме не могу да зависе од температуре). Такви примери су приказани у задацима 35-37 у Збирци задатака; такође и у задацима 31-34 (задатак 33. је већ поменут на предавањима – часови 10 до 12 – Слика 25).

Ако кренемо од тога да смо као први корак формирали јединствену топлотну шему која описује топлотни систем, корак који следи је писање система диференцијалних / алгебарских једначина који одговара топлотној шеми. Једначине је најпогодније писати по методи аналогној методи потенцијала чворова. Примера ради, навешће се скуп од 8 једначина (број једначина је једнак броју чворова, односно броју кондензатора) који одговара слици 36 (овај систем је превелики да би било рационално да се решава аналитички). Ако са θ означимо разлику температуре \mathcal{G} и температуре хладног флуида \mathcal{G}_2 (референтној тачки топлотне шеме додељена је температура \mathcal{G}_2) систем једначина гласи:

$$C \frac{d\theta_1}{dt} = P_{g1} + \frac{\theta_{f1} - \theta_1}{\frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{R_\lambda}{2}} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_\lambda} \quad (132)$$

$$C \frac{d\theta_2}{dt} = P_{g2} + \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_\lambda} - \frac{\theta_2 - \theta_3}{R_\lambda} \quad (133)$$

$$C \frac{d\theta_3}{dt} = P_{g3} + \frac{\theta_2 - \theta_3}{R_\lambda} - \frac{\theta_3 - \theta_4}{R_\lambda} \quad (134)$$

$$C \frac{d\theta_4}{dt} = P_{g4} + \frac{\theta_3 - \theta_4}{R_\lambda} - \frac{\theta_4 - \theta_5}{R_\lambda} \quad (135)$$

$$C \frac{d\theta_5}{dt} = P_{g5} + \frac{\theta_4 - \theta_5}{R_\lambda} - \frac{\theta_5 - \theta_6}{R_\lambda} \quad (136)$$

$$C \frac{d\theta_6}{dt} = P_{g6} + \frac{\theta_5 - \theta_6}{R_\lambda} - \frac{\theta_6 - \theta_7}{R_\lambda} \quad (137)$$

$$C \frac{d\theta_7}{dt} = P_{g7} + \frac{\theta_6 - \theta_7}{R_\lambda} - \frac{\theta_7 - \theta_8}{R_\lambda} \quad (138)$$

$$C \frac{d\theta_8}{dt} = P_{g8} + \frac{\theta_7 - \theta_8}{R_\lambda} - \frac{\theta_8}{\frac{R_\lambda}{2} + \frac{1}{\alpha_2 S}} \quad (139)$$

5.2.1.2. Решавање система алгебарских или диференцијалних једначина применом нумеричких метода – коришћење математичких библиотека програма у оквиру програма написаних у „класичним“ програмским језицима

Као што је већ дискутовано, овакав приступ јесте од интереса када се развијају софтвер за термичко пројектовање електроенергетске опреме, а за већину студената је важније савладавање приступа који се објашњава у одељку 5.2.1.3.

5.2.1.3. Решавање система алгебарских или диференцијалних једначина применом наменских симулационих програма

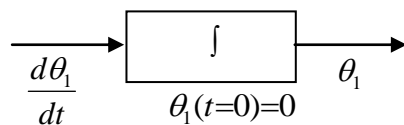
Задавање и решавање система алгебарских једначина се може једноставно решити применом неког од актуелних софтверских алата, као што су *Mathcad* (погодно за мање системе једначина) или *Matlab* (погодно за веће системе једначина).

Симулациони рачунарски програми у суштини представљају рачунарске програме намењене решавању система диференцијалних једначина који описују различите врсте физичких процеса. По правилу једначине се пишу у простору стања: са леве стране једначине фигурише вектор извода променљивих стања, а са десне вектор променљиве стања (x) и вектор улазне променљиве (u), помножени са преносним матрицама A и B ($\dot{x} = Ax + Bu$). Форма у простору стања се користи због тога што је из ње једноставно формирати блок дијаграме, који су погодна форма за унос у рачунар – у савременим симулационим програмима, као што је *Simulink*, у улазном едитору се директно црта блок дијаграм, док је у старијим варијантама симулационих програма који су радили под DOS оперативним системом (DOS верзија *Tutsim*-а, на пример) за сваки блок постојала мнемоничка ознака, па се блок дијаграм уносио преко едитора текста.

Пример формирања блок-дијаграма ће се дати за једначину (132), при чему ће се посматрати случај да је температура читаве запремине у тренутку $t = 0$ била једнака температури хладног флуида (θ_2), односно да је у почетном тренутку разлика температура сваког од делова зида и температуре хладног флуида била једнака нули ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = \theta_7 = \theta_8 = 0$). У простору стања једначина (132) гласи

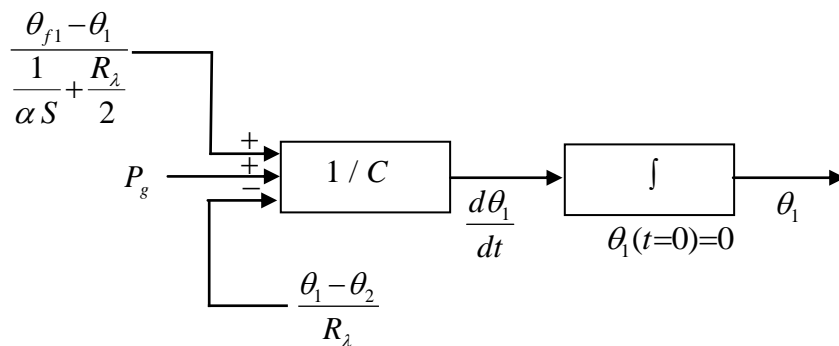
$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{1}{C} \left(P_{g1} + \frac{\theta_{f1} - \theta_1}{\frac{1}{\alpha S} + \frac{R_\lambda}{2}} - \frac{\theta_1 - \theta_2}{R_\lambda} \right) \tag{140}$$

Цртање блок дијаграма је погодно започети од блока интеграције: θ_1 се добија интеграцијом њеног извода ($d\theta_1 / dt$); почетни услов за интегратор је $\theta_1(t = 0) = 0$:



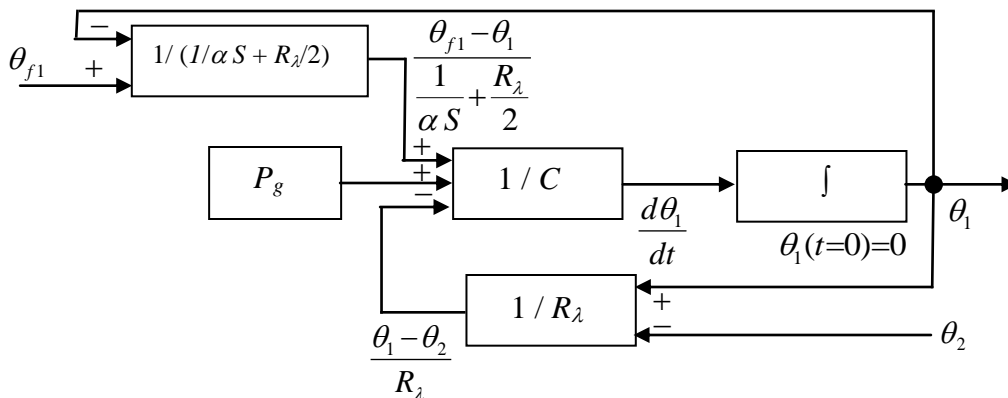
Слика 39

Вредност извода је једнака суми три члана, од којих је један улазна величина (P_g), подељеној са топлотним капацитетом (константом) C :



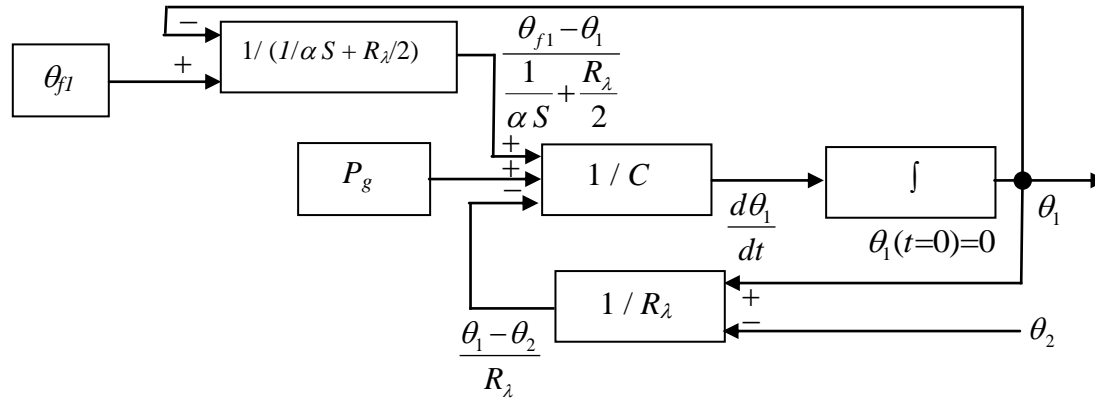
Слика 40

Следећи логичан корак:



Слика 41

Коначно, имајући у виду да је θ_{f1} улазна величина, долази се до



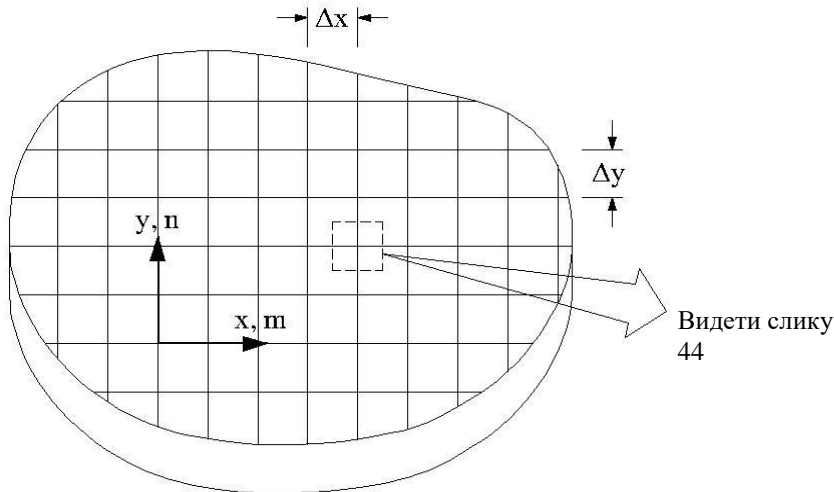
Слика 42

Све се „уклопило“, осим вредности θ_2 , али и она би се постала доступна када би се нацртао блок-дијаграм за други елемент (једначина (133)). По цртању блок-дијаграма за сваки елемент не би остала ни једна „неповезана грана“.

Израда симулационог програма за један топлотни систем је садржај једне од лабораторијских вежби. Свака група студента ће добити посебан задатак, за који ће написати и пустити симулациони програм у *Simulink*-у. Студентима је на сајту предмета доступан један урађен пример, сличан ономе који треба да ураде.

5.2.2. Решавање једначина написаних на основу поделе топлопроводне средине на велики број делова

У овом одељку ће се изложити метода коначних разлика. Овим математичким поступком се могу одредити вредности температуре у коначном броју тачака и то у коначном броју временских тренутака. Први корак је одређивање броја и позиција тачака и усвајање скупа тренутака у којима се температуре у тим тачкама рачунају (практично, усвајање корака просторне и временске дискретизације). Видеће се да код примене појединих математичких поступака постоје ограничења у избору корака просторне и временске дискретизације. Пример поделе топлопроводне средине на делове је приказан на слици 43, за случај дводимензионалне расподеле температурног поља. У примеру, мрежа елемената је сачињена од квадратних облика. Поред мреже квадратног облика, у примени је честа и примена троугаоних облика. У тродимензионом случају, најчешће се користе облици коцке и тетраедра.

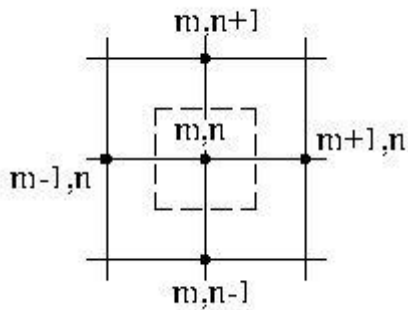


Слика 43

Слично као код претходно описаног поступка решавања топлотних проблема базираног на подели топлопроводне средине на мали број делова (поглавље 5.2.1), и овде се сматра да једна тачка репрезентује једну област, односно да је температура области једнака температури у тој тачки. Тачка репрезент области може, али не мора да буде у средишту области. Као и у поглављу 5.2.1, поставља се енергетски биланс (генерисана топлота у области, акумулисана топлота у области и размена топлоте са околним деловима: $Q_g = Q_{ak} + Q_{izl}$). Једина разлика је у томе што се акумулисана топлота, уместо у форми првог извода функције температуре у времену ($d\mathcal{Q}(x, y, z, t) / dt$), исказује преко коначног прираштаја у дефинисаном кораку временске дискретизације. Коначни прираштај у дефинисаном временском кораку може се исказати на два начина, при чему избор има значајне последице на математичке методе за решавање система једначина. Прва могућност је да се извод температуре исказе као разлика температуре у текућем и температуре у претходном тренутку, подељена са кораком временске дискретизације (на даље ће се сматрати да је корак временске дискретизације константан). Друга могућност је да се извод температуре исказе преко разлике температуре у следећем и температуре у текућем тренутку.

Да би се објаснила метода, посматраће се **дводимензионални пренос топлоте у правоугаоном координатном систему, без запреминског генерисања топлоте**, при чему су кораци дискретизације како по x координати (Δx), тако и по y координати (Δy), константни. На слици 44 је приказан један елемент топлопроводне средине (m, n) који репрезентује област означену испрекиданим квадратом, са све четири стране окружен другим елементима

топлопроводне средине – растојања између тачака $m-1$ и m , односно m и $m+1$, је Δx , а између тачака $n-1$ и n , односно n и $n+1$, је Δy .



Слика 44

Једначина енергетског биланса, за извод температуре исказан преко разлике температура у следећем $(p+1)$ и у текућем (p) тренутку, гласи (l представља координату по димензији управној на раван, по којој се температура не мења):

$$0 = \rho c_p \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \Delta x \Delta y l - \lambda \Delta y l \frac{\vartheta_{m-1,n}^p - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta x} + \lambda \Delta y l \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m+1,n}^p}{\Delta x} - \lambda \Delta x l \frac{\vartheta_{m,n-1}^p - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta y} + \lambda \Delta x l \frac{\vartheta_{m,n}^p - \vartheta_{m,n+1}^p}{\Delta y} \quad (141)$$

$$\rho c_p \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \lambda \frac{\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p - 2\vartheta_{m,n}^p}{\Delta x^2} + \lambda \frac{\vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p - 2\vartheta_{m,n}^p}{\Delta y^2} \quad (142)$$

У случају када је $\Delta x = \Delta y$ (ова претпоставка не утиче на суштинско разумевање методе, а уводи се ради скраћивања записа), претходни израз (уз увођење ознаке $a = \lambda / \rho c_p$) постаје

$$\frac{1}{a} \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p - 4\vartheta_{m,n}^p}{\Delta x^2} \quad (143)$$

Једноставном трансформацијом се долази до

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo (\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p + \vartheta_{m,n-1}^p + \vartheta_{m,n+1}^p) + (1 - 4Fo) \vartheta_{m,n}^p \quad (144)$$

где је Fo Fourier-ов број, $Fo = a \Delta t / \Delta x^2$.

У случају једнодимензионог преноса топлоте, једначина која описује сличан елемент за који у дводимензионом случају важи једначина (144) гласи

$$\vartheta_{m,n}^{p+1} = Fo (\vartheta_{m-1,n}^p + \vartheta_{m+1,n}^p) + (1 - 2Fo) \vartheta_{m,n}^p \quad (145)$$

Ако се извод температуре искаже преко разлике температура у текућем ($p+1$) у односу на претходни (p) тренутак, једначина која одговара једначини (143) гласи:

$$\frac{1}{a} \frac{\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{\mathcal{G}_{m-1,n}^{p+1} + \mathcal{G}_{m+1,n}^{p+1} + \mathcal{G}_{m,n-1}^{p+1} + \mathcal{G}_{m,n+1}^{p+1} - 4\mathcal{G}_{m,n}^{p+1}}{\Delta x^2} \quad (146)$$

Одатле се може написати

$$\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - \mathcal{G}_{m,n}^p = Fo \left(\mathcal{G}_{m-1,n}^{p+1} + \mathcal{G}_{m+1,n}^{p+1} + \mathcal{G}_{m,n-1}^{p+1} + \mathcal{G}_{m,n+1}^{p+1} - 4\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} \right) \quad (147)$$

$$(1 + 4Fo)\mathcal{G}_{m,n}^{p+1} - Fo \left(\mathcal{G}_{m-1,n}^{p+1} + \mathcal{G}_{m+1,n}^{p+1} + \mathcal{G}_{m,n-1}^{p+1} + \mathcal{G}_{m,n+1}^{p+1} \right) = \mathcal{G}_{m,n}^p \quad (148)$$

Постоји суштинска разлика између једначина (144) и (148).

Ако се крене од почетног тренутка, у коме су као почетни услов познате температуре у свим тачкама, применом израза (144) могу се једноставно одредити вредности у свим тачкама у сваком од наредних тренутака (најпре у тренутку Δt , потом у тренутку $2\Delta t$, па у $3\Delta t$ и тако даље; постоје експлицитни изрази за температуру у свакој тачки у сваком од наредних тренутака, због чега се метода заснована на разлици температура у следећем у односу на текући тренутак назива *експлицитна метода*).

Израз (148) садржи 4 непознате вредности – из претходног тренутка фигурише само једна (позната) вредност – $\mathcal{G}_{m,n}^p$. Да би се одредиле температуре у сваком од тренутака после нултог, потребно је решити систем једначина – број једначина једнак је броју чворова. За решавање система једначина се користи инверзија матрице или нека од нумеричких метода – често коришћени метод је *Gauss-Seidel*-ов итеративни метод. Специфичност проблема је што су матрице система једначина ретке, за чије решавање постоје ефикасне нумеричке методе. Метода заснована на разлици температура у текућем у односу на претходни тренутак се назива *имплицитна метода*. На први поглед „праволинијска природа“ експлицитне методе делује као природнија, боља и једноставнија, па би се очекивало да израчунавање по тој методи захтева мање израчунавања, те да због тога израчунавање траје краће. Међутим, да би поступак експлицитне методе конвергирао, мора бити испуњен услов да је коефицијент уз температуру $\mathcal{G}_{m,n}^p$ позитиван; дакле, $(1 - 4Fo) \geq 0$, односно постоји услов да је *Fourier*-ов број $Fo \leq 1/4$. Последица је да за усвојени корак просторне дискретизације Δx^* , корак временске дискретизације мора да буде мањи од $\Delta t^* \leq (1/4) \Delta x^{*2} / a$. Код имплицитне методе конвергенција не зависи од величине временског корака, односно температура се може израчунавати у произвољном броју корака. Због тога се може догоди да укупно време прорачуна буде мање него када би се температура израчунавала применом експлицитне методе у већем броју краћих временских интервала, које је неопходно због услова нумеричке конвергенције.

У претходном тексту је изложен пример да је елемент топлопроводне средине са све четири стране окружен другим елементима топлопроводне средине. На вежбама ће бити урађен један пример нестационарног једнодимензионог преноса топлоте, у систему у коме постоји генерисање топлоте по запремини тела. Додатни примери формирања алгебарских / диференцијалних једначина за елементе топлопроводне средине који се налазе поред граничних површи могу се видети у испитним роковима на сајту предмета.

5.2.3. Графичка метода

Графичка метода се примењује за решавање стационарних дводимензионалних проблема топлотног провођења без генерисања топлоте. Графичком методом се одређује подужни топлотни отпор између две произвољне изотермичке линије, које се налазе на различитим температурама, чија разлика износи $\Delta\theta_R$. Метода се заснива на цртању изотермичких линија и линија топлотне снаге. Разлика температура за које се цртају две суседне изотермичке линије ($\Delta\theta_{корак}$) треба да буде иста, при чему треба да буде испуњен услов $\Delta\theta_{корак} = \Delta\theta_R / N_T$, где је N_T цео број. Изотермичке линије и линије топлотне снаге се цртају следећи правило да изотермичке линије и линије топлотне снаге буду међусобно управне и да збир наспрамних страница добијених фигура буде приближно једнак (да се формирају „криволинијски квадрати“). Подужни топлотни отпор се одређује према изразу

$$r_i = \frac{l}{\lambda} \frac{N_T}{N_S}, \quad (149)$$

где су: λ специфична топлотна проводност, N_T број изотермичких линија (при чему се броји само једна од две изотермичке линије између којих се одређује подужни топлотни отпор) и N_S број линија топлотне снаге.

5.2.4. Коришћење електричних аналогних модела

5.2.4.1. Коришћење дисконтинуалних модела

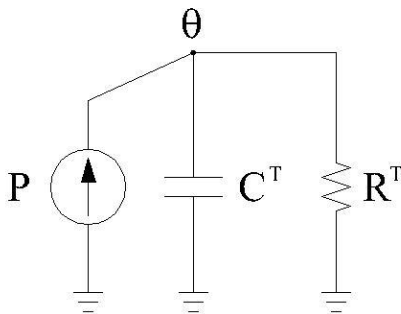
Као што је у претходним излагањима напоменуто, између топлотних и електричних појава постоји аналогија. Она се огледа у једнакости математичких форми (једначина) којима се описују те појаве. То се може искористити да се направи аналогни електрични модел топлотног система. Онда се могу извршити мерења на електричном моделу, а затим из добијених резултата добити и вредности еквивалентних величина у топлотном систему.

За "свођење" топлотних величина на електричне и обрнуто, уводе се коефицијенти свођења, чије вредности треба да буду такве да се параметри у изучаваном топлотном систему сведу у погодан

(практично лако изводљив) опсег параметара у електричном систему. При томе се преко димензија коефицијената свођења регулише и свођење јединица величина у топлотном систему у јединице величина у електричном систему (моделу).

Код избора параметара електричног система (елемената електричног кола) увек треба имати у виду њихову практичну остварљивост и потребу да се за мерења користе стандардни мерни инструменти. При избору елемената кола, електричне вредности не смеју бити ни превише велике (када би настао проблем мерне опреме и величине елемената), ни превише мале (када би се појавили проблеми мерне опреме и неповољан однос сигнал-шум).

Начин увођења коефицијената ће се објаснити на примеру елементарне топлотне шеме приказане на слици 46.



Слика 46

Једначина која описује ову топлотну шему гласи

$$P = C^T \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (150)$$

Као базни коефицијенти свођења топлотних на електричне величине се усвајају три коефицијента свођења (на пример: за топлотни и електрични отпор ($k_R = R^T / R$), топлотни и електрични капацитет ($k_C = C^T / C$) и разлику температура и напон ($k_U = \theta / U$)). Сви остали коефицијенти (за снагу и струју (k_I), време у топлотном и време у електричном систему (k_t), енергију и наелектрисање (k_Q) итд.) су једнозначно одређени након усвајања наведена три базна коефицијена свођења.

Дакле, полази се од три наведена базна коефицијента свођења k_R , k_C и k_U . Ако се једначина (150) подели са односом k_U/k_R (означимо овај количник са k_I), долази се до

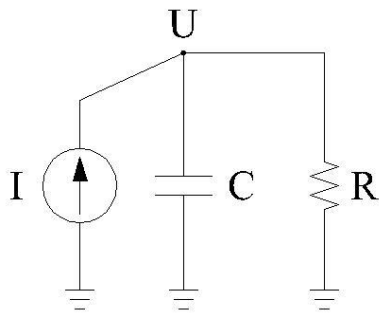
$$\frac{P}{k_I} = C^T k_R \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\frac{R^T}{k_R}} \quad (151)$$

Претходна једначина се може „проширити“ увођењем коефицијента свођења k_C :

$$\frac{P}{k_I} = \frac{C^T}{k_C} \frac{d \frac{\theta}{k_U}}{d \frac{t}{k_R}} + \frac{\theta}{k_R} \quad (152)$$

За елементарно електрично коло са једним струјним генератором, једним кондензатором и једним електричним отпорником, приказано на слици 47, диференцијална једначина која га описује гласи

$$I = C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} \quad (153)$$



Слика 47

Поређењем једначина (153) и (154) јасно је да је коефицијент свођења снаге у топлотном систему на струју у електричном систему једнак k_I , а времена у топлотном систему у време у електричном систему $k_t = k_R k_C$.

Поступак се може спровести на следећи начин. На основу карактеристика топлотног система одређују се вредности снаге загревања, топлотног капацитета и топлотног отпора (слика 46). Коефицијенти k_R , k_C и k_I се одређују тако да вредности елемената електричног кола са слике 47 – струја струјног генератора, отпор и капацитет буду у границама погодним за практичну реализацију. Затим се на електричном колу изврши снимање промене напона у времену. Свакој регистрованој тачки напона U^* у тренутку t^* одговара тачка пораста температуре $\theta^* = k_U U^*$ у тренутку $k_t t^*$.

У збирци је дат један комплетан нумерички пример (задатак 40), а у четвртој лабораторијској вежби студенти ће имати прилике да спроведу комплетан поступак: формирање топлотне шеме, њено „свођење“ на електрични модел, мерења на електричном моделу и одређивање величина у топлотном систему које су еквивалентне измереним електричним

величинама (одређивање промене величина у топлотном систему „свођењем“ резултата мерења у електричном систему).

5.2.4.2. Коришћење континуалних модела

Континуални електрични модели се користе као „додатак“ графичкој методи објашњеној у одељку 5.2.3. Помоћу континуалних електричних модела се експериментално може доћи до еквипотенцијалних линија у електричном моделу који је аналоган анализираном топлотном моделу. Ове еквипотенцијалне линије су аналогне изотермичким линијама у топлотном систему. Следећи корак је цртање линија температурног градијента (линија топлотне снаге) у топлотном систему, водећи се правилом да су линије топлотне снаге управне на изотермичке линије и да са њима формирају „криволинијске квадрате“.