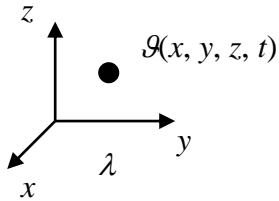


5. Пренос топлоте провођењем

1) *Fourie* – ов закон

$$\vec{q}_\lambda = -\lambda \text{grad } \vartheta \tag{62}$$



\vec{q}_λ - површинска густина снаге провођења (W / m²)

λ - специфична топлотна проводност (W / m K)

2) Општа једначина температурног поља за $\lambda = \text{const.}$

$$q_v = \rho c_p \frac{d\vartheta}{dt} + \lambda \Delta \vartheta \tag{63}$$

ρ Густина (kg / m³)

c_p Специфични масени топлотни капацитет (J / (kg K))

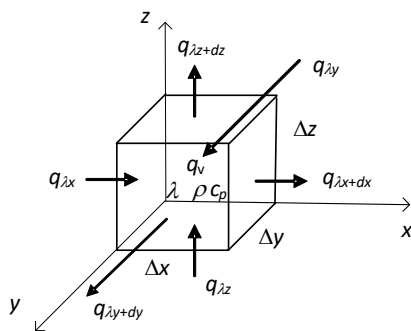
$\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$

$\lambda \Delta \vartheta$ Одлазна компонента снаге која услед преноса топлоте провођењем

q_v Запреминска густина генерисане снаге (W / m³)

$\rho c_p \frac{d\vartheta}{dt}$ Запреминска густина снаге акумулисања енергије

Општа једначина температурног поља је у ствари исказ закона о одржању енергије:



Слика 19 – Приказ у *Descartes*-овом координатном систему

$$P_g = q_v \Delta x \Delta y \Delta z \quad (64)$$

$$P_{ak} = \rho c_p \Delta x \Delta y \Delta z \frac{d\mathcal{G}(x, y, z, t)}{dt} \quad (65)$$

$$P_{izl} = (q_{\lambda x + \Delta x} \Delta y \Delta z + q_{\lambda y + \Delta y} \Delta x \Delta z + q_{\lambda z + \Delta z} \Delta x \Delta y) - (q_{\lambda x} \Delta y \Delta z + q_{\lambda y} \Delta x \Delta z + q_{\lambda z} \Delta x \Delta y) \quad (66)$$

q_λ представља површинску густину снаге преноса топлоте провођењем, при чему индекси који следе представљају њене компоненте (у правцу x , y и z осе) на специфицираним координатама по појединим осама

$$P_{izl} = (q_{\lambda x + \Delta x} - q_{\lambda x}) \Delta y \Delta z + (q_{\lambda y + \Delta y} - q_{\lambda y}) \Delta x \Delta z + (q_{\lambda z + \Delta z} - q_{\lambda z}) \Delta x \Delta y \quad (67)$$

$$q_{\lambda x + \Delta x} - q_{\lambda x} = \Delta q_{\lambda x} = \frac{\partial q_{\lambda x}}{\partial x} \Delta x; q_{\lambda y + \Delta y} - q_{\lambda y} = \Delta q_{\lambda y} = \frac{\partial q_{\lambda y}}{\partial y} \Delta y; q_{\lambda z + \Delta z} - q_{\lambda z} = \Delta q_{\lambda z} = \frac{\partial q_{\lambda z}}{\partial z} \Delta z \quad (68)$$

$$P_{izl} = \frac{\partial q_{\lambda x}}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_{\lambda y}}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial q_{\lambda z}}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (69)$$

Полазећи од Fourier – овог закона, чији је векторски облик дат једначином (62),

$$q_{\lambda x} = -\lambda \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial x}; q_{\lambda y} = -\lambda \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial y}; q_{\lambda z} = -\lambda \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial z},$$

долази се до

$$\frac{\partial q_{\lambda x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial x} \right); \frac{\partial q_{\lambda y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\lambda \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial y} \right); \frac{\partial q_{\lambda z}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial z} \right) \quad (70)$$

Ако је материјална средина линеарна ($\lambda = const.(x, y, z)$):

$$P_{izl} = \left(-\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial x^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \left(-\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) \Delta y \Delta x \Delta z + \left(-\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) \Delta z \Delta x \Delta y \quad (71)$$

$$P_{izl} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (72)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \mathcal{G}(x, y, z, t) = \Delta \mathcal{G}(x, y, z, t) \quad (73)$$

Δ - Лапласов оператор (дивергенција градиента скаларне величине), ∇ - Набла оператор

Дакле, из

$$P_g = P_{ak} + P_{izl} \quad (74)$$

долазимо до

$$q_v = \rho c_p \frac{d\mathcal{G}(x, y, z, t)}{dt} - \lambda \Delta \mathcal{G}(x, y, z, t) \quad (75)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{G}(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) + q_v = \rho c_p \frac{d\mathcal{G}(x, y, z, t)}{dt} \quad (76)$$

У општем случају, $\lambda = \text{var.}$, тако да из једначина (69) и (70) не следи једначина (71), као ни једначине које следе после израза (71). Општа температурна једначина за нелинеарну топлотну средину ($\lambda = \text{var.}$), у *Descartes*-овом координатном систему $\mathcal{G}(x, y, z)$ гласи:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \quad (77)$$

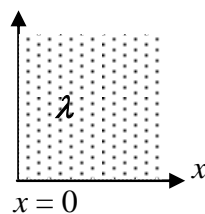
У цилиндричном $\vartheta(r, \phi, z)$ и сферном $\vartheta(r, \phi, \theta)$ координатном систему:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \quad (78)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin \theta \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \right) + q_v = \rho c_p \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \quad (79)$$

Да би се одредила расподела температуре унутар материјалне средине која је у стању мировања потребно је поставити и граничне и почетне услове.

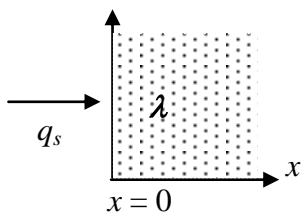
Типови граничних услова (објасниће се на примеру *Descartes*-ов координатног система; посматра се лева гранична површ тела, као што је приказано на слици 20)



Слика 20

Тип граничног услова 1: $\mathcal{G}(0, t) = \mathcal{G}_p$

Тип граничног услова 2:



Слика 21

Ка граничној површи се енергија од околине преноси површинском густином q_s (W / m^2)

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0,t} = q_s \quad (80)$$

Тип граничног услова 3:

Изолована гранична површ

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0,t} = 0 \quad (81)$$

Тип граничног услова 4:

На граничној површи долази до преноса топлоте струјањем

- прелазак топлоте са флуида на тело

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0,t} = \alpha' (\vartheta_f - \vartheta(0,t)) \quad (82)$$

α' представља коефицијент преласка топлоте струјањем са флуида на површ тела ($W / (m^2 K)$)

- прелазак топлоте са површи тела на флуид

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0,t} = \alpha'' (\vartheta(0,t) - \vartheta_f) \quad (83)$$

α'' представља коефицијент преласка топлоте струјањем са површи тела на флуид ($W / (m^2 K)$)

α' : $\vartheta_f > \vartheta(0,t)$; α'' : $\vartheta(0,t) > \vartheta_f$

Тип граничног услова 5:

Тело преко граничне површи размењује енергију са околином зрачењем – случај да се енергија зрачењем одводи са површи тела, и то за конфигурацију да се површ тела налази у слободном простору (температуре T_a)

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0,t} = \varepsilon \sigma_c (T(0,t)^4 - T_a^4) \quad (84)$$

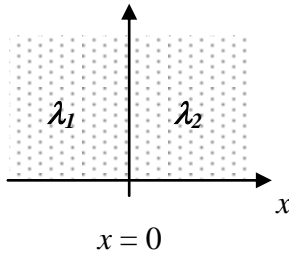
$$T = \vartheta + 273.16 \quad (85)$$

T_a – апсолутна температура амбијента (К)

У случају да је тело окружено са више других тела чије се температуре разликују од T_a размена енергије зрачењем постаје комплекснија и одређује се применом радијационих шема објашњених у Поглављу 4.

Тип граничног услова 6:

Тело (специфичне топлотне проводности λ_1) преко граничне површи размењује енергију са другим чврстим телом (специфичне топлотне проводности λ_2).



Слика 22

$$-\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0-,t} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0+,t} \quad (86)$$

Гранични услов за размену топлоте струјањем и зрачењем:

У пракси се јавља комбинација типа граничних услова 4 и 5, када гранична површ са околином размењује топлоту и струјањем и зрачењем.

Наведене једначине преноса топлоте провођењем се могу аналитички решити за мали број, могло би се рећи специјалних, случајева. За решавање практичних проблема потребна су следећа знања и вештине:

- Који се специјални случајеви општих диференцијалних једначина и на који начин (аналитичким решавањем или некако другачије) могу решити – садржај одељка 5.1.
- Како реалне проблеме упростити, односно свести на специјални случај који се може решити – видети текст на крају фајла, после израза (108)
- Применити алтернативне методе методама решавања диференцијалних и алгебарских једначина – садржај одељка 5.2.

5.1. Једначине се могу аналитички решити у случајевима:

- 5.1.1. Једнодимензионални стационарни пренос топлоте:

Написано у правоугаоном координатном систему: $\vartheta = f(x) = \text{const.}(y, z, t)$

- 5.1.2. Прелазни (нестационарни) процеси преноса топлоте при којима се вредност температуре не мења по запремини тела

Написано у правоугаоном координатном систему: $\vartheta = f(t) = \text{const.}(x, y, z)$

- 5.1.3. Нешто компликованијим математичким поступцима раздвајања променљивих могуће је доћи и до аналитичких израза за промену температуре у дводимензионалним стационарним температурним пољима; написано у правоугаоном координатном систему: $\mathcal{G} = f(x, y) = \text{const.}(z, t)$; овиме се нећемо бавити – ако некоме затреба, нека потражи у литератури

5.2. Методе коју су алтернатива аналитичком решавању једначина

- 5.2.1. Решавање система једначина написаних на основу поделе топлопроводне средине на одређен број делова (за релативно мали број делова, реда величине неколико десетина) за које се претпоставља да имају константну температуру по својој запремини; за сваки од делова се поставља једначина енергетског биланса – генерисање топлоте, акумулисање топлоте и размена са суседним деловима и са околином

5.2.1.1. Аналитичко решавање скупа алгебарских (за стационарне топлотне режиме) или диференцијалних (за прелазне топлотне процесе)

Предност: Добијају се експлицитни аналитички изрази временске / просторне промене температуре, што може да олакша неке процене и анализе

Мана и ограничење: само за мали број једначина, односно грубу поделу топлопроводне средине, због чега је и тачност ограничена

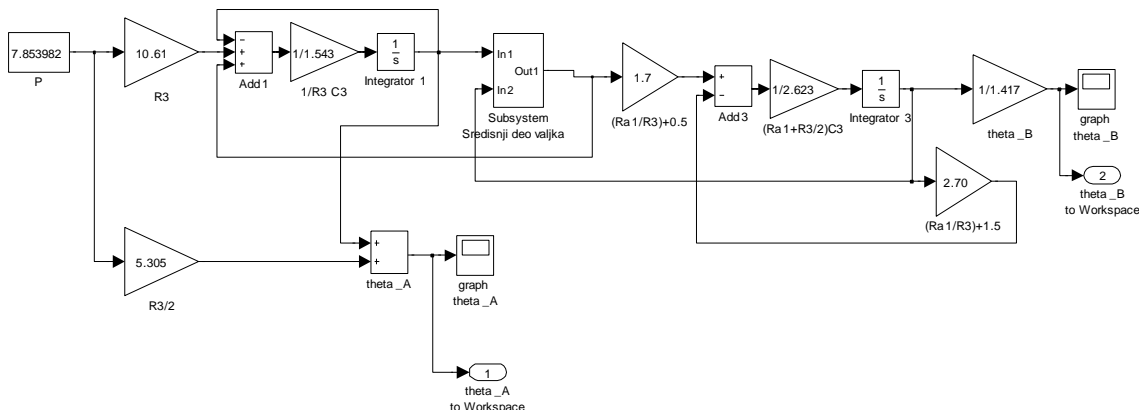
5.2.1.2. Решавање система алгебарских или диференцијалних једначина применом познатих нумеричких метода – у програмима написаним у „класичним“ програмским језицима ово се своди на употребу различитих метода / функција које постоје у оквиру самог програмског језика или у оквиру додатних програмских библиотека.

Било „у моди“ 70-тих, 80-тих година прошлог века. Ова могућност је актуелна и данас у случају када се пише сопствени програм намењен пројектовању (неке електроенергетске компоненте, на пример). Примера ради, у C# програмском језику и библиотекама које су доступне (било као део неке од бројних *open-source* библиотека (на пример *DotNumerics*), било као део неке од библиотека које се добијају уз неке *Microsoft* програме (на пример *Excel*) или као део неке од

комерцијалних библиотека) постоје различите нумеричке методе, на пример за операције над матрицама. Поред тога, постоје и библиотеке намењене креирању корисничког интерфејса (на пример *WPF Toolkit*-а), као и за додавање многих других функционалности у програм.

5.2.1.3. Решавање система алгебарских или диференцијалних једначина применом наменских програма – релативно јефтини (реда величине неколико хиљада евра) симулациони рачунарски програми. Програми служе углавном за симулацију прелазних (динамичких) процеса. Преко посебног интерфејса, обично преко блок дијаграма, практично се задаје систем диференцијалних једначина – радиће се на лабораторијским вежбама

Карактеристика: једноставни за коришћење – није потребно велико знање нумеричке анализе; алгоритми за решавање система једначина су садржани у овим наменским програмским пакетима; удобни улазни и излазни кориснички интерфејси.



Слика 23 – Пример изгледа симулационог рачунарског модела

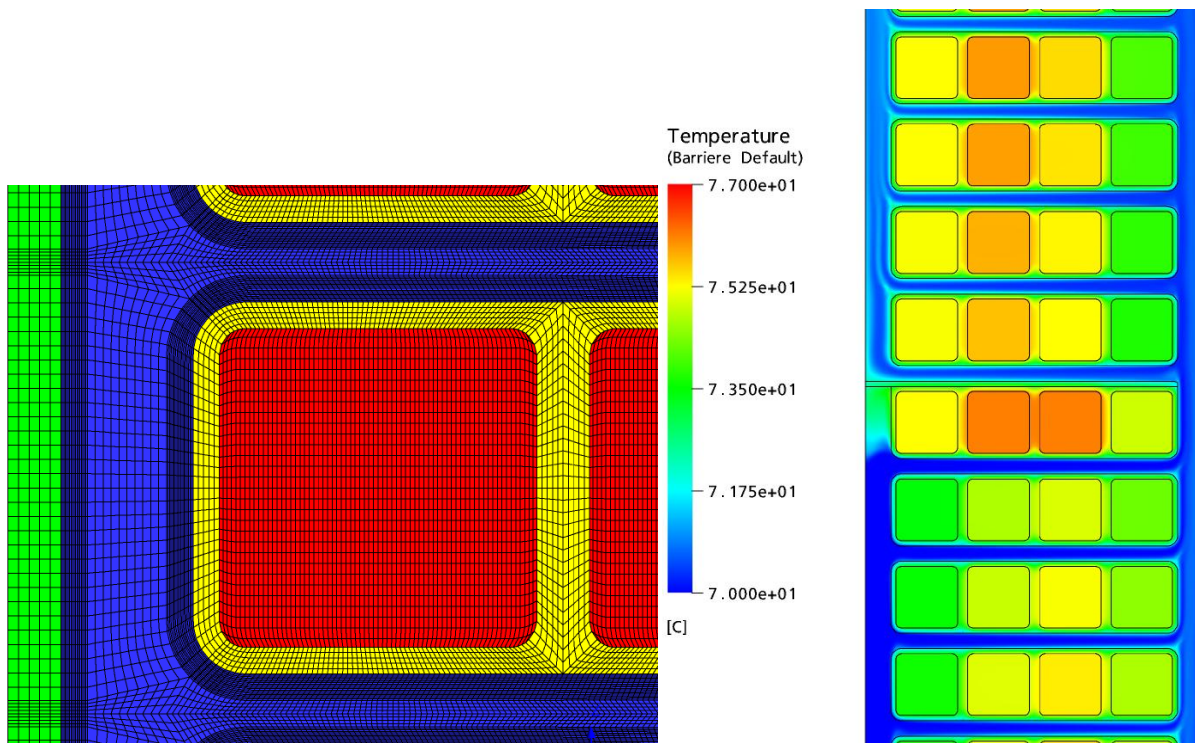
5.2.2. Решавање једначина написаних на основу поделе топлопроводне средине на велики број (реда величине неколико десетина хиљада) делова за које се претпоставља да имају константну температуру по својој запремини. То су скупљи програми (цена за комерцијалну лиценцу је реда величине неколико десетина хиљада евра) и базирани су на методи коначних елемената (FEM - finite element method). Као улази у ове програме се задају геометрија и параметри материје која испуњава простор, мрежа која дефинише дискретизацију простора и гранични услови. Уобичајено, постоји посебан Heat transfer модул, код кога се гранични услови задају на начин описан у претходном тексту. У том случају коефицијенти преласка топлоте се одређују коришћењем неке од

формула доступних у литератури за анализирану геометрију и начин хлађења. Друга могућност је да се, поред Heat transfer модула, користи и CFD - Computational Fluid Dynamics модул, којим се моделује и кретање флуида поред граничне површи. Из резултата ових прорачуна се може добити и расподела коефицијента преласка топлоте струјањем по површи тела.

Предност: добијање детаљне расподеле температуре (није увек неопходно, али може да буде врло корисно).

Мане: скупи програми, непогодни за примену у пројектовању, јер једно израчунавање може да траје и више дана, тешкоће са конвергенцијом, поготову када се користе FEM модули за Heat transfer и за CFD.

Интересантна примена оваквих софтвера је да „замене“ експериментална истраживања – видети додатни документ уз текст предавања: с обзиром да се методом коначних елемената детаљно улази у микро појаве у материји, појављује се амбиција да овакве методе могу бити толико прецизне да се на њима врше прорачуни са различитим параметрима, уместо да се праве експерименти на физичким моделима. У почетним инжењерским применама, када је степен развоја метода и софтвера у којима су оне биле имплементиране био нижи, и када није постојало искуство у вези са понашањем и тачности софтвера, често је вршено мерење на једном моделу, за исту конфигурацију су вршена израчунавања применом методе коначних елемената, како бни се потврдила тачност прорачуна. После тога су варирани параметри и коришћени резултати прорачуна, што значајно поједностављује и скраћује поступак у односу на опцију да се за сваки скуп параметара од интереса праве нови модели и на њима врше мерења. Прорачуни базирани на примени методе коначних елемената су од интереса за пренос топлоте кроз чврсту материју (пример ће бити приказан на лабораторијским вежбама), али и за изучавање хидрауличких појава (расподеле протока расхладног флуида по каналима за хлађење) и преноса топлоте струјањем између површи чврстог тела и флуида (одређивање коефицијента преласка топлоте струјањем за неке специфичне конфигурације канала за хлађење).



Слика 24 – Пример дефинисања мреже и резултата по методи коначних елемената

○ 5.2.3. Графичка метода

Метода се базира на цртању изотермичких и линија топлотног флукса, пратећи правило да се формирају „криволинијски квадрати“ – да изотермичке и линија топлотног флукса буду ортогоналне и да збир наспрамних страница формираних фигура буде једнак.

Карактеристика: приближна метода, погодна за добијање оријентационих вредности, евентуално може бити корисна за дефинисање почетне итерације, у оквиру приступа описаног у одељку 5.2.2, за решавање система једначина за стационарна топлотна стања.

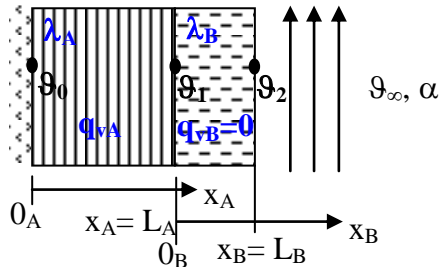
○ 5.2.4. Коришћење електричних аналогних модела

- 5.2.4.1. Континуалних – аналогија са 5.2.3.
- 5.2.4.2. Дисконтинуалних – аналогија са 5.2.1.

Карактеристика: без нарочитог практичног значаја; могло би се рећи да више има „музејски“ (историјски) значај; евентуално за едукативне сврхе – поготову за студенте електротехнике

Аналитичко решавање једначина –Једнодимензионални стационарни пренос топлоте (3.1.1.) / Пример:

Задатак 4 из Збирке (скицираће се решење другачије од оног из Збирке)



Слика 25

Познато: карактеристике материјала, димензије, температура флуида (ϑ_∞), коефицијент преласка топлоте са зида на флуид α ; лева површ је идеално топлотно изолована

Тражи се: температуре површи ϑ_0 , ϑ_1 и ϑ_2

Општа температурна једначина,

$$q_v = \rho c_p \frac{d\vartheta(x, y, z, t)}{dt} - \lambda \Delta \vartheta(x, y, z, t) \quad (87)$$

за линеарну топлопроводну средину, стационарно топлотно стање и Descartes-ов координатни систем, за слојеве А и В гласи:

$$q_{vA} = -\lambda_A \frac{\partial^2 \vartheta_A(x_A)}{\partial x_A^2} \quad (88)$$

$$\lambda_B \frac{\partial^2 \vartheta_B(x_B)}{\partial x_B^2} = 0 \quad (89)$$

Опште решење ових једначина гласи:

$$\vartheta_A(x_A) = -\frac{q_{vA}}{\lambda_A} \frac{x_A^2}{2} + c_{1A} x_A + c_{2A} \quad (90)$$

$$\vartheta_B(x_B) = c_{1B} x_B + c_{2B} \quad (91)$$

Гранични услови:

$$\left(\frac{d\vartheta_A}{dx_A} \right)_{x_A=0} = 0 \quad (92)$$

$$\vartheta_A(x_A = L_A) = \vartheta_B(x_B = 0) \quad (93)$$

$$-\lambda_A \left(\frac{d\mathcal{G}_A}{dx_A} \right)_{x_A=L_A} = -\lambda_B \left(\frac{d\mathcal{G}_B}{dx_B} \right)_{x_B=0} \quad (94)$$

$$-\lambda_B \left(\frac{d\mathcal{G}_B}{dx_B} \right)_{x_B=L_B} = \alpha (\mathcal{G}_B(x_B=L_B) - \mathcal{G}_\infty) \quad (95)$$

$$\text{Из (92): } c_{1A} = 0 \quad (96)$$

$$\text{Из (93): } -\frac{q_v L_A^2}{\lambda_A} + c_{2A} = c_{2B} \quad (97)$$

$$\text{Из (94): } \lambda_A \frac{q_v}{\lambda_A} L_A = -\lambda_B c_{1B} \quad (98)$$

$$\text{Из (95): } -\lambda_B c_{1B} = \alpha (c_{1B} L_B + c_{2B} - \mathcal{G}_\infty) \quad (99)$$

$$\text{Из (98): } c_{1B} = -\frac{q_v L_A}{\lambda_B} \quad (100)$$

$$\text{Из (99): } c_{2B} = \frac{\lambda_B q_v L_A}{\alpha \lambda_B} + \frac{q_v L_A}{\lambda_B} L_B + \mathcal{G}_\infty = \frac{q_v L_A}{\lambda_B} \left(L_B + \frac{\lambda_B}{\alpha} \right) + \mathcal{G}_\infty \quad (101)$$

$$\text{Из (97): } c_{2A} = \frac{q_v L_A^2}{2\lambda_A} + \frac{q_v L_A}{\lambda_B} \left(L_B + \frac{\lambda_B}{\alpha} \right) + \mathcal{G}_\infty \quad (102)$$

Вредности тражених температура:

$$\mathcal{G}_2 = c_{1B} L_B + c_{2B} \quad (103)$$

$$\mathcal{G}_1 = c_{2B} \quad (104)$$

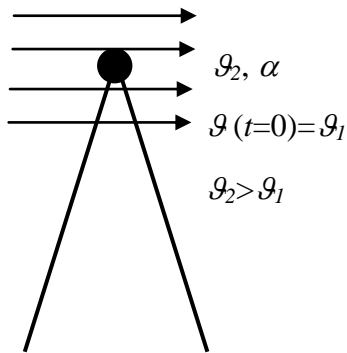
$$\mathcal{G}_0 = c_{2A} \quad (105)$$

Аналитичко решавање једначина –

Прелазни процеси код којих се може занемарити просторна промена температуре (5.1.2.)

Овакви типови проблема се решавају користећи закон одржања енергије, примењен на затворен систем (поглавље 2.1.1.) и на граничне површи (поглавље 2.1.3.). Снага којом се енергија одводи из запремине (P_{izl}), која се користи у енергетском билансу за затворен систем, једнака је снази којом се енергија преноси ка граничној површи (P_{kas}) у енергетском билансу за граничне површи.

Пример – задатак 33 из Збирке:



Слика 26

Познато: карактеристике материјала, димензије, температура флуида чија се температура мери (ϑ_2), коефицијент преласка топлоте са флуида на тело (сензор) α ; почетна температура сензора који се поставља у струју флуида (ϑ_1)

Тражи се: временска промена температуре сензора

Снага генерисане топлоте у изотермичкој запремини: 0

Снага којом се топлотна енергија акумулише у изотермичкој запремини: $\rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt}$

Снага којом се топлотна енергија са флуида преноси ка сензору (сензор се посматра као изотермичка запремина): $\alpha S(\vartheta_2 - \vartheta)$; дакле, снага преноса топлоте ван запремине, кроз граничну површ, износи $P_{izl} = -\alpha S(\vartheta_2 - \vartheta)$

Дакле, из енергетског биланса,

$$P_g = P_{ak} + P_{izl} \quad (106)$$

долази се до

$$\rho c_p V \frac{d\vartheta}{dt} = \alpha S(\vartheta_2 - \vartheta) \quad (107)$$

. . . даље је лако . . . елементарна математика . . . решење:

$$\vartheta(t) = \vartheta_2 - (\vartheta_2 - \vartheta_1) e^{-\frac{t}{\rho V c_p / \alpha S}} \quad (108)$$

Критеријум за свођење реалних случајева преноса топлоте на идеализовани случај да је запремина изотермичка

Критеријум за упрошћење да се реални проблем сведе на поједностављени случај у коме се запремина понаша као изотермичка је да је отпор преносу топлоте провођењем кроз запремину много мањи од топлотног отпора преласку топлоте са површи која ограничава запремину на околинину. Критеријум је логичан, јер практично представља меру промене температуре по запремини у односу на укупну промену температуре услед преноса топлоте (по запремини и на граничној површи) у односу на амбијент.

Дефиниција топлотног отпора:

Топлотни отпор преносу топлоте је једнак односу разлике температура (две површи, површи и флуида, два флуида) и снаге размене топлоте између ових површи / флуида. Дефиниција важи под претпоставком стационарног топлотног стања и да између површи / флуида између којих се дефинише топлотни отпор не постоје извори топлоте.

Однос отпора преносу топлоте провођењем кроз запремину и отпора преласку топлоте између граничних површи и околине се у литератури назива *Biot*-ов број. *Biot*-ов број има различите форме за различите геометрије. Примера ради, за раван хомоген зид дебљине L , начињен од материјала специфичне топлотне проводности λ , чија једна површ има фиксну температуру, а друга се хлади струјањем флуида, при коефицијенту преласка топлоте струјањем α , *Biot*-ов број је једнак

$$Bi = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{\alpha S} = \frac{\alpha L}{\lambda} \quad (109)$$

Израз $Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$ се користи као генерални израз, при чему L представља карактеристичну дужину, једнаку односу запремине тела и површине његове граничне површи (преко које се топлота размењује са поколином).

Примера ради,

- за зид дебљине $2 \cdot d$ и димензија попречног пресека зида $a \times b$, који се хлади симетрично струјањем флуида (α), $L = V / S = (a \cdot b \cdot 2 d) / (2 \cdot a \cdot b) = d$;

- за дугачак цилиндар полупречника r_0 , $L = V / S = (r_0^2 \pi L) / (2 r_0 \pi L) = r_0 / 2$,
- за сферу полупречника r_0 , $L = V / S = ((4 / 3) r_0^3 \pi) / (4 r_0^2 \pi) = r_0 / 3$.

Уобичајени услов провере да ли се запремина може сматрати изотермичком је да је *Biot*-ов број мањи од 0.1.

За термичке процесе код којих је $Bi > 0.1$, у литератури се може наћи низ графика помоћу којих се за разне геометрије може одредити просторна и временска расподела температуре (странице 948 и 949 у Frank P. Incropera, David P. DeWitt: Fundamentals of heat and mass transfer, Fifth edition, John Wiley and sons, 2002). Параметри на графицима су *Biot*-ов и *Fourie*-ов број, који је дефинисан као

$$Fo = \frac{at}{L^2} = \frac{\lambda}{L^2} t \quad (110)$$

Помоћу тих графика се у свакој тачки у сваком тренутку може одредити температура (L у изразу (110) представља позицију тачке у телу). Оваква методологија је била од интереса у инжењерској пракси при широке примене рачунара и софтверских алата.

Илустрације ради, израз (108), $\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_2 - (\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1) e^{-\frac{t}{\rho V c_p / \alpha S}}$, може се написати у форми у којој не фигуришу просторне координате и време, већ *Biot*-ов и *Fourie*-ов број:

$$\frac{\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_2}{\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_2} = e^{-Bi Fo} \quad (111)$$

$$\frac{\mathcal{G}(t) - \mathcal{G}_{stac.}}{\mathcal{G}_{pos.} - \mathcal{G}_{stac.}} = e^{-Bi Fo} \quad (112)$$