



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

Катедра за енергетске претвараче и погоне

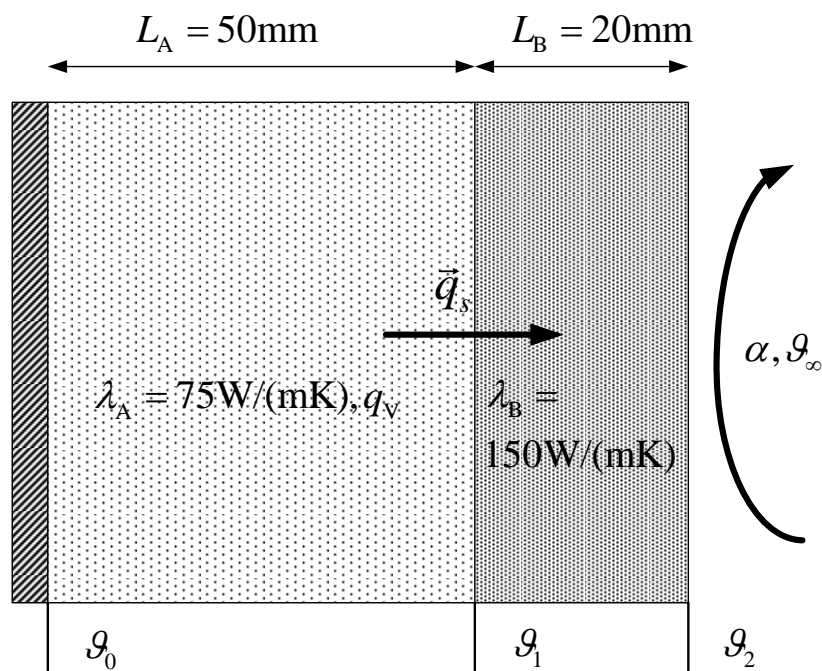
Термички процеси у електроенергетици

**Материјали за рачунске вежбе
(Први колоквијум – део 2 од 2)**

Новембар 2022.

ЗАДАТАК 12

Раван зид се састоји из два слоја, израђена од различитих материјала А и В. У слоју А се равномерно по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v = 1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$. Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици 12.1. Гранична површ слоја А је добро топлотно изолована, а гранична површ слоја В се хлади водом температуре $\vartheta_\infty = 30^\circ\text{C}$, уз коефицијент преласка топлоте струјањем $\alpha = 1000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. Скицирати расподелу температуре дуж x осе у стационарном стању. Одредити температуру граничне изоловане површи слоја А (ϑ_0) и температуру граничне хлађене површи слоја В (ϑ_2).



Слика 12.1

Решење

За сваки од слојева се може поставити и решити општа једначина температурног поља. За слој А она гласи:

$$\lambda_A \cdot \Delta \vartheta + q_v = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (12.1)$$

где је са Δ означен *Laplace*-ов оператор који у *Descartes*-овом координатном систему има следећи облик

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12.2)$$

У стационарном стању се расподела температуре не мења у времену, те важи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \quad (12.3)$$

Општа једначина температурног поља за слој А у стационарном стању гласи:

$$\lambda_A \cdot \Delta \vartheta + q_v = 0 \quad (12.4)$$

$$\lambda_A \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + q_V = 0 \quad (12.5)$$

Пошто се посматра једнодимензиони пренос топлоте важи:

$$\vartheta = \vartheta(x) = \text{const}(y, z) \quad (12.6)$$

што повлачи за собом:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \quad (12.8)$$

Заменом у (12.5) се добија:

$$\lambda_A \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + q_V = 0 \quad (12.9)$$

Њено опште решење је:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (12.10)$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

За слој В општа једначина температурног поља гласи:

$$\lambda_B \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0 \quad (12.11)$$

чије опште решење је:

$$\vartheta(x) = C_3 \cdot x + C_4 \quad (12.12)$$

где су C_3 и C_4 интеграционе константе.

Четири непознате константе се могу одредити из граничних услова који се постављају на површима дисконтинуитета материјалне средине:

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0_+) = 0 \quad (12.13)$$

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_{A-}) = -\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_{A+}) \quad (12.14)$$

$$\vartheta(L_{A-}) = \vartheta(L_{A+}) \quad (12.15)$$

$$-\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_A + L_B) = \alpha \cdot (\vartheta(L_A + L_B) - \vartheta_\infty) \quad (12.16)$$

Из услова (12.13) се добија:

$$-\frac{q_V \cdot 0}{\lambda_A} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (12.17)$$

Из услова (12.15) се добија:

$$-\frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_2 = C_3 \cdot L_A + C_4 \quad (12.18)$$

Из услова (12.14) се добија:

$$-\lambda_A \cdot \left(-\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_A} \right) = -\lambda_B \cdot C_3 \Rightarrow C_3 = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \quad (12.19)$$

Из услова (12.16) се добија:

$$-\lambda_B \cdot C_3 = \alpha \cdot (C_3 \cdot (L_A + L_B) + C_4 - \vartheta_\infty) \quad (12.20)$$

$$-\lambda_B \cdot \left(-\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \right) = \alpha \cdot \left(-\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot (L_A + L_B) + C_4 - \vartheta_\infty \right) \quad (12.21)$$

$$q_V \cdot L_A = -\frac{q_V \cdot \alpha \cdot L_A^2}{\lambda_B} - \frac{q_V \cdot \alpha \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \alpha \cdot C_4 - \alpha \cdot \vartheta_\infty \quad (12.22)$$

$$C_4 = \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.23)$$

На основу једначина (12.12), (12.19) и (12.23) може се добити расподела температуре у слоју В:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot x + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.24)$$

Заменом бројних вредности у (12.24) се добија температура граничне хлађене површи слоја В:

$$\vartheta_2 = \vartheta(L_A + L_B) = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot (L_A + L_B) + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.25)$$

$$\vartheta_2 = \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^\circ C \quad (12.26)$$

Заменом (12.19) и (12.23) у (12.18) се добија:

$$C_2 = \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.27)$$

Расподела температуре у слоју А се добија заменом израза (12.17) и (12.27) у (12.10):

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.28)$$

из чега се израчунава тражена температура изоловане површи:

$$\vartheta_0 = \vartheta(0) = \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty = 140^\circ C \quad (12.29)$$

Могућ је и препоручљив **други приступ** решавању овог задатка:

Укупна генерисана снага у слоју А се може израчунати на следећи начин:

$$q_A = \iiint_{V_A} q_V \cdot dV = q_V \cdot \iiint_{V_A} dV = q_V \cdot V_A = q_V \cdot S \cdot L_A \quad (12.30)$$

Снага генерисана у слоју А се у стационарном стању преноси струјањем на воду на граничној површи 2:

$$q_A = q_V \cdot S \cdot L_A = \alpha \cdot S \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_\infty) \quad (12.31)$$

Из (12.31) се може израчунати температура граничне површи 2:

$$\vartheta_2 = \frac{q_V L_A}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^\circ C \quad (12.32)$$

Познајући отпор преносу топлоте кроз слој В, може се израчунати температура граничне површи 1:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_A \cdot R_B^T \quad (12.33)$$

$$R_B^T = \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \quad (12.34)$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_V \cdot L_A \cdot S \cdot \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \quad (12.35)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = 115^\circ C \quad (12.36)$$

Користећи услов (12.15) може се одредити расподела температуре у слоју А:

$$-\frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_2 = \vartheta_1 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} \quad (12.37)$$

$$C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} \quad (12.38)$$

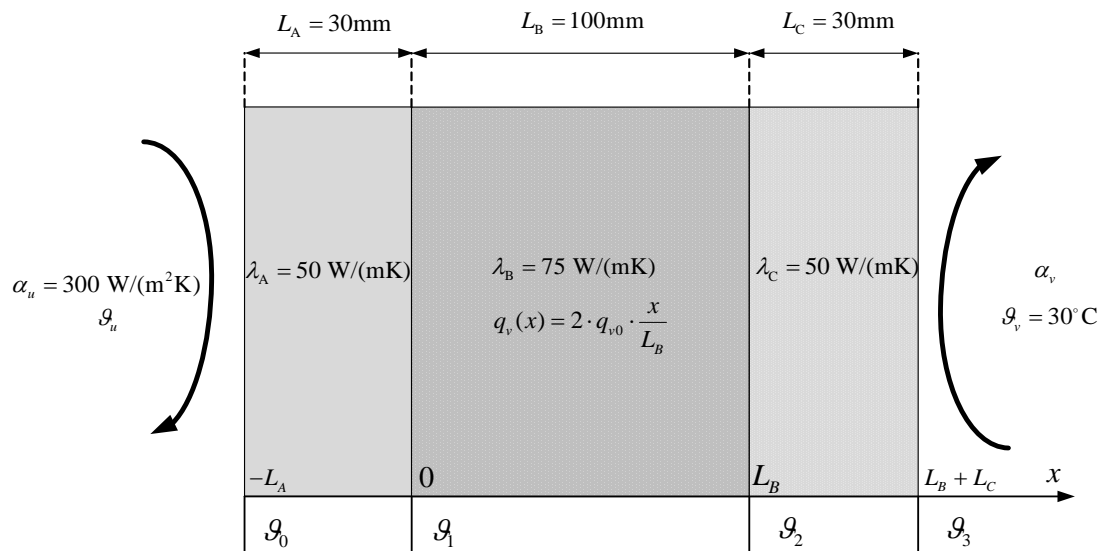
Температура граничне изоловане површи слоја А се добија заменом (12.38) у (12.10):

$$\vartheta_0 = C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = 140^\circ C \quad (12.39)$$

ЗАДАТАК 13

Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала А, В и С. У слоју В се по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v(x) = 2 \cdot q_{v0} \cdot \frac{x}{L_B}$ ($q_{v0} = 250 \cdot 10^3 \text{ W/m}^3$). Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици. Гранична површ слоја А се хлади уљем непознате температуре (ϑ_u), уз коефицијент преноса топлоте струјањем $\alpha_u = 300 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, а гранична површ слоја С се хлади водом температуре $\vartheta_v = 30^\circ C$, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ($\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta|/20)^{0.25}$ ($\alpha_{v0} = 1000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$).

Одредити непознату температуру уља тако да се тачно четвртина укупне снаге генерисане у слоју В преноси на уље. Колико износе температуре $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$? Колико износи максимална температура слоја В?

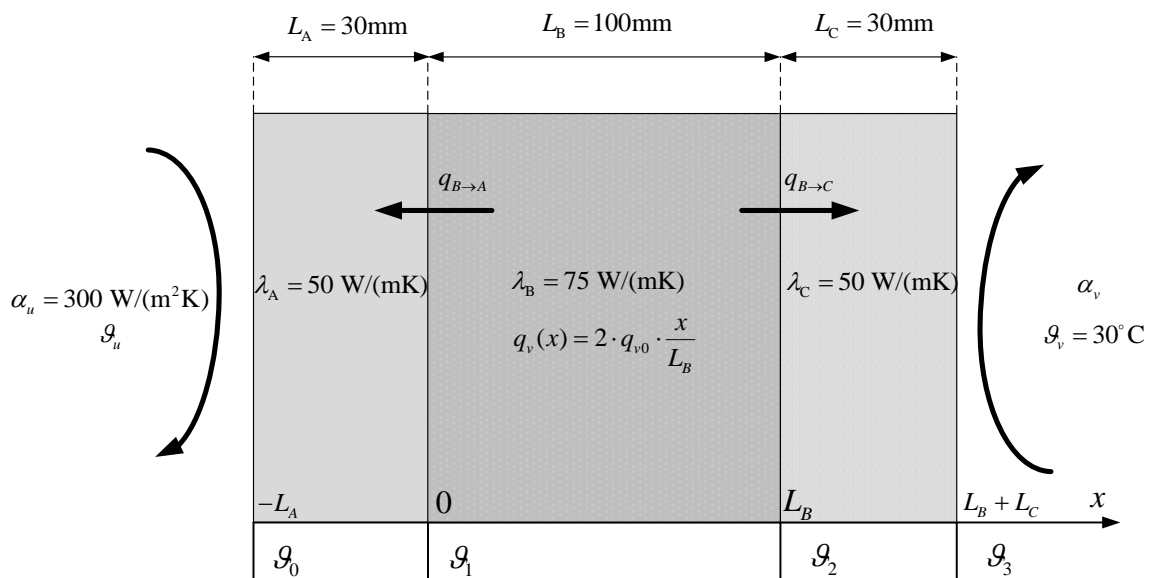


Слика 13.1

Решење

Укупна снага којом се топлота генерише у области В добија се интеграцијом запреминске густине снаге по запремини области В:

$$q_{genB} = \iiint_B q_v \cdot dV = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x) \cdot S \cdot dx = \frac{q_{v0} \cdot S}{L_B} (L_B^2 - 0) = q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (13.1)$$



Слика 13.2

На основу услова задатка да се четвртина снаге генерисане у области В преноси на уље, снаге којима се енергија преноси из области В ка области А ($q_{B \rightarrow A}$) и из области В ка области С ($q_{B \rightarrow C}$) (слика 13.2) износе:

$$q_{B \rightarrow A} = \frac{1}{4} \cdot q_{genB} = \frac{1}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (13.2)$$

$$q_{B \rightarrow C} = q_{genB} - q_{B \rightarrow A} = \frac{3}{4} \cdot q_{genB} = \frac{3}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B$$

С обзиром да се посматра устаљено стање, без генерисања топлоте у области С, целокупна снага која се из области В пренесе ка области С се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура ϑ_3 ($\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$):

$$q_{strujanja_v} = q_{B \rightarrow C} = \alpha_v(\theta) \cdot S \cdot \theta = \frac{\alpha_{v0} \cdot S}{20^{0,25}} \cdot \theta^{1,25} \quad (13.3)$$

$$\theta = \left(\frac{q_{B \rightarrow C} \cdot 20^{0,25}}{\alpha_{v0} \cdot S} \right)^{0,8} = \left(\frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot 20^{0,25}}{4 \cdot \alpha_{v0}} \right)^{0,8} = 19^\circ C \quad (13.4)$$

$$\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v \Rightarrow \vartheta_3 = \theta + \vartheta_v = 49^\circ C \quad (13.5)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = q_{B \rightarrow C} \cdot R_C^T = q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} \quad (13.6)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} = \vartheta_3 + \frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot L_C}{4 \cdot \lambda_C} = 60,25^\circ C \quad (13.7)$$

Расподела температуре у области В добија се решавањем опште температурне једначине која за поменућу област има следећи облик:

$$\lambda_B \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \quad (13.8)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = - \frac{q_v(x)}{\lambda_B} = - \frac{2 \cdot q_{v0} \cdot x}{\lambda_B \cdot L_B} \quad (13.9)$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = - \frac{q_{v0} \cdot x^3}{3 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (13.10)$$

Интеграционе константе које фигуришу у (13.10) могу се одредити из граничних услова за десну граничну површ слоја В (на тој граничној површи познајемо и вредност температуре и њен градијент – у овом случају извод по x координати).

$$\vartheta(L_{B-}) = \vartheta_2$$

$$-\lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(L_{B-}) \cdot S = q_{B \rightarrow C} \quad (13.11)$$

Након одређивања интеграционих константи, уврштавањем њихових вредности у једначину (13.10) може се добити температура ϑ_1 :

$$\vartheta_1 = \vartheta(0) = C_2 = 63,027^\circ C \quad (13.12)$$

Остале непознате температуре се добијају на следећи начин:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} \Rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_1 - R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} = 59,28^\circ C \quad (13.13)$$

$$q_{B \rightarrow A} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_u) \Rightarrow \vartheta_u = \vartheta_0 - \frac{q_{B \rightarrow A}}{\alpha_u \cdot S} = 38,44^\circ C \quad (13.14)$$

Вредност x координате на којој се постиже максимална температура у области В (x^*) може се добити диференцирањем расподеле температуре која је дата изразом (13.10) и изједначавањем добијеног израза са нулом. Потом се заменом у (13.10), за тако добијену вредност x^* , добија максимална температура у области В.

$$x^* = \frac{L_B}{2} = 50 \text{ mm} \quad (13.15)$$

$$\vartheta_{\max B} = \vartheta(x^*) = 65,81^\circ \text{C} \quad (13.16)$$

Задаци за вежбу: Рок 21.12.2021. задатак 4.

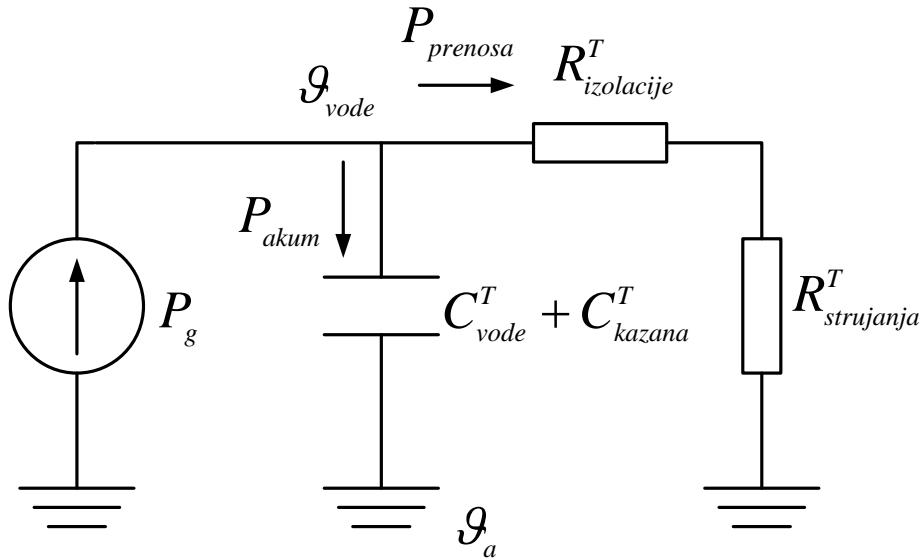
ЗАДАТАК 14

У бојлеру запремине 50l налази се вода на температури амбијента $\vartheta_a = 20^\circ\text{C}$. Бојлер поседује “on-off” (хистерезисни) регулатор који искључује грејач када температура воде пређе подешену вредност за 5 К, а укључује грејач када температура воде падне испод подешене вредности за 5 К. Израчунати утрошену електричну енергију (у kWh) у периоду од 24h ако је подешена температура у бојлеру 90°C . Сматрати да се у бојлеру током посматраних 24h не размењује вода. Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача $P_{gr} = 2 \text{ kW}$, маса казана $m_k = 9,5 \text{ kg}$, површина казана (унутрашња површина топлотне изолације) $S_u = 0,8 \text{ m}^2$, дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности $\lambda = 0,1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $\delta = 30 \text{ mm}$, спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације) $S_s = 1 \text{ m}^2$. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи $\alpha_s = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан $\alpha_u \gg \alpha_s$. Густина воде износи $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ и специфични топлотни капацитет казана $c_{pk} = 474 \text{ J/(kgK)}$. Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана израчунавати по формула за раван зид површине $(S_u + S_s) / 2$.

Решење

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења: занемарен је отпор преношењу топлоте кроз воду и зид казана, као и топлотни капацитет изолације. Сматра се да маса воде и зид бојлера представљају изотермичку запремину.

Пошто се вода у бојлеру на почетку посматраног интервала (дужине 24h) налази на температури амбијента, хистерезисни регулатор укључује грејач. Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на слици.



Слика 14.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_v \cdot V \cdot c_{pv} = 214,5 \text{ kJ/K} \quad (14.1)$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{\frac{S_s + S_u}{2}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0,5333 \text{ K/W} \quad (14.2)$$

Укупна снага којом грејач генерише топлотну енергију представља збир снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (14.3)$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (14.4)$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \quad (14.5)$$

Са θ је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент.

Треба напоменути да ова анализа и њени резултати важе само под условом да нема протока воде кроз бојлер. У супротном би се јавиле додатне компоненте снаге којом се енергија размењује са амбијентом, јер би посматрани систем представљао отворени систем са протоком флуида. У том случају би и варијације температуре воде по запремини бојлера биле веће, па би се поставило питање оправданости претпоставке да унутрашњост бојлера представља изотермичку запремину.

Заменом израза (14.4) и (14.5) у једначину (14.3) се добија диференцијална једначина која описује промену пораста температуре воде и казана у односу на амбијент.

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (14.6)$$

Даљим сређивањем се добија једначина у следећој форми:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (14.7)$$

$$R^T \cdot P_g = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (14.8)$$

где је са τ означена временска константа система. Њено решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (14.9)$$

где је са θ_0 означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са θ_∞ пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго, што овде није случај).

У стационарном стању нема промене температуре, те је извод температуре (па и пораста температуре) једнак нули:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (14.10)$$

те се заменом у једначину (14.8) добија:

$$\theta_\infty = P_g \cdot R^T \quad (14.11)$$

У тренутку t^* пораст температуре достиже вредност θ^* (који у овом случају одговара температури воде од 95°C). Време t^* се израчунава из једначине (14.9) примењене за тренутак t^* :

$$\theta^* = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) \quad (14.12)$$

$$(\theta_0 - \theta_\infty) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \theta^* - \theta_\infty \quad (14.13)$$

$$e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (14.14)$$

$$-\frac{t^*}{\tau} = \ln \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (14.15)$$

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta^* - \theta_\infty} \quad (14.16)$$

Израз (14.16) је општи и важи како за загревање, тако и за хлађење и у даљем тексту ће бити искључиво коришћен.

За конкретан случај, време загревања воде од 20°C до 95°C износи:

$$t_{zagr1} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{0 - 0,5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 2000} = 2,3168h \quad (14.17)$$

Након што температура воде достигне 95°C, регулатор искључује грејач и вода у бојлеру почиње да се хлади. За време хлађења од 95°C до 85°C се добија:

$$t_{hladjenja} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 0}{(85 - 20) - 0,5333 \cdot 0} = 4,547h \quad (14.18)$$

Након што температура воде падне на 85°C, регулатор поново укључује грејач и температура воде у бојлеру почиње да расте. Време загревања воде од 85°C до 95°C износи:

$$t_{zagrevanja} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(85 - 20) - 0,5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 2000} \quad (14.19)$$

$$= 0,3188h$$

Анализира се период од 24h. На почетку тог периода, вода се загрева од 20°C до 95°C. Након тога се одиграва више циклуса хлађења од 95°C до 85°C и загревања од 85°C до 95°C. Један такав циклус траје:

$$t_{ciklusa} = t_{zagrevanja} + t_{hladjenja} = 4,8658h \quad (14.20)$$

Укупан број таквих циклуса у току дана је:

$$n = \frac{24h - 2,3168h}{4,8658h} = 4,45 \quad (14.21)$$

Пети циклус започиње хлађењем воде. Оно не стигне да се заврши у току посматраног дана јер је:

$$24h - 2,3168h - 4 \cdot 4,8658h = 2,22h < 4,547h \quad (14.22)$$

Закључак је да се загревање воде од 85°C до 95°C обави четири пута у току дана. Укупна утрошена електрична енергија у току једног дана износи:

$$W_{el} = P_g \cdot (t_{zagr1} + 4 \cdot t_{zagrevanja}) = 2 \text{ kW} \cdot (2,3168h + 4 \cdot 0,3188h) =$$

$$= 4,6336 \text{ kWh} + 2,5504 \text{ kWh} = 7,184 \text{ kWh} \quad (14.23)$$

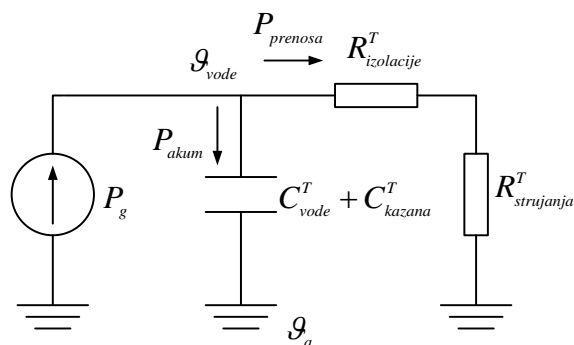
Задаци за вежбу: Рок 27.11.2021. задатак 2, Рок 21.12.2021. задатак 2, Рок 4.7.2022. задатак 2, Рок 28.11.2020. задатак 2, Рок 29.9.2021. задатак 5.

ЗАДАТАК 15

Вода у бојлеру запремине 80 литара са грејачем снаге 2 kW се загреје са 20°C на 75°C за 175 минута. Посматрати следећу ситуацију: вода се загреје на 75°C, после чега се грејач искључи и остаје трајно искључен. У истом тренутку из бојлера се источи 10 литара мешавине топле и хладне воде (температура хладне воде износи 20°C), температуре 55°C. После тога нема даље потрошње воде. После ког времена ће температура воде у бојлеру да опадне на 50°C? Сматрати да је температура амбијента 20°C и да је снага преноса топлоте од воде ка амбијенту сразмерна разлици температуре воде и амбијента. Густина воде износи $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$, специфични топлотни капацитет металног казана $c_{pk} = 474 \text{ J/(kgK)}$, а његова тежина $m_k = 20 \text{ kg}$. Топлотни капацитет изолације се може занемарити.

Решење

Топлотна шема која описује наведени проблем:



Слика 15.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 345,48 \text{ kJ/K} \quad (15.1)$$

Промена пораста температуре воде у бојлеру у односу на амбијент описана је следећом диференцијалном једначином:

$$C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} = P_g \quad (15.2)$$

Сређивањем једначине (15.2) се добија:

$$R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R^T \cdot P_g \quad (15.3)$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \quad (15.4)$$

где је са τ означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T \cdot C^T \quad (15.5)$$

Решење диференцијалне једначине гласи:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (15.6)$$

где је:

- θ_0 - пораст температуре воде у тренутку $t = 0$
- θ_{stac} - пораст температуре воде у устаљеном стању које би наступило када би загревање трајало неограничено дуго.

У посматраном случају загревања воде са 20°C на 75°C , величине које фигуришу у претходном изразу износе:

$$\theta_0 = 0 \text{ K} \quad (15.7)$$

$$\theta_{stac} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \quad (15.8)$$

Заменом претходне две вредности у израз за промену температуре и посматрањем тренутка у коме вода достиже температуру 75°C (тренутак у коме се грејач искључује – 175 минута након почетка загревања), може се одредити временска константа загревања, а потом из ње и топлотни отпор према амбијенту.

$$\theta(t^*) = \theta^* = 55 \text{ K} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) \quad (15.9)$$

Претходна једначина је трансцедентна по τ и може се решити итеративним поступком (или употребом одговарајућег калкулатора):

$$\tau_{k+1} = \frac{C^T \cdot \theta^*}{P_g \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau_k}})} \quad (15.10)$$

Узимањем почетног погађања $\tau = 3h$, након довољног броја итерација добија се приближна вредност временске константе:

$$\tau = 14,333h \quad (15.11)$$

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешавине топле и хладне воде температуре 55°C :

Енергија коју треба довести (позитиван број) / одвести (негативан број) телу чији топлотни капацитет износи C^T да би јој се температура променила са ϑ_p на ϑ се израчунава као:

$$E = C^T \cdot (\vartheta - \vartheta_p) \quad (15.12)$$

За воду запремине $V = 10l$, топлотни капацитет износи

$$C_{10l\text{ воде}}^T = \rho \cdot V \cdot c_p \quad (15.13)$$

(у приближним прорачунима се може сматрати да се ρ и c_p не мењају са температуром)

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешавине топле и хладне воде температуре 55°C :

$$345,48 \text{ kJ/K} \cdot (75 - \vartheta_x) = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4200 \text{ kJ/(kgK)} \cdot (55 - 20) \quad (15.14)$$

$$\vartheta_x = 75 - \left(\frac{10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4200 \text{ kJ/(kgK)} \cdot (55 - 20)}{345,48 \text{ kJ/K}} \right) = 70,74^\circ\text{C} \quad (15.15)$$

Време хлађења воде са $70,74^\circ\text{C}$ на 50°C одређује се помоћу следећег израза (изведен у задатку 14 са рачунских вежби):

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_{stac}}{\theta^* - \theta_{stac}} = 14,333h \cdot \ln \frac{70,74 - 50}{50 - 30} = 7,53h \quad (15.16)$$

Задаци за вежбу: Рок 29.4.2022. задатак 2, Рок 5.7.2021. задатак 1, Рок 1.9.2021. задатак 1.

ЗАДАТАК 16

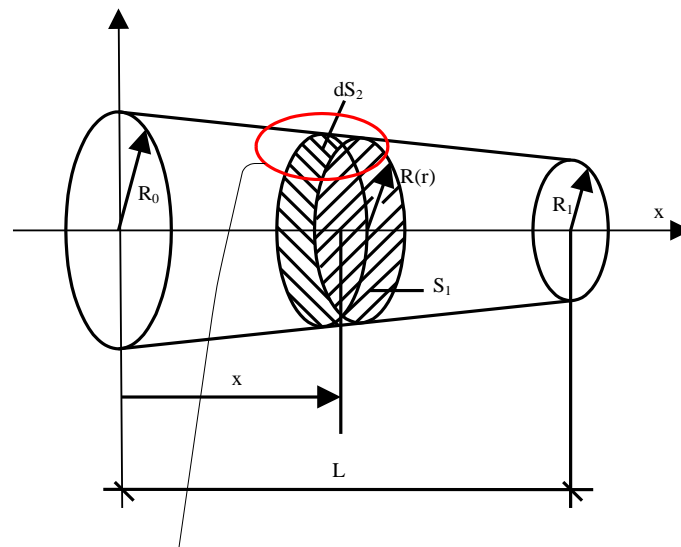
На слици 16.1 је приказан конусни пресек тела начињеног од керамике. Пречник кружног попречног пресека је променљив. У постављеном координатном систему зависност пречника од растојања x је линеарна и одређена изразом $D = D_0 + a \cdot x$, при чему је $a = -0,25$ и $D_0 = 62,5 \text{ mm}$. Базис керамичког тела мањег пречника налази се на растојању $x_1 = L = 200 \text{ mm}$ од координатног почетка (слика 16.1). Температуре граничних базиса су константне и износе $T_0 = 400 \text{ K}$ и $T_1 = 600 \text{ K}$, а омотач је идеално топлотно изолован од околине.

а) Извести израз за расподелу температуре по x координати у општим бројевима.

б) Израчунати бројну вредност снаге преноса топлоте провођењем од једног до другог базиса

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\vec{i}_x$.

Специфична топлотна проводност керамике се у посматраном температурном опсегу не мења значајно (3,64 W/mK за 400 K и 3,28 W/mK за 600 K), па се може усвојити да она има приближно константну вредност од 3,46 W/mK.



Слика 16.1

Решење

Из услова да је извод температуре по x координати константан у сваком од пресека по x оси следи:

$$\vec{q}_s = \vec{q}_s(x) = const(r, \varphi) \quad (16.1)$$

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot grad\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\vec{i}_x \right) \quad (16.2)$$

Из (16.1) и (16.2) следи:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\vec{i}_x \quad (16.3)$$

Флуks вектора површинске густине снаге представља снагу (q), чија је вредност константна у сваком од пресека по x оси:

$$q = \iint_S \vec{q}_s \cdot d\vec{S} \quad (16.4)$$

$$q = \iint_S -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x \cdot dS \quad (16.5)$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \iint_S dS = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \frac{D^2(x) \cdot \pi}{4} \quad (16.6)$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{(D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi}{4} \quad (16.7)$$

Интеграљењем једначине (16.7) може се одредити просторна расподела температуре у стационарном стању:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \quad (16.8)$$

$$d\vartheta = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \cdot dx \quad (16.9)$$

Једначина (16.9) представља диференцијалну једначину код које су променљиве раздвојене. Њено решење се налази интеграцијом:

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(x)} d\vartheta = -\int_0^x \frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \cdot dx \quad (16.10)$$

$$\vartheta(x) - \vartheta_0 = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot a \cdot \pi} \left(-\frac{1}{D_0 + a \cdot x} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (16.11)$$

Из једначине (16.11) написане за десни базис се може одредити снага којом се преноси топлота између 2 базиса:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot a \cdot \pi} \left(-\frac{1}{D_0 + a \cdot L} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (16.12)$$

$$q = \frac{\lambda \cdot a \cdot \pi \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_0)}{4 \cdot \left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot L} \right)} = -2,123W \quad (16.13)$$

Заменом израза (16.13) у (16.11), добија се расподела температуре по x оси:

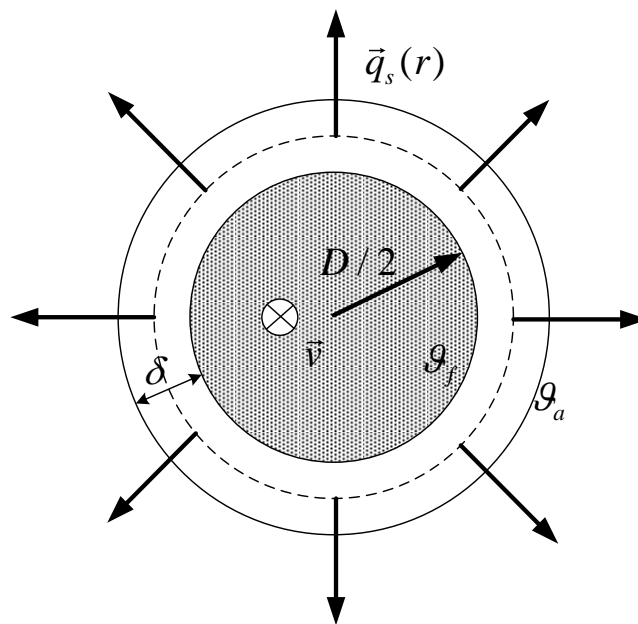
$$\vartheta(x) = \vartheta_0 + \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot L} \right)} \cdot \left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot x} \right) \quad (16.14)$$

ЗАДАТАК 17

Кроз једну металну цев кружног попречног пресека и спољашњег пречника 40 mm великом брзином протиче флуид температуре веће од амбијента. Може се сматрати да је отпор преласку топлоте струјањем са флуида на унутрашњи зид цеви занемарљиво мали. Цев је танка, тако да се може сматрати да је и отпор провођењу топлоте кроз цев занемарљив. Око цеви се поставља слој изолације топлотне проводности $\lambda = 0,2 \text{ W/(m K)}$. Коефицијент преласка топлоте са спољне површи изолације на околни ваздух износи $\alpha = 8,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Одредити при којој дебљини изолације је снага преноса топлоте од флуида ка ваздуху температуре амбијента максимална. Која је минимална дебљина изолације којом се постиже да су губици 50% мањи од оних који се имају када изолација уопште не постоји.

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{l}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \vec{l}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \vec{l}_z$.

Решење



Слика 17.1

Укупан отпор преносу топлоте са флуида ка амбијенту састоји се из отпора преносу топлоте провођењем кроз слој изолације и отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи изолације.

У даљем тексту биће одређена компонента топлотног отпора провођењу кроз слој изолације.

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \text{grad}\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \vec{i}_z \right) \quad (17.1)$$

Из разлога симетрије, температура је константна на свакој од цилиндричних површи које су концентричне са металном цеви:

$$\vartheta = \vartheta(r) = \text{const}(\varphi, z) \quad (17.2)$$

Заменом (10.2) у (10.1) се добија:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{i}_r \quad (17.3)$$

Посматра се стационарно стање. Флукс вектора површинске густине снаге кроз цилиндричну површ провучену кроз изолацију, концентрично металној цеви, на растојању r од центра проводника, представља снагу (q) која се преноси из унутрашњости цеви ка расхладном флуиду (ваздуху). Ова снага је иста кроз сваку тако формирану површ, зато што се у изолацији не генерише топлота.

$$q = \iint_S \vec{q}_s \cdot d\vec{S} \quad (17.4)$$

$$q = \iint_S q_s \cdot \vec{i}_r \cdot \vec{i}_r \cdot dS = \iint_S q_s \cdot dS \quad (17.5)$$

$$q = q_s(r) \cdot \iint_S dS = q_s(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad (17.6)$$

Заменом (17.3) у (17.6) се добија:

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad (17.7)$$

чијим решавањем се може одредити расподела температуре дуж радијалних праваца:

$$d\vartheta = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot r \cdot L} \cdot dr \quad (17.8)$$

Интеграцијом од спољне површи цеви до спољне површи изолације се добија:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R + \delta}{R}\right) = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (17.9)$$

Топлотна снага (q) која се преноси из унутрашњости цеви ка расхладном флуиду (ваздуху) се може приказати у следећем облику:

$$q = q_L \cdot L \quad (17.10)$$

где је q_L снага преноса топлоте по јединици дужине. Заменом (17.10) у (17.9) добија се:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{q_L}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R + \delta}{R}\right) = -\frac{q_L}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (17.11)$$

Топлотни отпор изолације по јединици дужине износи:

$$R_{izolacije}^T = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{q_L} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (17.12)$$

Приметимо да у граничном процесу када дебљина изолације δ поприма мале вредности, важи следеће:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{izolacije}^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\ln\left(1 + \frac{2 \cdot \delta}{D}\right) \right) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \frac{2 \cdot \delta}{D} = \frac{1}{\lambda D \pi} \delta \quad (17.13)$$

што је исто као да се топлотни отпор рачунао по формули за раван зид.

Друга компонента топлотног отпора (подужна вредност) износи:

$$R_{strujanja}^T = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} \quad (17.14)$$

Укупан подужни топлотни отпор износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T \quad (17.15)$$

$$R^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} \quad (17.16)$$

Сврха постављања изолације је да се умањи снага која се преноси са флуида ка амбијенту. Снага која се по јединици дужине преноси са флуида ка амбијенту износи:

$$P = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{R^T} \quad (17.17)$$

Да би се поменута снага умањила, потребно је повећати топлотни отпор дат релацијом (17.16). Са повећањем дебљине изолације расте топлотни отпор провођењу топлоте кроз изолацију, али се истовремено повећава и спољна површина изолације са које се

струјањем одводи топлота, што доводи до опадања отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи.

Критична дебљина изолације је она при којој снага губитака достиже свој максимум. Да би се одредила критична дебљина изолације, потребно је анализирати зависност топлотних отпора од дебљине изолације. Вредност за коју се има екстремум функције топлотних губитака, односно подужног отпора, добија се изједначавањем првог извода укупног подужног отпора по дебљини изолације са нулом:

$$\frac{\partial R^T}{\partial \delta} = \frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \frac{D}{D+2\delta} \cdot \frac{2}{D} - \frac{2}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2\delta)^2} = \frac{-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta}{\pi \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot (D+2\delta)^2} = 0 \quad (17.18)$$

$$-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta_{kr} = 0 \quad (17.19)$$

$$\delta_{kr} = \frac{2 \cdot \lambda - \alpha \cdot D}{2 \cdot \alpha} \quad (17.20)$$

Дата критична дебљина изолације има физички смисао само за $\delta_{kr} > 0$. При томе и за $\delta < \delta_{kr}$ и за $\delta > \delta_{kr}$ укупни топлотни отпор расте (снага губитака опада). При некој дебљини изолације, укупни топлотни отпор постаје једнак оном који би се имао да изолација не постоји. Дебљина изолације мора бити већа од те вредности да би се постигао жељени ефекат умањења снаге губитака. Овај случај се најчешће јавља код цеви малог пречника и у случају да се има мала вредност коефицијента преласка топлоте струјањем.

Уколико је $\delta_{kr} \leq 0$, тада се за свако $\delta > 0$ укупна вредност топлотног отпора повећава, а снага губитака смањује.

У конкретном случају, критична дебљина изолације износи:

$$\delta_{kr} = 3,53 \text{ mm} \quad (17.21)$$

Снага губитака по јединици дужине у случају да изолације нема износи:

$$P_{g0} = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} \quad (17.22)$$

Након постављања изолације, нова подужна вредност снаге губитака износи:

$$P_{g1} = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \ln \frac{D+2\delta}{D}} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2\delta)}} \quad (17.23)$$

Пошто је снага губитака много мања од снаге која се посредством флуида преноси дуж цеви, сматрано је да је температура флуида ϑ_f иста без обзира на дебљину изолације.

Из поставке задатка је:

$$P_{g0} = 2 \cdot P_{g1} \quad (17.24)$$

$$\frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} = 2 \cdot \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \ln \frac{D+2\delta}{D}} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2\delta)}} \quad (17.25)$$

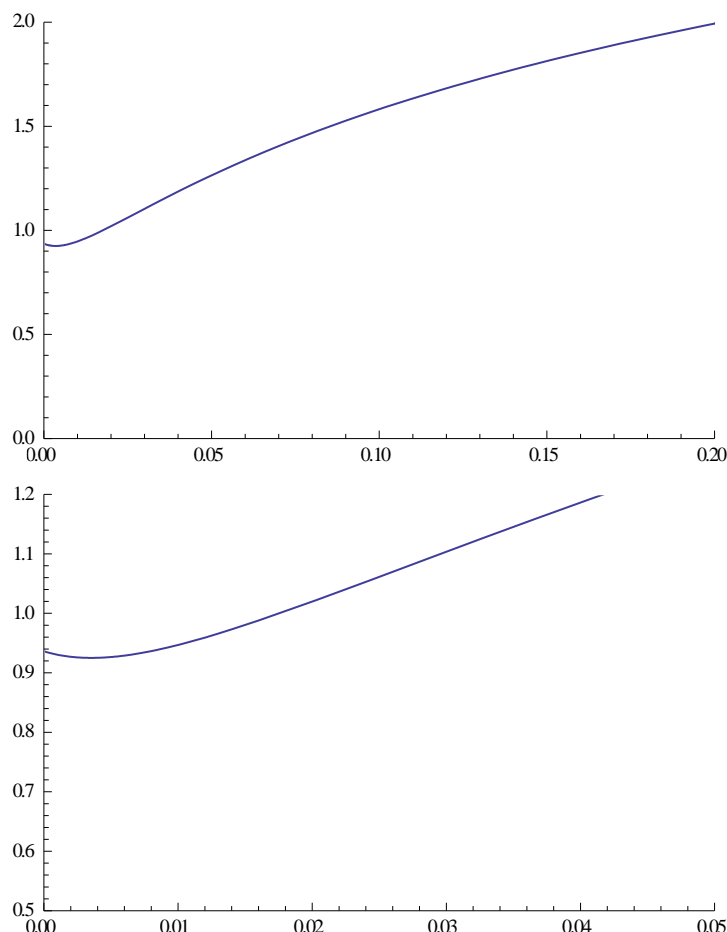
$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \ln \frac{D+2\delta}{D}} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D+2\delta)} = 2 \cdot \frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi} \quad (17.26)$$

Из једначине (17.26) се налази потребна дебљина изолације:

$$\delta = 165,24 \text{ mm} \quad (17.27)$$

што је јако велика вредност, те се поставља питање економске оправданости постављања изолације толике дебљине.

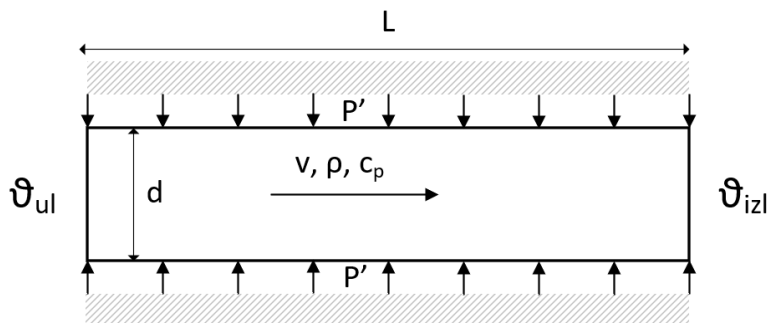
Промена топлотног отпора у зависности од дебљине изолације је дата на слици 17.2:



Слика 17.2

ЗАДАТАК 18

Кроз цев која дужине $L = 5 \text{ m}$ и унутрашњег пречника $d = 5 \text{ cm}$, протиче уље брзином $v = 10 \text{ cm/s}$. Температура уља на уласку у цев износи $\vartheta_{ul} = 20^\circ\text{C}$. Уље се загрева помоћу грејача, који је са друге стране идеално топлотно изолован, подужном снагом $P' = 500 \text{ W/m}$. Густина уља при 20°C износи $\rho = 980 \text{ kg/m}^3$, а температурна зависност специфичног топлотног



Слика 18.1

капацитета гласи $c_p(\text{J/kgK}) = 2200 + 3,6\vartheta$, где је ϑ температура у $^\circ\text{C}$. При решавању задатка сматрати да је вредност c_p константна, одређена према средњој температури уља на уласку и изласку из цеви. Нацртати промену температуре површине цеви дуж правца

струјања уља, ако је коефицијент преласка топлоте струјањем са уља на зид цеви једнак $\alpha = 20 \text{ W/(m}^2\text{K)}$.

Решење

Прво је потребно одредити температуру уља на излазу из цеви. Целокупна топлотна енергија генерисана у цеви се преноси ка уљу и изазива пораст његове температуре дуж правца струјања (у смеру осе x), па важи:

$$P'L = \rho c_p Q (\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) \quad (18.1)$$

$$Q = vS = v\pi \frac{d^2}{4} = 0,1 \cdot \pi \cdot \frac{0,05^2}{4} = 0,00019635 \text{ m}^3/\text{s} \quad (18.2)$$

$$\frac{P'L}{\rho Q} = (2200 + 3,6 \frac{\vartheta_{izl} + \vartheta_{ul}}{2}) (\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) \quad (18.3)$$

$$\frac{P'L}{\rho Q} = 2200(\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) + 1,8(\vartheta_{izl}^2 - \vartheta_{ul}^2) \quad (18.4)$$

$$\vartheta_{izl}^2 + \frac{2200}{1,8} \vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}^2 - \frac{2200}{1,8} \vartheta_{ul} - \frac{P'L}{1,8\rho Q} = 0 \quad (18.5)$$

Решавањем квадратне једначине добија се да је температура уља на изласку из цеви једнака $\vartheta_{izl} = 25,69^\circ\text{C}$.

По услови задатака, можемо апроксимирати вредност c_p као:

$$c_p = 2200 + 3,6 \frac{\vartheta_{izl} + \vartheta_{ul}}{2} = 2282,242 \text{ J/kgK} \quad (18.6)$$

Одредимо сада промену температуре уља дуж цеви. Посматрајмо део цеви од почетка до неке координате x . Овај део важи:

$$P'x = \rho c_p Q (\vartheta(x) - \vartheta_{ul}) \quad (18.7)$$

$$\vartheta(x) = \vartheta_{ul} + \frac{P'}{\rho c_p Q} \cdot x \quad (18.8)$$

Сада је потребно одредити везу између температуре уља и температуре цеви. За део цеви елементарне дужине dx на одстојању x од почетка, може се написати следећи израз ($\vartheta^{ulja}(x) = \vartheta(x)$):

$$P'dx = \alpha \cdot d \cdot \pi \cdot dx \cdot (\vartheta^{cevi}(x) - \vartheta^{ulja}(x)) \quad (18.9)$$

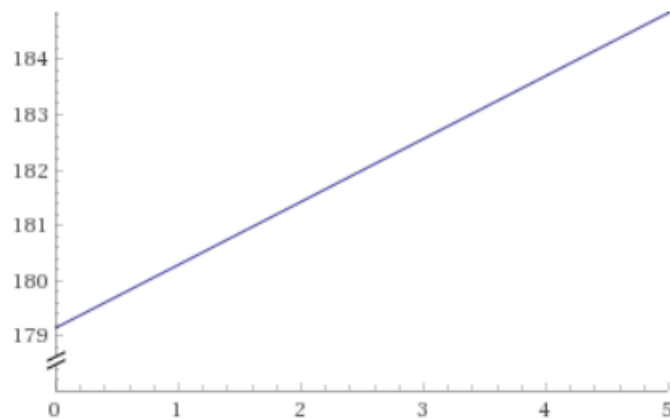
Одавде добијамо израз за температуру цеви:

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta^{ulja}(x) + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \quad (18.10)$$

Коначно добијамо израз за промену температуре цеви са координатом x :

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta_{ul} + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} + \frac{P'}{\rho c_p Q} \cdot x = 179,15 + 1,1385 \cdot x \quad (18.11)$$

На слици 18.2 приказана је зависност температуре цеви од координате x .



Слика 18.2

Задаци за вежбу: Рок 22.12.2020. задатак 2, Рок 22.9.2021. задатак 2.

Рок 25.1.2021. задатак 4, Рок 22.2.2021 задатак 4 – погледати информативно (ко жели).

ЗАДАТАК 19

Једножилни кабл пресека бакра (специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\text{Cu}} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{\text{Cu}20} = 4,29 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$) $S_{\text{Cu}} = 95 \text{ mm}^2$, са PVC изолацијом дебљине изолације $d_{iz} = 1 \text{ mm}$ (топлотне специфичне проводности $\lambda_i = 0,16 \text{ W/(mK)}$) положена је у тло специфичне топлотне отпорности $\rho_z = 2,5 \text{ (mK)/W}$. Максимална дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{doz} = 70^{\circ}\text{C}$, а температура земље удаљене од кабла $\vartheta_z = 20^{\circ}\text{C}$. Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл за два случаја: а) да је кабл положен директно у тло, б) да је постављен у кошуљицу сачињену од материјала специфичне топлотне отпорности $\rho_{zk} = 1 \text{ (mK)/W}$ - сматрати да је спољашња површ кошуљице цилиндар пречника $D_k = 200 \text{ mm}$. При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтну тло", на коме је температура једнака $\vartheta_z = 20^{\circ}\text{C}$, може узети цилиндар пречника $D_{ref} = 1000 \text{ mm}$.

Решење

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{zk}} \cdot \ln\left(\frac{D_k}{D_s}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_k}\right) \quad (19.1)$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) \quad (19.2)$$

где је:

- λ_i - специфична топлотна проводност изолације кабла,
- λ_{zk} - специфична топлотна проводност материјала кошуљице,
- λ_z - специфична топлотна проводност тла (земље),

- D_k - пречник (еквивалентно по обиму) спољне површи кошуљице (за израчунавање за реалну геометрију, круг у правоугаонику, видети лабораторијску вежбу 3.).

Пречници проводника и проводника са изолацијом једнаки су:

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10.998 \text{ mm} \approx 11 \text{ mm} \quad (19.3)$$

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11 \text{ mm} + 2 \text{ mm} = 13 \text{ mm} \quad (19.4)$$

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,16 \frac{W}{mK}} \cdot \ln\left(\frac{13 \text{ mm}}{11 \text{ mm}}\right) + \frac{1 \frac{mK}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{200 \text{ mm}}{13 \text{ mm}}\right) + \frac{2,5 \frac{mK}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000 \text{ mm}}{200 \text{ mm}}\right) = 1,242 \frac{Km}{W} \quad (19.5)$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,16 \frac{W}{m \cdot K}} \cdot \ln\left(\frac{13 \text{ mm}}{11 \text{ mm}}\right) + \frac{2,5 \frac{m \cdot K}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000 \text{ mm}}{13 \text{ mm}}\right) = 1,89 \frac{Km}{W} \quad (19.6)$$

Електрична отпорност проводника једнака је:

$$R_{Cu} = \frac{1}{\sigma \cdot S} (1 + \alpha(70 - 20)) = \frac{1}{56 \cdot 95} (1 + 4,29 \cdot 10^{-3} 50) = 2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \quad (19.7)$$

Једначина енергетског биланса гласи:

$$R_{Cu} I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_l^T} \quad (19.8)$$

Одавде добијамо израз за дозвољену струју:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_{Cu} R_l^T}} \quad (19.9)$$

- Са кошуљицом:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 20}{2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1,242 \frac{K}{W}}} = 420,2 \text{ A} \quad (19.10)$$

- Без кошуљице:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 20}{2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1,89 \frac{K}{W}}} = 340,6 \text{ A} \quad (19.11)$$

Задаци за вежбу: Рок 27.11.2021. задатак 4, Рок 24.1.2022. задатак 5, Рок 14.2.2022. задатак 5, Рок 29.4.2022. задатак 5, Рок 28.11.2020. задатак 4, Рок 22.12.2020. задатак 4.

ЗАДАТАК 20

Колико износи дозвољено струјно оптерећење трофазног самоносивог кабловског снопа (СКС), пресека електропроводног дела фазног проводника 50 mm^2 , подужног отпора на 90°C $r_m = 0,365 \text{ } \Omega/\text{km}$, који се налази у ваздуху температуре $\vartheta_a = 24^\circ\text{C}$, брзине струјања (брзина ветра) $v_v = 1 \text{ m/s}$, изложен је дејству зрачења сунца, укупне површинске густине снаге зрачења $q_s = 600 \text{ W/m}^2$? Може се сматрати да је спољашња површ СКС преко које се топлота размењује са околином круг пречника $D_{spk} = 58 \text{ mm}$, а коефицијент сивоће $\varepsilon = 0,8$. Параметри ваздуха: $\lambda = 0,02424 + 7,208 \cdot 10^{-5} \vartheta_a$, $\nu = 1,337 \cdot 10^{-5} + 8,641 \cdot 10^{-8} \vartheta_a + 1,071 \cdot 10^{-10} \vartheta_a^2$, $\beta = 0,003628 - 9,866 \cdot 10^{-6} \vartheta_a$, $c_p = 1007 + 2 (\vartheta_a + 273 - 300)/50$, $\rho = 1,292 \cdot 273,2 / (273,2 + \vartheta_a)$, $a = \lambda / (\rho c_p)$, $Pr = \nu/a$.

Коефицијент преласка топлоте принудним струјањем са хоризонталног цилиндра на ваздух се може израчунати из израза $Nu_D = 0,3 + \left((0,62 \cdot Re_D^{1/2} Pr^{1/3}) / (1 + (0,4/Pr)^{2/3})^{1/4} \right) \left(1 + (Re_D/282000)^{5/8} \right)^{4/5}$, где је Reynolds-ов број једнак $Re_D = (v \cdot D)/\nu$

Параметри ваздуха се одређују за средњу вредност температуре површи и ваздуха, за коју се приближно може сматрати да има константну вредност од 24°C .

Усвојити апроксимацију да је читава спољна површ СКС изложена дејству сунчаног зрачења. У прорачуну уважити и размену топлоте зрачењем између спољне површи СКС и амбијента.

Подаци преузети из техничке препоруке Електродистрибуције: вредност струје при којој се при стандардним условима (температура ваздуха 40°C , температура проводника (дефинисана класом изолације) 90°C , температуре спољне површи СКС 80°C , брзина ветра $V = 0 \text{ m/s}$, зрачење Сунца 900 W/m^2) достиже максимално дозвољена температура проводника износи 176 A . Из наведених података из техничке препоруке одредити отпор преносу топлоте провођењем кроз слој изолације.

Решење – решење урађено у програмском пакету Mathcad

Одређивање отпора провођењу топлоте кроз изолацију на основу вредности температура проводника и спољашње површи СКС-а које су дате у Техничкој препоруци 8 б.

Познате вредности $\nu_p := 90$ $\nu_{spks} := 80$ $I_s := 176$ $r_m := 0.000365$

$$R\lambda := \frac{(\nu_p - \nu_{spks})}{r_m \cdot (I_s)^2} = 0.884 \quad (20.1)$$

Одређивање коефицијента преласка топлоте код принудног струјања, за услове дате у задатку

Познате вредности $V_v := 1$ $D_{spk} := 0.058$ $\vartheta_a := 24$

Параметри ваздуха

$$\lambda(x) := 0.02424 + 7.208 \cdot 10^{-5} \cdot x$$

$$\nu(x) := 1.337 \cdot 10^{-5} + 8.641 \cdot 10^{-8} \cdot x + 1.071 \cdot 10^{-10} \cdot x^2$$

$$\beta(x) := 0.003628 - 9.866 \cdot 10^{-6} \cdot x$$

$$c_p(x) := 1007 + 2 \cdot \frac{(x + 273 - 300)}{50}$$

$$\rho(x) := 1.292 \cdot \frac{273.2}{(273.2 + x)}$$

$$a(x) := \frac{\lambda(x)}{c_p(x) \cdot \rho(x)}$$

$$Pr(x) := \frac{v(x)}{a(x)}$$

Reynolds-ов број:

$$ReF(x) := Vv \cdot \frac{D_{spk}}{v(x)}$$

Nusselt-ов број:

$$NuF(x) := 0.3 + \frac{\left[\left(0.62 \cdot ReF(x)^{\frac{1}{2}} \cdot Pr(x)^{\frac{1}{3}} \right) \right]}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{Pr(x)} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{4}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{ReF(x)}{282000} \right)^{\frac{5}{8}} \right]^{\frac{4}{5}} \quad (20.2)$$

$$\alpha F(x) := NuF(x) \cdot \frac{\lambda(x)}{D_{spk}} \quad (20.3)$$

$$\alpha F(\nu a) = 14.175 \quad (20.4)$$

Коефицијент преласка топлоте код принудног струјања се одређује на основу параметара ваздуха добијених за температуру ваздуха од 24°C.

Одређивање површине СКС-а на којој се врши размена топлоте

Познате вредности $D_{spk} = 0.058$ $Su := 1.1 \cdot 16 \cdot 10^{-6}$

Вредност површине попречног пресека носећег ужета је коригована због слоја изолације за 10%

$$S_{spoljasnjeg_omotaca} := \pi \cdot D_{spk} = 0.182$$

Пречник једног проводника са изолацијом (добијен из једнакостраничног троугла странице D_p)

$$D_p := \frac{\frac{D_{spk}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + 0.5} \quad (20.5)$$

Пречник носећег ужета са изолацијом

$$Du := \sqrt{\frac{4 \cdot Su}{\pi}} \quad (20.6)$$

Угао који носеће уже затвара за размену топлоте са околином

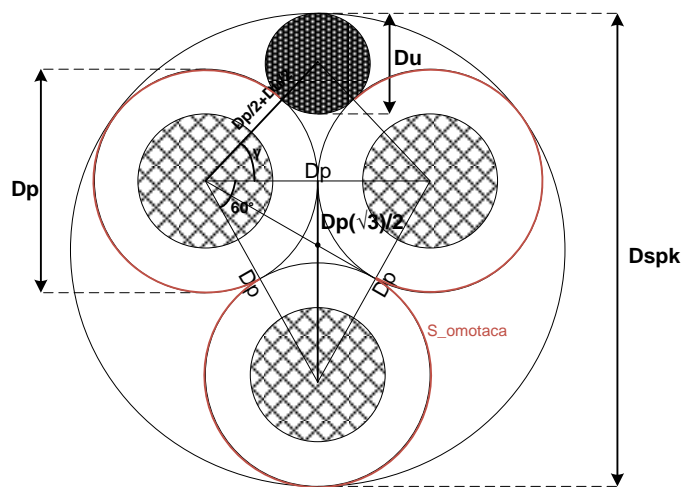
$$\gamma := \frac{180}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{Dp}{Dp + Du}\right) \quad (20.7)$$

$$\gamma = 31.74$$

Површина СКС-а на којој се размењује топлота

$$S_{omotaca} := \frac{3 \cdot 360 - 3 \cdot 60 - 2 \cdot \gamma}{3 \cdot 360} 3 \cdot \pi \cdot Dp \quad (20.8)$$

$$S_{omotaca} = 0.197$$



Слика 20.1 – Попречни пресек СКС-а

Одређивање температуре спољашње површине СКС-а и дозвољеног струјног оптерећења проводника из система једначина

Познате вредности $qs := 600$ $\sigma := 5.67 \cdot 10^{-8}$ $\epsilon_{spk} := 0.8$

Почетне вредности непознатих величина $v_k := 70$ $l := 200$

Решавање система две једначине

Given

(1) Једначина биланса снага, при чему се СКС хлади струјањем и зрачењем, а повећању температуре спољашње површи СКС-а доприносе губици у проводнику и снага зрачења сунца

$$(v_k - v_a) \cdot \alpha F(v_a) \cdot S_{omotaca} + \epsilon_{spk} \cdot \sigma \cdot S_{omotaca} \cdot [(v_k + 273.16)^4 - (v_a + 273.16)^4] = 3 \cdot m \cdot l^2 + \frac{S_{omotaca}}{2} \cdot \epsilon_{spk} \cdot qs$$

(2) Снага провођења топлоте од проводника кроз изолацију до спољашње површи СКС-а

$$m \cdot l^2 = \frac{(v_p - v_k)}{R\lambda}$$

$$prom := \text{Find}(v_k, l)$$

$$\text{prom} = \begin{pmatrix} 61.11 \\ 299.146 \end{pmatrix}$$

Решење система једначина $\underline{v_k} := \text{prom}_0 = 61.11$ $\underline{l} := \text{prom}_1 = 299.146$

Провера вредности температуре спољашње површи СКС-а наведене у препоруци Електродистрибуције за референтну дату тачку (стандардне амбијенталне услове)

Познате вредности $v_{as} := 40$ $q_{ss} := 900$ $g_e := 9.81$

Одређивање коефицијента преласка топлоте код природног струјања

Rayleigh-ев број:

$$\text{RaN}(x) := \frac{g_e \cdot \beta \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right) \cdot (x - v_{as}) \cdot \text{Dspk}^3}{\nu \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right) \cdot a \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right)} \quad (20.9)$$

Nusselt-ов број:

$$\text{NuN}(x) := \left[0.6 + \frac{0.387 \cdot \text{RaN}(x)^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{\text{Pr} \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right)} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right]^2 \quad (20.10)$$

$$\alpha \text{N}(x) := \text{NuN}(x) \cdot \frac{\lambda \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right)}{\text{Dspk}} \quad (20.11)$$

Коефицијент преласка топлоте код природног струјања се одређује са параметрима ваздуха за средњу вредност температуре површи и ваздуха.

Решавање система две једначине

Почетне вредности непознатих величина $\underline{v_k} := 80$ $\underline{l} := 176$

Giver

(1) Једначина биланса снага, при чему се СКС хлади струјањем и зрачењем, а повећању температуре спољашње површи СКС-а доприносе губици у проводнику и снага зрачења сунца

$$(v_k - v_{as}) \cdot \alpha \text{N}(v_k) \cdot S_{\text{omotaca}} + \varepsilon_{\text{spk}} \cdot \sigma \cdot S_{\text{omotaca}} \cdot \left[(v_k + 273.16)^4 - (v_{as} + 273.16)^4 \right] = 3 \cdot \text{rm} \cdot l^2 + \frac{S_{\text{omotaca}}}{2} \cdot \varepsilon_{\text{spk}} \cdot q_{ss}$$

(2) Снага провођења топлоте од проводника кроз изолацију до спољашње површи СКС-а

$$\text{rm} \cdot l^2 = \frac{(v_p - v_k)}{R\lambda}$$

$\text{prom} := \text{Find}(v_k, I)$

$$\text{prom} = \begin{pmatrix} 81.006 \\ 166.912 \end{pmatrix}$$

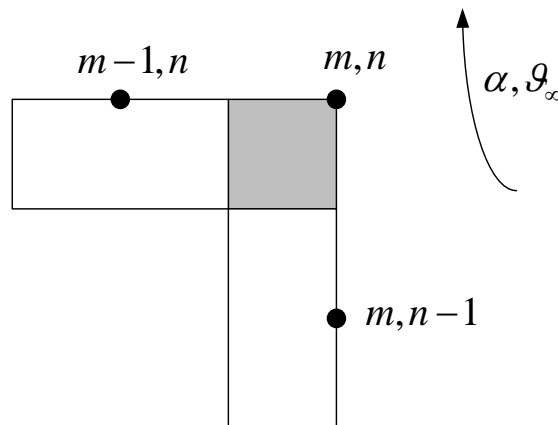
Решење система једначина $v_k := \text{prom}_0 = 81.006$ $I := \text{prom}_1 = 166.912$

При максимално дозвољеној температури проводника од 90°C , одступање струје од стандардом дате вредности (176 A) је -9,088 A, док је одступање температуре спољашње површи СКС-а 1,006 K.

Задаци за вежбу: Рок 4.7.2022. задатак 5, Рок 25.1.2021. задатак 2.

ЗАДАТАК 21

Извести израз за методу коначних елемената за елемент топлопроводне средине приказан на слици 21.1. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре користити имплицитну методу. Познати су сви подаци о карактеристикама материјала и коефицијенту преласка топлоте струјањем са тела на околни флуид температуре ϑ_∞ . Дискретизација топлопроводне средине је извршена тако да је $\Delta x = \Delta y$.



Слика 21.1

Решење

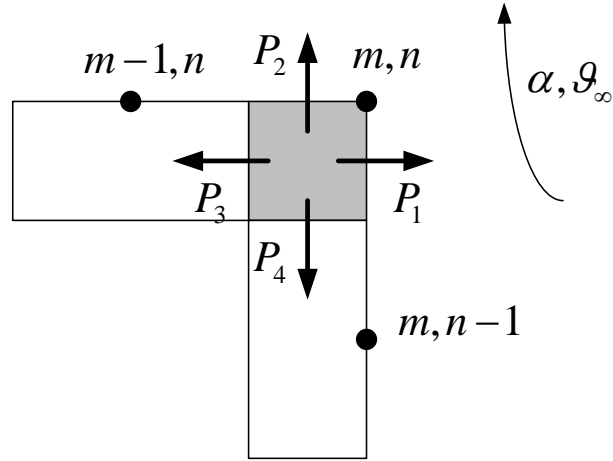
На основу биланса снага (који директно следи из енергетског биланса) примењеног на посматрани елемент (слика), може се написати следећа једначина:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (21.1)$$

где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се топлотна енергија генерише унутар посматраног елемента,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима и флуидом.

Снага којом се топлотна енергија размењује са околином има више компонената које су означене на слици 21.2 и могу се изразити преко одговарајућих температура и параметара средине.



Слика 21.2

$$P_1 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}} \quad (21.2)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}} \quad (21.3)$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{\frac{\Delta y}{2} \cdot L}} \quad (21.4)$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x}{2} \cdot L}} \quad (21.5)$$

У овом случају, са $p+1$ је означен садашњи тренутак.

Укупна снага којом се енергија преноси ка околини износи:

$$P_{prenosa} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad (21.6)$$

Заменом израза (21.2), (21.3), (21.4) и (21.5) у једначину (21.6) се добија коначан израз за снагу којом се топлота преноси ка околини:

$$P_{prenosa} = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{\frac{\Delta y}{2} \cdot L}} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{\frac{\Delta x}{2} \cdot L}} \quad (21.7)$$

Снага којом се топлотна енергија генерише у посматраној запремини износи:

$$P_{gen} = q_V \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (21.8)$$

Снага којом се топлотна енергија акумулише у посматраној запремини износи:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta_{m,n}}{\partial t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (21.9)$$

Извод температуре посматраног елемента по времену, који фигурише у (21.9), може се дискретизовати и апроксимирати као количник разлике температура посматраног елемента у садашњем и претходном тренутку и корака временске дискретизације.

$$\frac{d\vartheta_{m,n}}{dt} \approx \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (21.10)$$

Заменом (21.10) у (21.9) се добија коначан израз за снагу којом се енергија акумулише:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (21.11)$$

Заменом (21.7), (21.8) и (21.11) у (21.1) се добија:

$$\begin{aligned} q_V \cdot \frac{1}{4} \Delta x \Delta y L = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \Delta x \Delta y L + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_\infty}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_\infty}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}} \\ + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}} \end{aligned} \quad (21.12)$$

Даљим сређивањем претходне једначине се добија:

$$\begin{aligned} \vartheta_{m,n}^{p+1} \cdot (1 + 4 \cdot Fo + 4 \cdot Fo \cdot Bi) - 2 \cdot Fo \cdot (\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1}) \\ = 4 \cdot Fo \cdot Bi \cdot \vartheta_\infty + \vartheta_{m,n}^p + q_V \frac{\Delta t}{\rho \cdot c_p} \end{aligned} \quad (21.13)$$

где су *Fourier*-ов и *Biot*-ов број дати следећим изразима:

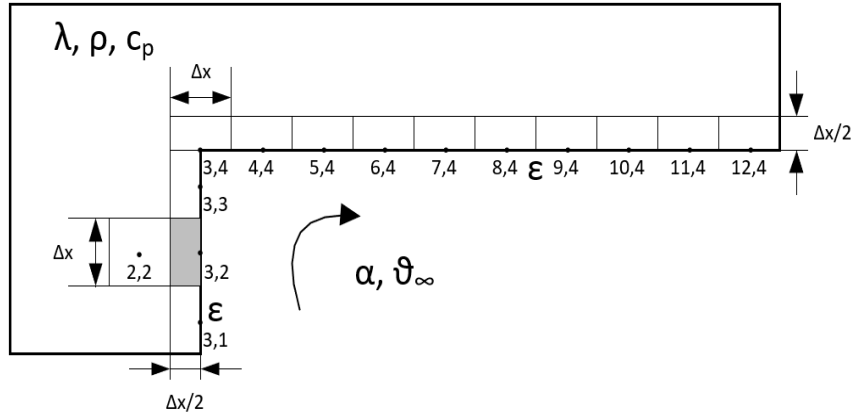
$$Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \quad (21.14)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (21.15)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} \quad (21.16)$$

ЗАДАТАК 22

Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине на координати (3,2). При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Димензије и положај елемента су приказани на слици 22.1. Топлотна проводност материјала је λ , специфични топлотни капацитет је c_p , густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_∞ је a . Коефицијент сивоће површи износи $\varepsilon = 1$. Уважити размену топлоте зрачењем са сваким елементом, при чему се код одређивања размене топлоте између два елемента може сматрати да су они елементарни, занемарљиво малих димензија (димензија по дубини је мала).



Слика 22.1

Решење

Једначине по методи коначних елемената постављају се на основу енергетског биланса и из њега проистеклог биланса снага, примењеног на поједине елементе.

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (22.1)$$

где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу, и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је $P_{gen} = 0$.

Укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу износи:

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta x}{2} L \frac{d\vartheta_{3,2}}{dt} \quad (22.2)$$

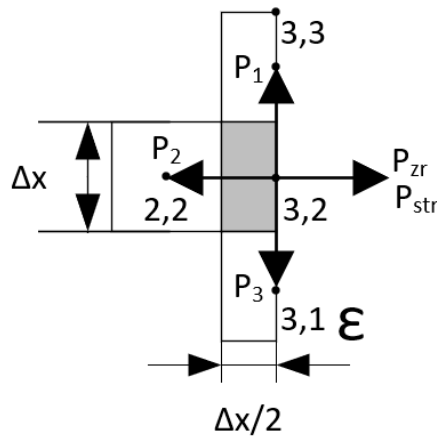
Извод температуре по времену у једначини се мора дискретизовати. У супротном, добијена једначина би била диференцијална једначина првог реда, а одређивање расподеле температуре у коначном (али јако великом) броју елемената би изискивао решавање система диференцијалних једначина. Уколико се извод по времену у једначини дискретизује, добија се систем алгебарских једначина.

Пошто се ради о експлицитној методи, извод по времену се дискретизује као количник разлике температура посматраног елемента у наредном ($p+1$ -ом) и текућем (p -том) тренутку и одговарајућег корака временске дискретизације (Δt).

$$\frac{d\vartheta_{m,n}}{dt} \approx \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (22.3)$$

Заменом овог израза у претходну једначину добија се коначан израз за снагу којом се енергија акумулише у посматраном елементу:

$$P_{akum} = \rho c_p \frac{(\Delta x)^2}{2} L \frac{\vartheta_{3,2}^{p+1} - \vartheta_{3,2}^p}{\Delta t} \quad (22.4)$$



Слика 22.2

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети provoђењем, струјањем и зрачењем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} + P_{zr} \quad (22.5)$$

На слици 22.2 су приказане снаге којима се енергија размењује са суседним елементима и снаге којима се енергија преноси струјањем на флуид и зрачењем у околину. Свака од поменутих снага може се изразити помоћу температура поменутих елемената и параметара средине.

За посматрани елемент, снага преноса топлоте provoђењем се састоји из три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3,3), (2,2) и (3,1).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^3 P_k \quad (22.6)$$

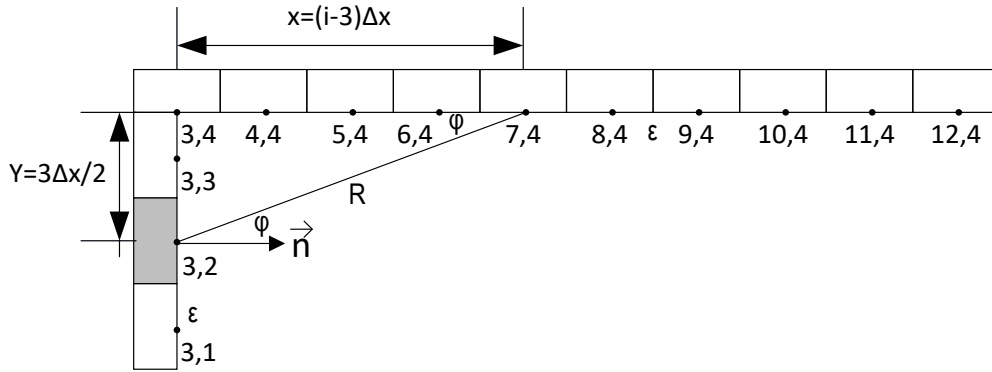
$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta x/2}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{2}{\lambda L}} \quad (22.7)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{2,2}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta x}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{2,2}^p}{\frac{1}{\lambda L}} \quad (22.8)$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,1}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta x/2}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,1}^p}{\frac{2}{\lambda L}} \quad (22.9)$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha} \frac{1}{L \Delta x}} = \alpha L \Delta x (\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{\infty}^p) \quad (22.10)$$



Слика 22.3

Топлота се са посматраног елемента може пренети зрачењем на хоризонталне елементе са координатама од (3,4) до (12,4), при чему се за сваки од два посматрана елемента мора одредити фактор виђења. Према тексту задатка површи су елементарне. Основна формула за фактор виђења за случај елементарних површи, примењена на случај фактора виђења између површи (3,2) и површи (i,4), $i=3,4, \dots, 12$, износи:

$$F_i = \frac{1}{S_{3,2}} \int_{S_{3,2}} \int_{S_{i,4}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} dS_{3,2} dS_{i,4} = \frac{1}{S_{3,2}} \int_{S_{3,2}} dS_{3,2} \int_{S_{i,4}} dS_{i,4} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} \quad (22.11)$$

$$= \frac{S_{3,2} S_{i,4}}{S_{3,2}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} = \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} S_{i,4}$$

где је угао φ угао између потега од посматране до једне од хоризонталних елементарних површи (R) и нормале на посматрану елементарну површ са координатама (3,2), као на слици 22.3. Тригонометријске функције посматраних углова φ могу се изразити на следећи начин:

$$\sin \varphi = \frac{y}{R} \quad (22.12)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{R} \quad (22.13)$$

Како се за све посматране случајеве растојање елементарних површи по у координати не мења и износи $y = \frac{3\Delta x}{2}$, потег R се на основу ознака на слици 22.3 може изразити као

$$R^2 = ((i-3)\Delta x)^2 + y^2 = (i-3)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^2 = \left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right) \Delta x^2 \quad (22.14)$$

Заменом израза (22.14.) у (22.12) и (22.13) добијају се коначни изрази за тригонометријске функције:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right) \Delta x^2}} = \frac{3}{2\sqrt{\frac{9}{4} + (i-3)^2}} \quad (22.15)$$

$$\cos \varphi = \frac{(i-3)\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right) \Delta x^2}} = \frac{(i-3)}{\sqrt{\frac{9}{4} + (i-3)^2}} \quad (22.16)$$

Површина елементарне површи се може изразити као:

$$S_{i,4} = L \Delta x \quad (22.17)$$

Конечан израз за фактор виђења је

$$F_i = \frac{\frac{3}{2}(i-3)}{\pi \left(\frac{9}{4} + (i-3)^2 \right)^2} L \Delta x \quad (22.18)$$

Снага преноса топлоте зрачењем се, за случај црног тела, одређује помоћу наредне једноставне формуле:

$$P_{Zr} = \sum_{i=3}^{12} F_i \cdot L \Delta x \cdot \varepsilon \sigma_c \left((\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (22.19)$$

$$P_{Zr} = \sum_{i=3}^{12} \frac{3(i-3)}{2\pi \left(\frac{9}{4} + (i-3)^2 \right)^2} L L \Delta x \varepsilon \sigma_c \left((\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (22.20)$$

$$P_{Zr} = \sum_{i=3}^{12} \frac{3(i-3)}{2\pi \left(\frac{9}{4} + (i-3)^2 \right)^2} L^2 \varepsilon \sigma_c \left((\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (22.21)$$

У случају сивог тела ($\varepsilon < 1$) проблем постаје много комплекснији и мора се поставити комплетна радијациона шема, односно решити систем једначина који одговара радијационој шеми.

Задаци за вежбу: Рок 27.11.2021. задатак 1, Рок 21.12.2021. задатак 1, Рок 14.2.2022. задатак 1, Рок 29.8.2022. задатак 2, Рок 19.9.2022. задатак 2, Рок 28.11.2020. задатак 1, Рок 22.12.2020. задатак 1, Рок 5.4.2021. задатак 1, Рок 5.7.2021. задатак 2

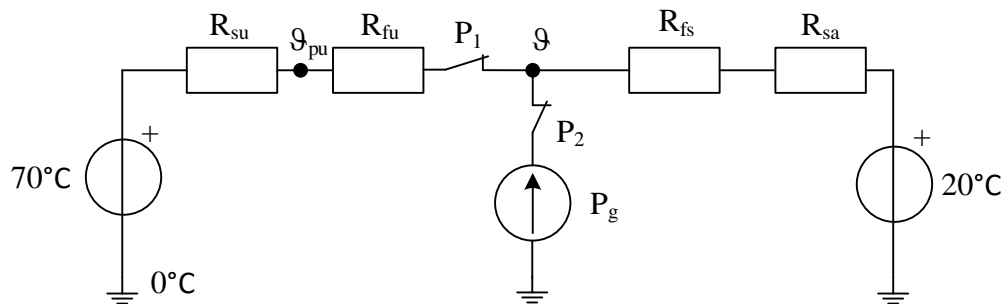
ЗАДАТАК 23

Посматрајмо зид трансформаторског суда сачињен од гвожђа дебљине $\delta_{Fe} = 8 \text{ mm}$ са чије је унутрашње стране нанет слој фарбе дебљине $\delta_{fu} = 0,1 \text{ mm}$, а са спољашње слој цинка дебљине $\delta_{zn} = 0,08 \text{ mm}$ и слој фарбе дебљине $\delta_{fs} = 0,15 \text{ mm}$. Специфична топлотна проводност фарбе износи $\lambda_f = 0,2 \frac{W}{m \cdot K}$ и много је мања од вредности за гвожђе и цинк. Коефицијент преласка топлоте струјањем према уљу температуре $\vartheta_u = 70^\circ C$ износи $\alpha_u = 65 \frac{W}{m^2 \cdot K}$, а према амбијенталном ваздуху температуре $\vartheta_a = 20^\circ C$ износи $\alpha_a = 5 \frac{W}{m^2 \cdot K}$. За три ситуације у погледу загревања зида услед расутог магнетског флукса потребно је одредити:

- Снагу хлађења уља преко зида у случају да у зиду не постоји генерисање топлоте.
- Граничну површинску густину снаге генерисања топлоте у зиду при којој уље престаје да се хлади и почиње да се загрева.
- Површинску густину снаге генерисања топлоте у зиду при којој површ која је у додиру са уљем достиже $100^\circ C$?

Решење

Одговарајућа топлотна шема приказана је на слици 23.1:



Слика 23.1

- R_{fu} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз унутрашњи слој фарбе
- R_{fs} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз спољашњи слој фарбе
- R_{su} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка уљу
- R_{sa} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка ваздуху (амбијенту)
- P_g - снага загревања зида (гвожђе дебљине 8 mm)
- ϑ_{pu} - температура површи унутрашње стране зида

Вредности параметара топлотне шеме могу се одредити на следећи начин:

$$R_{fu} = \frac{\delta_{fu}}{\lambda_f S} = 0,0005/S \quad (23.1)$$

$$R_{fs} = \frac{\delta_{fs}}{\lambda_f S} = 0,00075/S \quad (23.2)$$

$$R_{su} = \frac{1}{\alpha_u S} = 0,01538/S \quad (23.3)$$

$$R_{sa} = \frac{1}{\alpha_a S} = 0,2/S \quad (23.4)$$

$$P_g = p_g S \quad (23.5)$$

- a) Снага хлађења уља преко зида у случају да у зиду не постоји генерисање топлоте одговара ситуацији приказаној на слици 23.1 при отвореном прекидачу P_2 :

$$p_{hl} = \frac{\vartheta_u - \vartheta_a}{(R_{su} + R_{fu} + R_{fs} + R_{sa})S} = \frac{70 - 20}{0,01538 + 0,0005 + 0,00075 + 0,2} = 230 \text{ W/m}^2 \quad (23.6)$$

- b) Гранична вредност површинске густине снаге генерисања топлоте у зиду при којој уље престаје да се хлади и почиње да се загрева се одређује из услова да температура гвожђа (ϑ) постане једнака температури уља ($\vartheta = \vartheta_{gr} = 70^\circ\text{C}$). Овом случају одговара ситуација на слици 23.1 у којој је прекидач P_1 отворен, а прекидач P_2 затворен. При овим условима, површинска снага генерисања топлоте у зиду износи:

$$p_{g,b} = \frac{\vartheta_{gr} - \vartheta_a}{(R_{fs} + R_{sa})S} = \frac{70 - 20}{0,00075 + 0,2} = 249,07 \text{ W/m}^2 \quad (23.7)$$

с) Површинска густина снаге генерисања топлоте у зиду при којој површ која је у додиру са уљем достиже 100°C ($\vartheta_{pu} = 100^{\circ}\text{C}$) се одређује на следећи начин. Пошто је температура унутрашње површи зида већа од температуре уља, снага генерисања топлоте у зиду је већа од вредности одређене у случају под б) тј. уље се додатно загрева од зида. Прво је потребно одредити вредност снаге којом се топлота струјањем одводи са зида на уље:

$$p_{us} = \frac{\vartheta_{pu} - \vartheta_u}{R_{su}S} = \frac{100 - 70}{0,01538} = 1950,59 \text{ W/m}^2 \quad (23.8)$$

Сада је могуће одредити вредност температуре гвозденог зида:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_u + (R_{fu}S + R_{su}S) p_{us} = 70 + (0,0005 + 0,01538) \cdot 1950,59 \\ &= 100,98^{\circ}\text{C} \end{aligned} \quad (23.9)$$

Коначно, снага површинске густине генерисања топлоте у зиду се одређује као збир снаге којом се топлота струјањем одводи са унутрашње површине зида (израз (23.9)) и снаге којом се топлота струјањем одводи са спољашње површине зида (ка амбијенту):

$$p_{g,c} = p_{us} + \frac{\vartheta - \vartheta_a}{(R_{fs} + R_{sa})S} = 1950,59 + \frac{100,98 - 20}{0,00075 + 0,2} = 2353,97 \text{ W/m}^2 \quad (23.10)$$

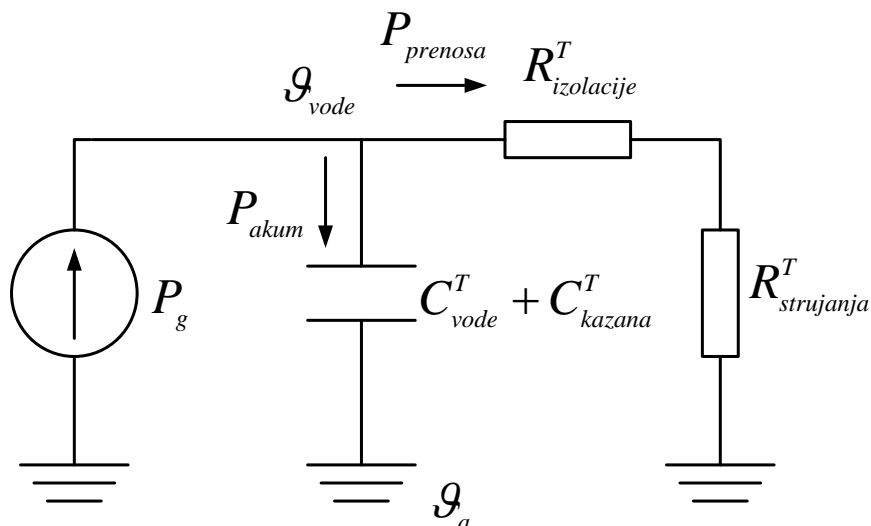
Задаци за вежбу: Рок 29.4.2022. задатак 1, Рок 29.8.2022. задатак 5, Рок 19.9.2022. задатак 5, Рок 5.7.2021. задатак 3, Рок 1.9.2021. задатак 3, Рок 22.9.2021. задатак 1.

ЗАДАТАК 24

Посматрајмо бојлер запремине 50l који се налази у просторији у којој је температура ваздуха $\vartheta_a = 20^{\circ}\text{C}$. Регулатор температуре воде у бојлеру је подешен на 90°C . Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача $P_{gr} = 2 \text{ kW}$, маса казана $m_k = 9,5 \text{ kg}$, површина казана (унутрашња површина топлотне изолације) $S_u = 0,8 \text{ m}^2$, дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности $\lambda = 0,1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $\delta = 30 \text{ mm}$, спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације) $S_s = 1 \text{ m}^2$. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи $\alpha_s = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан $\alpha_u \gg \alpha_s$. Густина воде износи $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ и специфични топлотни капацитет материјала казана $c_{pk} = 474 \text{ J/(kgK)}$. Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана се може израчунати по формула за раван зид површине $(S_u + S_s)/2$. Топла вода из бојлера троши се за туширање два пута у току дана (једина употреба топле воде у току дана), и то у 7h и у 18h, при чему туширање траје 8min. Познато је да се у току једног туширања потроши 65l воде температуре 45°C (температура хладне воде је 15°C). Колика је могућа уштеда електричне енергије у току циклуса од једног дана (24h, почевши од 18h), уколико се уместо стандардног “on-off” (хистерезисног) регулатора користи „паметни“ регулатор? Сматрати да “on-off” регулатор, по достизању задате температуре (90°C), њену вредност одржава у врло малом опсегу око номиналне. „Паметни“ регулатор држи укључен бојлер 5:40h-7h и од тренутка који треба одредити до 18h, тако да температура у 18h буде једнака 90°C . У току туширања занемарити губитак енергије кроз топлотну изолацију бојлера ка амбијенту.

Решење

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења. Сматра се да је температура воде по запремини бојлера константна, и, услед занемареног отпор преносу топлоте струјањем са воде на унутрашњи зид казана, једнак температури казана. Занемарен је топлотни капацитет изолације, због његове мале вредности. Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на следећој слици 24.1.



Слика 24.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214,5 \text{ kJ/K} \quad (24.1)$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околина износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{\frac{S_s + S_u}{2}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0,5333 \text{ K/W} \quad (24.2)$$

Укупна снага којом грејач генерише топлоту је једнак збиру снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (24.3)$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (24.4)$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \quad (24.5)$$

Са θ је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент. Коначно, добијамо диференцијалну једначину:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (24.6)$$

чије решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (24.7)$$

где је са θ_0 означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), са $\theta_\infty = P_g \cdot R^T = 1066,6 \text{ K}$ пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго и када не би не би долазило до кључања воде на 100°C , што у стварности није случај), а са $\tau = R^T C^T = 31,776 \text{ h}$ временска константа загревања воде у бојлеру.

I случај - “on-off” регулатор

Енергија која се троши током првог туширања (у 18h) водом температуре $\vartheta_{tus} = 45^\circ\text{C}$ (температура хладне воде износи 15°C) је једнака

$$\begin{aligned} E_{tusiranja} &= \rho_v c_{pv} V_V (\vartheta_{tus} - \vartheta_v) \\ &= 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 65 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 (45 - 15) = 8190 \text{ kJ} \end{aligned} \quad (24.8)$$

Температура воде у бојлеру након првог туширања у 18h ϑ_x може се одредити из следећег израза:

$$E_{tusiranja} = C^T (\vartheta_{vode \text{ u bojleru}} - \vartheta_x) \quad (24.9)$$

Како је температура воде у бојлеру на почетку била $\vartheta_{vode \text{ u bojleru}} = 90^\circ\text{C}$, температура воде у бојлеру након завршетка туширања износи

$$\vartheta_x = \vartheta_{18:08} = 51,58^\circ\text{C} \quad (24.10)$$

Опциони приступ

Q_{tus} запремински проток воде којом се особа тушира ($651 / 8 \text{ min}$), константном температуром воде 45°C

Q_b запремински проток воде из бојлера (непозната величина; она расте током туширања, јер температура воде у бојлеру опада)

$Q_{tus} - Q_b$ запремински проток хладне воде из водоводне мреже

Вредности сва три протока представљају стварне протоке сведене на температуру хладне воде из водоводне мреже (15°C). Примера ради, Q_{tus} представља стварни проток воде којом се особа тушира помножен са односом густина воде $\rho_v(45^\circ\text{C}) / \rho_v(15^\circ\text{C})$.

Упрошћење: специфични масени топлотни капацитет воде се не мења са температуром.

Једначина мешања воде из бојлера и воде из водоводне мреже:

$$Q_b \vartheta_b + (Q_{tus} - Q_b) \vartheta_v = Q_{tus} \vartheta_{tus} \quad (1)$$

Једначина енергетског биланса – енергија која је из бојлера одведена истицањем топле воде и утицањем исте количине хладне воде је једнака смањењу унутрашње енергије садржане у топлотним капацитетима воде у бојлеру и казана суда:

$$\rho c_p Q_b (\vartheta_b - \vartheta_v) = -C^T \frac{d\vartheta_b}{dt} \quad (2)$$

Из (1):

$$Q_b = Q_{tus} \frac{\vartheta_{tus} - \vartheta_v}{\vartheta_b - \vartheta_v} \quad (3)$$

Заменом (3) у (2):

$$\rho c_p Q_{tus} \frac{\vartheta_{tus} - \vartheta_v}{\vartheta_b - \vartheta_v} (\vartheta_b - \vartheta_v) = -C^T \frac{d\vartheta_b}{dt} \quad (4)$$

$$\rho c_p Q_{tus} (\vartheta_{tus} - \vartheta_v) = -C^T \frac{d\vartheta_b}{dt} \quad (5)$$

$$\vartheta_b = \vartheta_b(t=0) - \frac{\rho c_p Q_{tus} (\vartheta_{tus} - \vartheta_v)}{C^T} t \quad (6)$$

У току читавог периода туширања (трајања 8 минута, у коме се потроши укупно $V_{tus}=65l$ воде) вода се охлади за

$$\vartheta_b - \vartheta_b(t=0) = \frac{\rho c_p V_{tus} (\vartheta_{tus} - \vartheta_v)}{C^T} \quad (7)$$

Примењено на случај туширања са почетком у тренутку у коме је температура воде у бојлеру била $\vartheta_{vode \text{ u bojleru}} = 90^\circ\text{C}$, за температуру воде у бојлеру након завршетка туширања се добија

$$\vartheta_b = 90 - \frac{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 65 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 (45 - 15)}{214,5 \text{kJ/kg}} = 51,58^\circ\text{C} \quad (8)$$

Након тога, вода у бојлеру се загрева до температуре од 90°C , и за то је потребно време од:

$$t_{zag} = \tau \cdot \ln \left(\frac{\theta_\infty - \theta_0}{\theta_\infty - (90^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})} \right) = 1,202 \text{ h} \quad (24.11)$$

$$(\theta_0 = 51,58 - 20 = 31,58^\circ\text{C})$$

Како је и на почетку туширања у 7h температура воде у бојлеру 90°C , следи да ће време загревања воде бити исто и након првог туширања. Укупна утрошена електрична енергија на загревање воде износи:

$$E_{el}^{zag} = P_g \cdot 2t_{zag} = 4,81 \text{ kWh} \quad (24.12)$$

Поред тога потребно је надокнадити и енергију губитака кроз топлотну изолацију бојлера, како би се температура воде одржала на задатој вредности, и та енергија је једнака:

$$\begin{aligned} E_{el}^{gub} &= P_{prenosa} \cdot (24 - 2t_{zag} - 2t_{tuš}) \\ &= \frac{90^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}}{R^T} \cdot (24 - 2 \cdot 1,202 - 2 \cdot 8/60) \text{h} = 2,8 \text{ kWh} \end{aligned} \quad (24.13)$$

Укупна количина утрошене електричне енергије у току 24 часа износи $E_{el}^{on-off} = E_{el}^{zag} + E_{el}^{gub} = 7,61 \text{ kWh}$

II случај - “паметни” регулатор

Након првог туширања температура топле воде је иста као и у првом случају и износи $\vartheta_{18:08} = 51,58^{\circ}\text{C}$. Након тога, вода почиње да се хлади све до 5:40h и тада има температуру:

$$\vartheta_{5:40} = \vartheta_{amb} + (\vartheta_{18:08} - \vartheta_{amb})e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 41,968^{\circ}\text{C} \quad (24.14)$$

где t_1 износи 11h и 32min.

У 5:40h укључује се грејач бојлера, и остаје укључен наредних сат и 20 минута. У тренутку почетка другог туширања температура воде у бојлеру је:

$$\vartheta_{7h} = \vartheta_{5:40} + (\theta_{\infty} - (\vartheta_{5:40} - \vartheta_{amb})) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) = 84,894^{\circ}\text{C} \quad (24.15)$$

Температура воде у бојлеру након туширања износи:

$$\vartheta_{7:08} = \vartheta_{7h} - \frac{E_{tusiranja}}{CT} = 46,712^{\circ}\text{C} \quad (24.16)$$

Сада је потребно одредити тренутак укључења грејача бојлера тако да у 18h температура воде у бојлеру поново буде 90°C . То је могуће урадити решавањем следећег система једначина:

$$\vartheta_x = \vartheta_{amb} + (\vartheta_{7:08} - \vartheta_{amb})e^{-\frac{(11-8/60)-t_x}{\tau}} \quad (24.17)$$

$$\vartheta_{18h} = 90^{\circ}\text{C} = \vartheta_x + (\theta_{\infty} - (\vartheta_x - \vartheta_{amb})) \left(1 - e^{-\frac{t_x}{\tau}}\right) \quad (24.18)$$

Одавде се добија да је $t_x = 1,56h$, односно да ће се грејач бојлера укључити у 16:13h. Укупна утрошена електрична енергија је:

$$E_{el}^{smart} = P_g \cdot (1,333 + t_x) = 5,79 \text{ kWh} \quad (24.19)$$

Дакле, за један дан смањена је потрошња електричне енергије за $\Delta E = 7,61 - 5,79 = 1,82 \text{ kWh}$