



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Термички процеси у електроенергетици

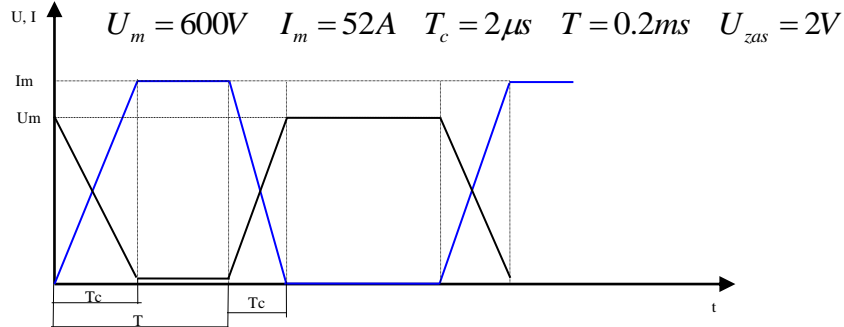
**Материјали за рачунске вежбе
(Други колоквијум)**

Децембар 2020.

ЗАДАТАК 1

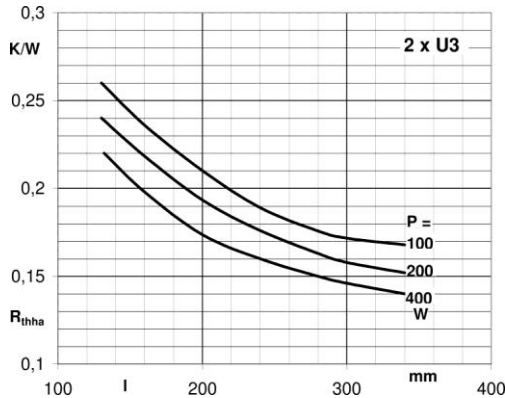
Heat sink:

Посматрајмо један IGBT који ради у неком колу на следећи начин:

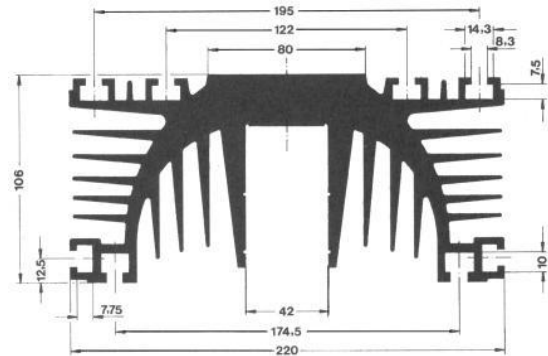


Слика 1.1

За дати режим рада и тип хладњака (слика 1.3) дужине 200 mm који се користи за хлађење IGBT-а одредити температуру места генерисања губитака у устаљеном стању ако је познато: отпор провођењу топлоте кроз транзистор је $R_t = 0,4 \text{ K/W}$ а еквивалентни отпор провођењу топлоте кроз хладњак и еквивалентни отпор преласку топлоте природним струјањем са хладњака на околни ваздух је дат на слици 1.2 као зависност $R_h(l, P)$. Температура амбијента је 25°C .



Слика 1.2



Слика 1.3

Решење:

Временске зависности напона и струје транзистора приказаних на графику можемо исказати аналитички:

$$U(t) = \begin{cases} U_m - \frac{U_m}{T_c} t; & 0 < t \leq T_c \\ U_{zas}; & T_c < t \leq T \\ \frac{U_m}{T_c} (t - T); & T < t \leq T + T_c \\ U_m; & T + T_c < t \leq 2T \end{cases} \quad I(t) = \begin{cases} \frac{I_m}{T_c} t; & 0 < t \leq T_c \\ I_m; & T_c < t \leq T \\ I_m - \frac{I_m}{T_c} (t - T); & T < t \leq T + T_c \\ 0; & T + T_c < t \leq 2T \end{cases} \quad (1.1)$$

Тренутна снага је дана изразом:

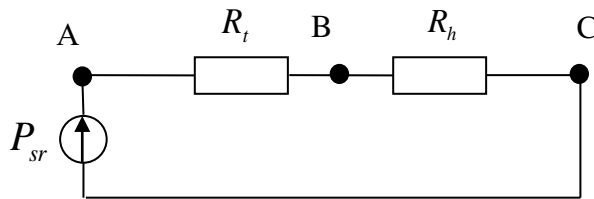
$$P(t) = U(t) \cdot I(t) \quad (1.2)$$

На основу дијаграма са слике 1.1 закључује се да су учестаности промене снаге велике, па те промене тренутне снаге неће утицати на термичке процесе. Због тога ће се у наставку посматрати средња вредност снаге:

$$P_{sr} = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} P(t) dt \quad (1.3)$$

Када се у израз (1.3) уврсте бројне вредности добија се да је средња снага губитака у транзистору 103,5 W.

Еквивалентна термичка шема је приказана на слици 1.4.



Слика 1.4

Са слике 1.4 се види да тачка В представља спој хладњака и транзистора. Видимо да се са једне стране тачке В налази отпор провођењу топлоте кроз транзистор а са друге еквивалентни отпор провођењу топлоте кроз хладњак и отпор преносу топлоте струјањем са хладњака на околни ваздух. Тачка С представља околину и она се налази на референтном потенцијалу односно на температури околине. Тачка А представља тачку генерисања губитака. У тачку А се инјектира снага губитака P_{sr} и њен потенцијал, односно температура представља тражену температуру.

У устаљеном стању сва снага која се генерише у транзистору мора да се одведе са хладњака у околину. Да би се одредила температура тачке А треба прво одредити отпоре преносу топлоте. Отпор R_t је познат и његова вредност је дата у тексту задатка. Такође и вредност отпора R_h је дата али у графичкој форми. На основу познате вредности губитака (103,5 W) и дужине хладњака (200 mm) лако се са графика $R_h(l, P)$ одређује да је вредност отпора $R_h = 0,21 \text{ K/W}$.

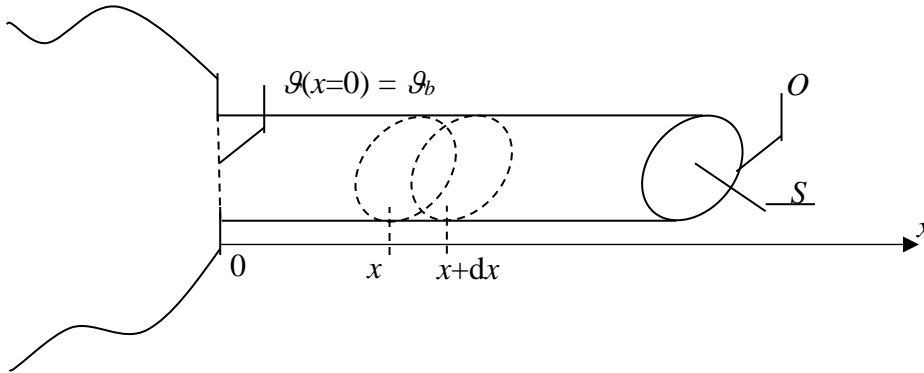
На основу тих података добија се да су падови температуре на отпорима R_h и R_t једнаки $\theta_{BC} = R_h \cdot P_{sr} = 21,735 \text{ K}$ и $\theta_{AB} = R_t \cdot P_{sr} = 41,4 \text{ K}$, респективно. Тада је укупни пораст температуре тачке А у односу на амбијент једнак збиру те две вредности и износи 63,135 K, а температура тачке А је 88,135°C

ЗАДАТАК 2

Написати израз за промену температуре дуж ребра за хлађење ослоњеног на тело са кога се топлота одводи снагом P . Површина попречног пресека ребра износи S , а његов обим O . Дужина ребра износи L , а специфична топлотна проводност λ . Коefицијент преласка топлоте струјањем на омотачу ребра има вредност α_1 , а на базису α_2 . Користити тачан гранични услов на базису ребра који се хлади. Занемарити компоненту хлађења ребра зрачењем. Позната је вредност температуре амбијента (ваздуха) ϑ_a .

Решење

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине dx , на растојању x од тела на које је ребро ослоњено (слика 2.1) гласи:



Слика 2.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (2.1)$$

где је q_x снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе x (на месту x), а $dq_{strujanja}$ снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине dx . Зависност снаге провођења од координате x гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (2.2)$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати x , једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (2.3)$$

Израз (2.3) важи само за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине dx је

$$dq_{strujanja} = \alpha_1 \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (2.4)$$

Уврштавањем у једначину (2.1) израза за диференцијал функције (2.3) и снаге преноса топлоте струјањем (2.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha_1 \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (2.5)$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha_1 \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (2.6)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \quad (2.7)$$

где је m параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha_1 \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (2.8)$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалних једначина се одређују на основу граничних услова за два базиса ребра за хлађење.

1. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра која је ослоњена на тело:

$$P = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} \quad (2.9)$$

2. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ($x = L$), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре ϑ_a , при чему је коефицијент преласка топлоте струјањем са базиса на флуид α_2 . Прецизан исказ другог граничног услова гласи:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L} = \alpha_2 (\vartheta(x=L) - \vartheta_a) \quad (2.10)$$

Заменом израза (2.7) у (2.9), односно (2.7) у (2.10) добија се:

$$-\lambda \cdot S \cdot (C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot 0} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot 0}) = P \quad (2.11)$$

$$-\lambda \cdot (C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L}) = \alpha_2 (C_1 e^{m \cdot L} + C_2 e^{-m \cdot L} + \vartheta_a - \vartheta_a) \quad (2.12)$$

Из једначине (2.11) се долази до:

$$C_2 = \frac{P}{\lambda S m} + C_1 \quad (2.13)$$

Заменом израза (2.13) у израз (2.12) добија се:

$$-\lambda m \cdot \left(C_1 e^{mL} - \frac{P}{\lambda S m} \cdot e^{-mL} - C_1 e^{-mL} \right) = \alpha_2 (C_1 e^{mL} + \frac{P}{\lambda S m} \cdot e^{-mL} + C_1 e^{-mL}) \quad (2.14)$$

$$-\lambda m C_1 \cdot (e^{mL} - e^{-mL}) + \frac{P}{S} \cdot e^{-mL} = \alpha_2 C_1 \cdot (e^{mL} + e^{-mL}) + \frac{P \alpha_2}{\lambda S m} \cdot e^{-mL} \quad (2.15)$$

$$2\alpha_2 C_1 \cdot \cosh(mL) + 2\lambda m C_1 \cdot \sinh(mL) = \frac{P}{S} \cdot e^{-mL} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_2}{\lambda m} \right) \quad (2.16)$$

$$C_1 = \frac{\frac{P}{S} \cdot e^{-mL} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_2}{\lambda m} \right)}{2(\alpha_2 \cdot \cosh(mL) + \lambda m \cdot \sinh(mL))} \quad (2.17)$$

Коначно, заменом израза (2.17) у израз (2.13) добија се вредност коефицијента C_2

$$C_2 = \frac{P}{\lambda S m} + \frac{\frac{P}{S} \cdot e^{-mL} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_2}{\lambda m} \right)}{2(\alpha_2 \cdot \cosh(mL) + \lambda m \cdot \sinh(mL))} \quad (2.18)$$

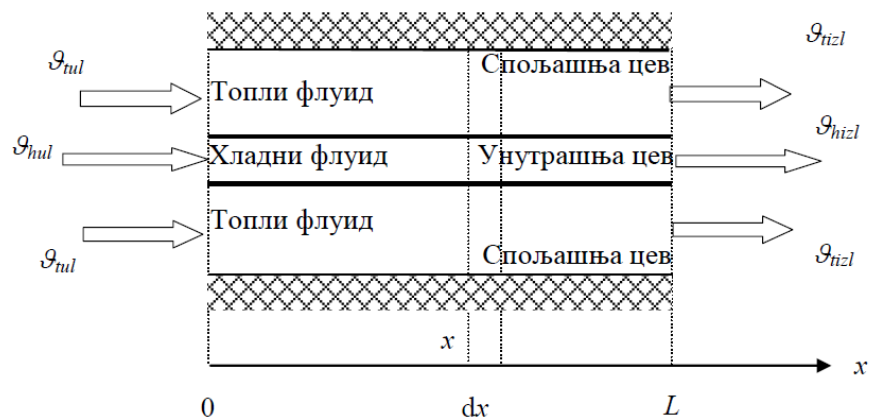
ЗАДАТАК 3

Номинални подаци чистог хладњака дужине $L_c = 1,993 \text{ m}$: проток воде $Q_{vn} = 4,167 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, проток уља $Q_{un} = 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, температуре топлог и хладног уља: $\vartheta_{tun} = 72^\circ\text{C}$ и $\vartheta_{hun} = 64^\circ\text{C}$, температуре хладне и топле воде: $\vartheta_{hvn} = 25^\circ\text{C}$ и $\vartheta_{tvn} = 42^\circ\text{C}$, расхладна снага хладњака $P_{hn} = 298 \text{ kW}$. Хладњак се може посматрати као елементарни облик хладњака дужине $2L_c$, пречника отвора унутрашње цеви, кроз коју протиче вода, $d_{un} = 13 \text{ mm}$ и дебљине цеви $\delta_{cv} = 1 \text{ mm}$, при чему су протоци воде и уља кроз сваку од $N_c = 109$ цеви једнаки укупним протоцима воде и уља, подељеним са N_c , респективно. Смерови струјања уља и воде су исти. Параметри воде и уља: $\rho_v = 1001 \text{ kg/m}^3$, $c_{pv} = 4209 \text{ J/(kgK)}$, $\rho_u = 895 \text{ kg/m}^3$, $c_{pu} = 2198 \text{ J/(kgK)}$.

Израчунати расхладну снагу и температуру уља на изласку из хладњака при номиналном протоку воде и протоку уља $Q_u = 24,42 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. Температура уља на уласку у хладњак износи $\vartheta_{tu} = 72^\circ\text{C}$, а температура воде на уласку у хладњак износи $\vartheta_{hv} = 25^\circ\text{C}$. Запрљање се може занемарити. Производ коефицијента преласка топлоте и додирне површи на страни уља износи 60% вредности производа коефицијента преласка топлоте и додирне површи на страни воде. Сматрати да је коефицијент преласка топлоте струјањем, у случају уља, сразмеран са $Q_u^{0,46}$. Отпор преласку топлоте провођењем кроз саму цев се може занемарити.

Решење

На слици 3.1 приказан је елементарни хладњак са потоком воде и уља у истом смеру.



Слика 3.1

Елементарна снага преноса топлоте кроз размењивач на делићу шитине dx који се налази на координати x је:

$$dq = \frac{\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)}{dR^T} \quad (3.1)$$

где је:

- $\vartheta_t(x)$ - температура топлог флуида на координати x ,
- $\vartheta_h(x)$ - температура хладног флуида на координати x .

Елементарни отпор преносу топлоте кроз зид размењивача одређује као збир топлотних отпора струјању течности на обе стране унутрашње цеви и топлотног отпора провођењу кроз саму цев, који је, по тексту задатка, могуће занемарити:

$$dR^T = \frac{1}{\pi d_{sp} \alpha_u dx} + \frac{1}{\pi d_{un} \alpha_v dx} \quad (3.2)$$

где је:

- d_{un} – унутрашњи пречник цеви,
- d_{sp} – спољашњи пречник цеви,
- α_u – коефицијент преласка топлоте струјањем са топлог флуида (уља) на спољашњу површ унутрашње цеви,
- α_v – коефицијент преласка топлоте струјањем са унутрашње површи унутрашње цеви на хладни флуид (воду).

Заменом израза (3.2) у (3.1) добија се:

$$dq = \pi dx \left(\frac{1}{d_{sp} \alpha_u} + \frac{1}{d_{un} \alpha_v} \right)^{-1} (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) \quad (3.3)$$

$$dq = \pi d_{un} dx \left(\frac{d_{un}}{d_{sp} \alpha_u} + \frac{1}{\alpha_v} \right)^{-1} (\vartheta_t(x) - \vartheta_h(x)) \quad (3.4)$$

Из једначине (3.4) могуће је добити вредност јединственог коефицијента преноса топлоте:

$$k_p = \left(\frac{d_{un}}{d_{sp} \alpha_u} + \frac{1}{\alpha_v} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

Површина унутрашње и спољашње површи цеви кроз коју тече вода (хладан флуид) рачуна се као:

$$S_{hladnjaka}^{un} = N_c \pi d_{un} 2 L_c = 17,7442 \text{ m}^2 \quad (3.6)$$

$$S_{hladnjaka}^{sp} = N_c \pi d_{sp} 2 L_c = N_c \pi (d_{un} + 2\delta_{cv}) 2 L_c = 20,4741 \text{ m}^2 \quad (3.7)$$

Ако се израз (3.5) помножи изразом (3.6) добија се нова једнакост у којој се појављују топлотне отпорности преносу топлоте струјањем на обе стране унутрашње цеви:

$$k_p S_{hladnjaka}^{un} = \left(\frac{1}{\alpha_u S_{hladnjaka}^{sp}} + \frac{1}{\alpha_v S_{hladnjaka}^{un}} \right)^{-1} \quad (3.8)$$

По услову задатка важи:

$$\alpha_u S_{hladnjaka}^{sp} = 0,6 \cdot \alpha_v S_{hladnjaka}^{un} \quad (3.9)$$

Заменом (3.9) у (3.8) добија се:

$$k_p S_{hladjaka}^{un} = \left(\frac{16}{6} \cdot \frac{1}{\alpha_v S_{hladjaka}^{un}} \right)^{-1} \quad (3.10)$$

$$k_p S_{hladjaka}^{un} = \frac{3}{8} \cdot \alpha_v S_{hladjaka}^{un} \quad (3.11)$$

$$\alpha_v = \frac{8}{3} \cdot k_p \quad (3.12)$$

$$\alpha_u = 0,6 \cdot \frac{8}{3} \cdot k_p \cdot \frac{S_{hladjaka}^{un}}{S_{hladjaka}^{sp}} \quad (3.13)$$

Јединствени коефицијент преласка топлоте при номиналним радним условима може се одредити као:

$$k_{p,nom} = \frac{P_{hm} \cdot \ln \left(\frac{\Delta\vartheta_{izl,nom}}{\Delta\vartheta_{ul,nom}} \right)}{S_{hladjaka}^{un} (\Delta\vartheta_{izl,nom} - \Delta\vartheta_{ul,nom})} \quad (3.14)$$

где је:

- $\Delta\vartheta_{ul,nom} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 72 - 25 = 47^\circ\text{C}$,
- $\Delta\vartheta_{izl,nom} = \vartheta_{hun} - \vartheta_{tvn} = 64 - 42 = 22^\circ\text{C}$.

У изразу (3.14), као и наставку задатка, за температуре означене на слици 3.1 у користе се следеће ознаке:

- $\vartheta_{tul} = \vartheta_{tu}$
- $\vartheta_{tizl} = \vartheta_{hu}$
- $\vartheta_{hul} = \vartheta_{hv}$
- $\vartheta_{hizl} = \vartheta_{tv}$

Заменом бројних вредности добија се да јединствени коефицијент преласка топлоте струјањем при номиналним условима има вредност $k_{p,nom} = 509,9425 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$. Сада је могуће, помоћу израза (3.12) и (3.13), израчунати вредности коефицијента преласка топлоте струјањем при номиналним условима: $\alpha_{v,nom} = 1359,8466 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ и $\alpha_{u,nom} = 707,1202 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$.

При новим радним условима, проток воде има номиналну вредност ($Q_v = Q_{vn}$), док је проток уља повећан. Због тога коефицијент преласка топлоте струјањем за воду остаје исти ($\alpha_v = \alpha_{v,nom}$), а за уље има вредност:

$$\alpha_u = \alpha_{u,nom} \cdot \left(\frac{Q_u}{Q_{un}} \right)^{0,46} = 738,8119 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \quad (3.15)$$

Сада је могуће прорачунати и нову вредност коефицијента преноса топлоте:

$$k_p = \left(\frac{d_{un}}{d_{sp}\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_v} \right)^{-1} = 523,9905 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}) \quad (3.16)$$

Сва топлота која се одузме од топлог флуида (уља) преда се хладном флуиду (води), на основу овога могуће је написати следећа два израза:

$$P_h = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \quad (3.17)$$

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (3.18)$$

где је $\vartheta_{tu} = \vartheta_{tun} = 72^\circ\text{C}$, $\vartheta_{hv} = \vartheta_{hvn} = 25^\circ\text{C}$.

При новим радним условима израз (3.14) има следећи облик:

$$k_p = \frac{P_h \cdot \ln \left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)}{S_{hladnjaka}^{un} (\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} \quad (3.19)$$

Изрази (3.17), (3.18) и (3.19) чине систем од три једначине са три непознате:

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} \quad (3.20)$$

$$\vartheta_{tv} = \vartheta_{hv} + \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} \quad (3.21)$$

$$k_p = \frac{P_h \cdot \ln \left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}} \right)}{S_{hladnjaka}^{un} ((\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}) - (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}))} \quad (3.22)$$

Решење овог система је:

$$\vartheta_{hu} = 65,52^\circ\text{C} \quad (3.23)$$

$$\vartheta_{tv} = 42,74^\circ\text{C} \quad (3.24)$$

$$P_h = 311,438 \text{ kW} \quad (3.25)$$

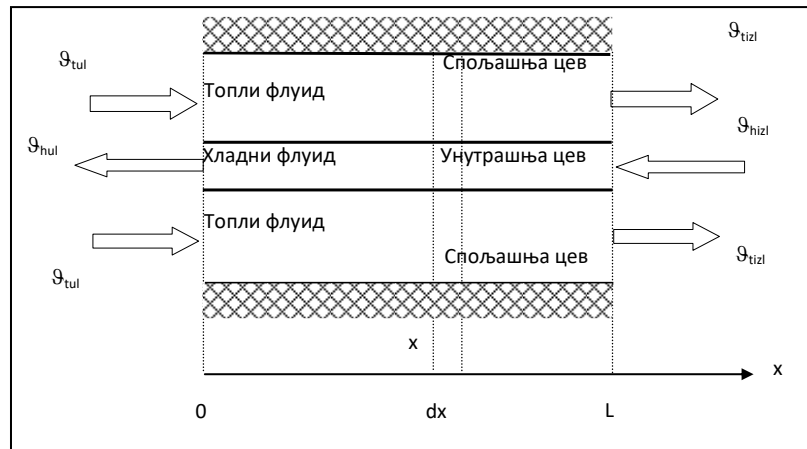
ЗАДАТАК 4

Коефицијент преласка топлоте, одређен из номиналних података хладњака, износи $k_p = 455 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$. Вредност фактора хладњака F је блиска јединици, због чега се хладњак може посматрати као елементарни облик хладњака дужине $2L_c$ кога сачињавају две цилиндричне коаксијалне цеви кроз које уље и вода протичу у супротним смеровима. Пречник унутрашње цеви (број цеви износи $N_c = 109$, а дужина $L_c = 1,993 \text{ m}$), кроз коју протиче вода, износи $d_{ucv} = 13 \text{ mm}$, дебљина цеви $\delta_{cv} = 1 \text{ mm}$, док је еквиваленти унутрашњи пречник цеви кроз коју протиче уље и која је идеално топлотно изолована од околине, $d_{ucv} = 22 \text{ mm}$. Проток воде и уља кроз еквиваленти елементарни хладњак (две концентричне цеви) је N_c пута мањи од протока кроз стварни хладњак, а коефицијент проласка топлоте исти.

Током зиме, трансформатор је искључен са мреже, и поново укључен после дужег времена ван погона. У тренутку укључења, температура масе уља у суду (температура уља које улази у хладњака) износи $\vartheta_{tu} = -6^\circ\text{C}$. Може се сматрати да су протоци уља и воде приближни номиналним ($Q_{vode} = 4,167 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, $Q_{ulja} = 22,2 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$) и да је коефицијент преласка топлоте једнак вредности у номиналном режиму. Параметри воде и уља: $\rho_v = 1001 \text{ kg/m}^3$, $c_{pv} = 4209 \text{ J/(kgK)}$, $\rho_u = 895 \text{ kg/m}^3$, $c_{pu} = 2198 \text{ J/(kgK)}$. Написати једначине из којих се може одредити минимална температура воде на уласку у хладњака при којој неће долазити до смрзавања воде у хладњаку?

Решење

На слици 4.1 приказан је елементарни хладњака са потоком воде и уља у супротном смеру.



Слика 4.1

За температуре означене на слици 4.1 у користе се следеће ознаке:

- $\vartheta_{tul} = \vartheta_{tu}$
- $\vartheta_{tizl} = \vartheta_{hu}$
- $\vartheta_{hul} = \vartheta_{tv}$
- $\vartheta_{hizl} = \vartheta_{hv}$

На основу текста задатка закључује се да су познате вредности две температуре: температуре уља на уласку у хладњака ($\vartheta_{tu} = -6^\circ\text{C}$) и температуре воде на изласку из хладњака ($\vartheta_{tv} = 0^\circ\text{C}$), а преостале две температуре је потребно одредити.

Јединствени коефицијент преласка топлоте може се одредити као:

$$k_p = \frac{P_{h,el} \cdot \ln \left(\frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)}{S_{hladjaka}^{sr} (\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} \quad (4.1)$$

где је:

- $\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}$,
- $\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}$,

- $S_{hladnjaka}^{sr} = d_{cvsr} \pi 2L_c = \frac{d_{ucv} + d_{scv}}{2} \pi 2L_c = \frac{d_{ucv} + (d_{ucv} + 2\delta_{cv})}{2} \pi 2L_c,$
- $P_{h,el} = P_h / N_c.$

НАПОМЕНА: У задатку 3 се у изразу аналогном изразу (4.1) користи површина унутрашње површи цеви, док се у изразу (4.1) користи средња вредност површине. Ово је последица тога да је при извођењу одговарајућег изрази у трећем задатку усвојена претпоставка да је референтна површ, за прорачун преноса топлоте, унутрашња површ цеви. У овом задатку је дата вредност јединственог коефицијента преноса топлоте, а није назначено у односу на коју површ, као референтну, је он прорачунат, због тога се усваја средња вредност површине спољашње и унутрашње површи.

Израз (4.1) се, заменом одговарајућих температура, трансформише у:

$$k_p = \frac{P_{h,el} \cdot \ln \left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}} \right)}{S_{hladnjaka}^{sr} (\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv} - (\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}))} \quad (4.2)$$

По тексту задатка, протоци кроз елементарни хладњак су једнаки:

$$Q_u = \frac{Q_{ulja}}{N_c} \quad (4.3)$$

$$Q_v = \frac{Q_{vode}}{N_c} \quad (4.4)$$

Сва топлота која се одузме (у овом задатку ова топлота је негативна) од топлог флуида (уља) преда се хладном флуиду (води), на основу овога могуће је написати следећа два изрази:

$$P_{h,el} = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \quad (4.5)$$

$$P_{h,el} = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (4.6)$$

Израз (4.2) се може записати и као:

$$k_p S_{hladnjaka}^{sr} \left(\frac{\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}}{P_{h,el}} - \frac{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}}{P_{h,el}} \right) = \ln \left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}} \right) \quad (4.7)$$

Заменом изрази (4.5) и (4.6) у (4.7) добија се:

$$k_p S_{hladnjaka}^{sr} \left(\frac{1}{\rho_v Q_v c_{pv}} - \frac{1}{\rho_u Q_u c_{pu}} \right) = \ln \left(\frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}} \right) \quad (4.8)$$

Овај израз представља једну од две једначине траженог система једначина. Друга једначина добија се изједначавањем изрази (4.5) и (4.6):

$$\rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \quad (4.5)$$

Решавам система једначина добијају се вредности температура: $\vartheta_{hu} = -4,61^\circ\text{C}$ и $\vartheta_{hv} = 3,46^\circ\text{C}$.

ЗАДАТАК 5

Приказати график промене температуре у монофазном трансформатору - уља у намотајима, уља у радијатору и намотаја, укључујући и најтоплију тачку намотаја.

Приказ дати за трансформатор са два намотаја истих висина, чији се почеци налазе на истој позицији, различитих вертикалних градијената температуре у сваком од њих (намотај 1: вертикални градијент температуре уља $\Delta\theta_{u\text{v}n1} = 8^\circ\text{C}$, проток Q_1 , губици $P_1 = 120 \text{ kW}$, намотај 2: вертикални градијент температуре уља $\Delta\theta_{u\text{v}n2} = 6^\circ\text{C}$ проток Q_2 , губици $P_2 = 100 \text{ kW}$). Поред протицања уља кроз намотаје, постоји и компонента струјања уља поред активног дела трансформатора *by-pass* (проток $Q_{BP} = 30\%(Q_1 + Q_2)$), за коју се приближно може сматрати да се ово уље не загрева. До мешања уља из намотаја и *by-pass*-а уља долази на координати висине намотаја. Дно хладњака се налази на већој висини од дна намотаја. Врх хладњака се налази на већој висини од врха намотаја. Сматрати да су параметри уља константни, односно да се не мењају са температуром: $\rho_u = 895 \text{ kg/m}^3$, $c_{pu} = 2198 \text{ J/(kg K)}$. Температура доњег уља је $\vartheta_{du} = 50^\circ\text{C}$.

Порасте средњих температура намотаја у односу на средње температуре уља у намотају износе: $g_{n1} = 19 \text{ K}$, $g_{n2} = 20,5 \text{ K}$, Фактори најтоплије тачке намотаја, дефинисани према температури уља у намотају, износе: $H_{n1} = 1,2$ и $H_{n2} = 1,15$.

Решење

Снага генерисања топлоте у намотају трансформатора подиже температуру расхладног флуида, односно уља које струји протоком Q_i кроз намотај, за температуру $\Delta\theta_{u\text{v}ni}$ ($i = 1, 2$), из чега следи биланс снага за сваки од намотаја:

$$P_1 = \rho_u c_{pu} Q_1 \Delta\theta_{u\text{v}n1} \quad (5.1)$$

$$P_2 = \rho_u c_{pu} Q_2 \Delta\theta_{u\text{v}n2} \quad (5.2)$$

На висини врха намотаја долази до мешања три тока уља, по једног из сваког намотаја и *by-pass* уља, након чега сво уље температуре ϑ_{mixu} одлази у хладњак, тако да се може написати укупни биланс снаге за намотаје и уље:

$$P_1 + P_2 = \rho_u c_{pu} (Q_1 + Q_2 + Q_{BP}) (\vartheta_{mixu} - \vartheta_{du}) \quad (5.3)$$

Из једначина (5.1) и (5.2) се могу добити вредности протока уља кроз намотаје:

$$Q_1 = \frac{P_1}{\rho_u c_{pu} \Delta\theta_{u\text{v}n1}} = \frac{120000 \text{ W}}{895 \text{ kg/m}^3 \cdot 2198 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 8^\circ\text{C}} = 7,625 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \quad (5.4)$$

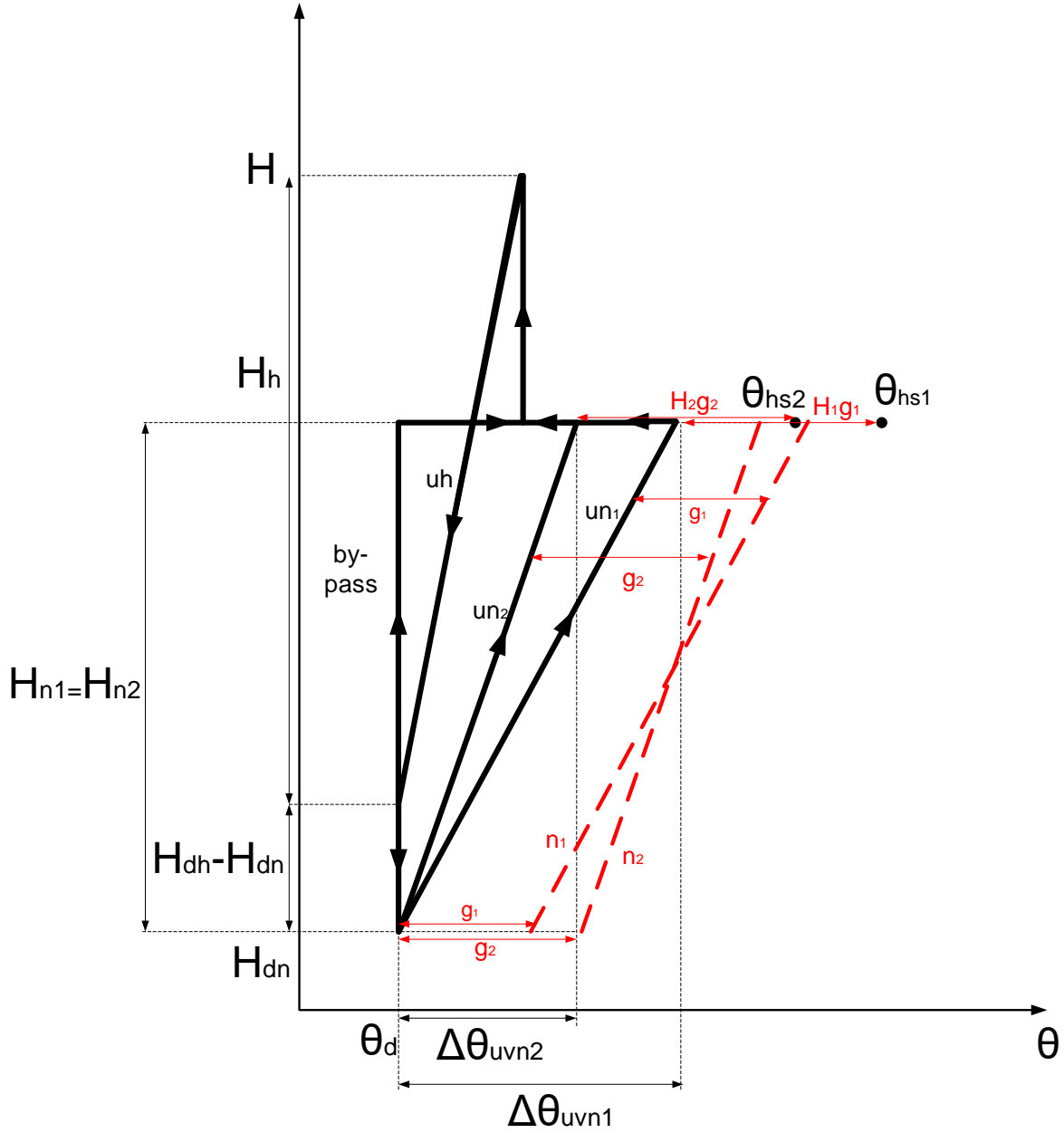
$$Q_2 = \frac{P_2}{\rho_u c_{pu} \Delta\theta_{u\text{v}n2}} = \frac{100000 \text{ W}}{895 \text{ kg/m}^3 \cdot 2198 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 6^\circ\text{C}} = 8,472 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \quad (5.5)$$

а затим и за уље у *by-pass*-у:

$$Q_{BP} = 0,3 \cdot (7,625 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^3\text{K} + 8,472 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^3\text{K}) = 4,829 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} \quad (5.6)$$

На основу једначине (5.3) долази се до (пораста) температуре уља на улазу у хладњак:

$$\vartheta_{mixu} = 50 + \frac{120000 + 100000}{895 \cdot 2198 (7,625 \cdot 10^{-3} + 8,472 \cdot 10^{-3} + 4,829)} = 55,34^\circ\text{C} \quad (5.7)$$



Слика 5.1

Температура најтоплије тачке намотаја се једноставно одређује као:

$$\vartheta_{hs1} = \vartheta_{du} + \Delta\theta_{uvn1} + H_1 \cdot g_1 = 50 + 8 + 1,2 \cdot 19 = 80,8^\circ\text{C} \quad (5.8)$$

$$\vartheta_{hs2} = \vartheta_{du} + \Delta\theta_{uvn2} + H_2 \cdot g_2 = 50 + 6 + 1,15 \cdot 20,5 = 79,6^\circ\text{C} \quad (5.9)$$

ЗАДАТАК 6

За један енергетски уљни трансформатор су познате следеће позиције (L) (у односу на дно суда) и висине (h) намотаја и хладњака: дно намотаја $L_{dn1} (<) L_{dn2}$, дно хладњака $L_{dh} (L_{dh} > L_{dn2})$, висина намотаја $h_{n1} (<) h_{n2}$, дужина (висина) хладњака $h_h (> h_{n2})$. Посматрају се два огледа загревања у кратком споју, у ONAF и ODAF режимима хлађења, при којима је проток уља кроз сваки од намотаја (Q_{n1}, Q_{n2}) и кроз хладњак (Q_h) у ODAF режиму 4 пута већи него у ONAF режиму. Познати су подаци из огледа загревања у ONAF режиму: пораст температура уља по висини сваког од намотаја и хладњака $\Delta\theta_{n1} = 24 \text{ K}$, $\Delta\theta_{n2} = 21 \text{ K}$ и $\Delta\theta_h = 22 \text{ K}$, пораст температуре доњег уља у односу на амбијент $\theta_{du} = 30 \text{ K}$ и пораст средњих температура намотаја у односу на средње температуре уља у намотају $g_{n1} = 19 \text{ K}$, $g_{n2} = 20,5 \text{ K}$, при чему је пад температуре услед провођења топлоте $g_{np1} = 3 \text{ K}$, $g_{np2} = 6 \text{ K}$. Може се сматрати да су пораст температура уља по висини сваког од намотаја и хладњака сразмерни са губицима у намотајима и обрнуто сразмерни са протоком кроз њих. Коефицијент преласка топлоте струјањем са површи изолације на уље је сразмеран брзини струјања уља на степен 0,46. Фактори најтоплије тачке намотаја, дефинисани према температури уља у намотају, износе: у ONAF режиму $H_{n1ON} = 1,2$ и $H_{n2ON} = 1,15$, а у ODAF режиму $H_{n1OD} = 1,18$ и $H_{n2OD} = 1,1$. Одредити однос снаге губитака у ODAF режиму према снази губитака у ONAF режиму при којој ће вредност температуре најтоплије тачке у топлијем намотају бити иста у ODAF и ONAF режимима. Снага хлађења је сразмерна разлици средње температуре уља у хладњаку и температуре амбијента.

Решење

За случај када трансформатор ради у ONAF режиму хлађења важи:

- Пораст температуре доњег уља једнак је:

$$\theta_{du}^{ON} = \vartheta_{du}^{ON} - \vartheta_a = 30\text{K} \quad (6.1)$$

- Пораст температура горњег уља намотаја су:

$$\theta_{gu,n1}^{ON} = \theta_{du}^{ON} + \Delta\theta_{n1}^{ON} = 30\text{K} + 24\text{K} = 54\text{K} \quad (6.2)$$

$$\theta_{gu,n2}^{ON} = \theta_{du}^{ON} + \Delta\theta_{n2}^{ON} = 30\text{K} + 21\text{K} = 51\text{K} \quad (6.3)$$

- Пораст температура горњег уља хладњака је:

$$\theta_{gu,h}^{ON} = \theta_{du}^{ON} + \Delta\theta_h^{ON} = 30\text{K} + 22\text{K} = 52\text{K} \quad (6.4)$$

- Пораст средње температуре уља у хладњаку је:

$$\theta_{su,h}^{ON} = \theta_{du}^{ON} + \frac{\Delta\theta_h^{ON}}{2} = 30\text{K} + 11\text{K} = 41\text{K} \quad (6.5)$$

Пошто је снага хлађења сразмерна са порастом средње температуре уља у хладњаку важи:

$$\frac{\theta_{su,h}^{OD}}{\theta_{su,h}^{ON}} = \frac{P_h^{OD}}{P_h^{ON}} = x \quad (6.6)$$

Градијент уља по висини сваког од намотаја и хладњака пропорционалан је са снагом губитака, а обрнуто пропорционалан протоку, па важи:

$$\frac{\Delta\theta_{n1}^{OD}}{\Delta\theta_{n1}^{ON}} = \frac{\Delta\theta_{n2}^{OD}}{\Delta\theta_{n2}^{ON}} = \frac{\Delta\theta_h^{OD}}{\Delta\theta_h^{ON}} = \frac{P_{Cu}^{OD} Q^{ON}}{P_{Cu}^{ON} Q^{OD}} = x \cdot \frac{1}{4} \quad (6.7)$$

Сада се могу написати изрази за порасте температуре доњег и горњег уља намотаја:

$$\theta_{du}^{OD} = \theta_{su,h}^{OD} - \frac{\Delta\theta_h^{OD}}{2} = x \cdot \theta_{su,h}^{ON} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot x \cdot \Delta\theta_h^{ON} \quad (6.8)$$

$$\theta_{gu,n1}^{OD} = \theta_{du}^{OD} + \Delta\theta_{n1}^{OD} = x \cdot \theta_{su,h}^{ON} - \frac{1}{8} \cdot x \cdot \Delta\theta_h^{ON} + \frac{1}{4} \cdot x \cdot \Delta\theta_{n1}^{ON} \quad (6.9)$$

$$\theta_{gu,n2}^{OD} = \theta_{du}^{OD} + \Delta\theta_{n2}^{OD} = x \cdot \theta_{su,h}^{ON} - \frac{1}{8} \cdot x \cdot \Delta\theta_h^{ON} + \frac{1}{4} \cdot x \cdot \Delta\theta_{n2}^{ON} \quad (6.10)$$

Пораст средње температуре намотаја у односу на средњу температуру уља g_n састоји се из две компоненте (једна је последица преноса топлоте струјањем g_{ns} , а друга преноса топлоте провођењем g_{np}), па важи:

$$g_{ns1}^{ON} = g_{n1}^{ON} - g_{np1}^{ON} = 19K - 3K = 16K \quad (6.11)$$

$$g_{ns2}^{ON} = g_{n2}^{ON} - g_{np2}^{ON} = 20,5 - 6K = 14,5K \quad (6.12)$$

Компонента која је последица преноса топлоте струјањем, је обрнуто пропорционална са коефицијентом преласка топлоте струјањем (α) тј. са протоком уља на степен 0,46. На основу овога могуће је одредити ове компоненте за случај ODAF хлађења:

$$g_{ns1}^{OD} = g_{ns1}^{ON} \left(\frac{\alpha_{n1}^{ON}}{\alpha_{n1}^{OD}} \right) \cdot \frac{P_{Cu}^{OD}}{P_{Cu}^{ON}} = g_{ns1}^{ON} \left(\frac{Q_{n1}^{ON}}{Q_{n1}^{OD}} \right)^{0,46} \cdot \frac{P_{Cu}^{OD}}{P_{Cu}^{ON}} = 16K \left(\frac{1}{4} \right)^{0,46} \cdot x = x \cdot 8,46K \quad (6.13)$$

$$g_{ns2}^{OD} = g_{ns2}^{ON} \left(\frac{\alpha_{n2}^{ON}}{\alpha_{n2}^{OD}} \right) \cdot \frac{P_{Cu}^{OD}}{P_{Cu}^{ON}} = g_{ns2}^{ON} \left(\frac{Q_{n2}^{ON}}{Q_{n2}^{OD}} \right)^{0,46} \cdot \frac{P_{Cu}^{OD}}{P_{Cu}^{ON}} = 14,5K \left(\frac{1}{4} \right)^{0,46} \cdot x = x \cdot 7,66K \quad (6.14)$$

Компонента која је последица преноса топлоте провођењем, пропорционална је са снагом губитака:

$$\frac{g_{np1}^{OD}}{q_{np1}^{ON}} = \frac{g_{np2}^{OD}}{q_{np2}^{ON}} = \frac{P_{Cu}^{OD}}{P_{Cu}^{ON}} = x \quad (6.15)$$

У случају ONAF хлађења порасте температуре најтоплије тачке намотаја су:

$$\theta_{hs1}^{ON} = \theta_{gu,n1}^{ON} + H_{n1ON} g_{n1}^{ON} = 76,8K \quad (6.16)$$

$$\theta_{hs2}^{ON} = \theta_{gu,n2}^{ON} + H_{n1ON} g_{n2}^{ON} = 74,58K \quad (6.17)$$

У случају ODAF хлађења порасте температуре најтоплије тачке намотаја рачунају се као:

$$\begin{aligned} \theta_{hs1}^{OD} &= \theta_{gu,n1}^{OD} + H_{n1OD} \cdot g_{n1}^{OD} \\ &= x \left(\theta_{su,h}^{ON} - \frac{1}{8} \Delta\theta_h^{ON} + \frac{1}{4} \Delta\theta_{n1}^{ON} \right) + H_{n1OD} \left(x \left(\frac{1}{4} \right)^{0,46} \cdot g_{ns1}^{ON} + x g_{np1}^{ON} \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \theta_{hs2}^{OD} &= \theta_{gu,n2}^{OD} + H_{n2OD} g_{n2}^{OD} \\ &= x \left(\theta_{su,h}^{ON} - \frac{1}{8} \Delta\theta_h^{ON} + \frac{1}{4} \Delta\theta_{n2}^{ON} \right) + H_{n2OD} \left(x \left(\frac{1}{4} \right)^{0,46} \cdot g_{ns2}^{ON} + x g_{np2}^{ON} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Заменом бројних вредности и изједначавањем вредности пораста температуре најтоплије тачке са вредностима пораста температуре најтоплије тачке топлијег намотаја за случај ONAF хлађења (први намотај) добијају се следеће две једначине:

$$76,8 = 44,25x + 1,18(8,46 + 3)x \quad (6.20)$$

$$76,8 = 43,5x + 1,1(7,66 + 6)x \quad (6.21)$$

Решење прве једначине је $x = 1,3293$, а решење друге је $x = 1,3122$. Видимо да је критичан други намотај тј. он ће при ODAF хлађењу пре достићи вредност пораста температуре најтоплије тачке топлијег намотаја коју при ONAF хлађењу (и то при снази губитака која је око 31% већа).

Овде се завршава решење задатка (остатак је информативног карактера).

Сада је могуће прерачунати све порасте температуре за случај ODAF хлађења:

$$\Delta\theta_{n1}^{OD} = 7,92\text{K}$$

$$\Delta\theta_{n2}^{OD} = 6,93\text{K}$$

$$\Delta\theta_h^{OD} = 7,26\text{K}$$

$$\theta_{du}^{OD} = 50,49\text{K}$$

$$\theta_{gu,n1}^{OD} = \theta_{du}^{OD} + \Delta\theta_{n1}^{OD} = 58,41\text{K}$$

$$\theta_{gu,n2}^{OD} = \theta_{du}^{OD} + \Delta\theta_{n2}^{OD} = 57,42\text{K}$$

$$g_{np1}^{OD} = 3,96\text{K}$$

$$g_{np2}^{OD} = 7,92\text{K}$$

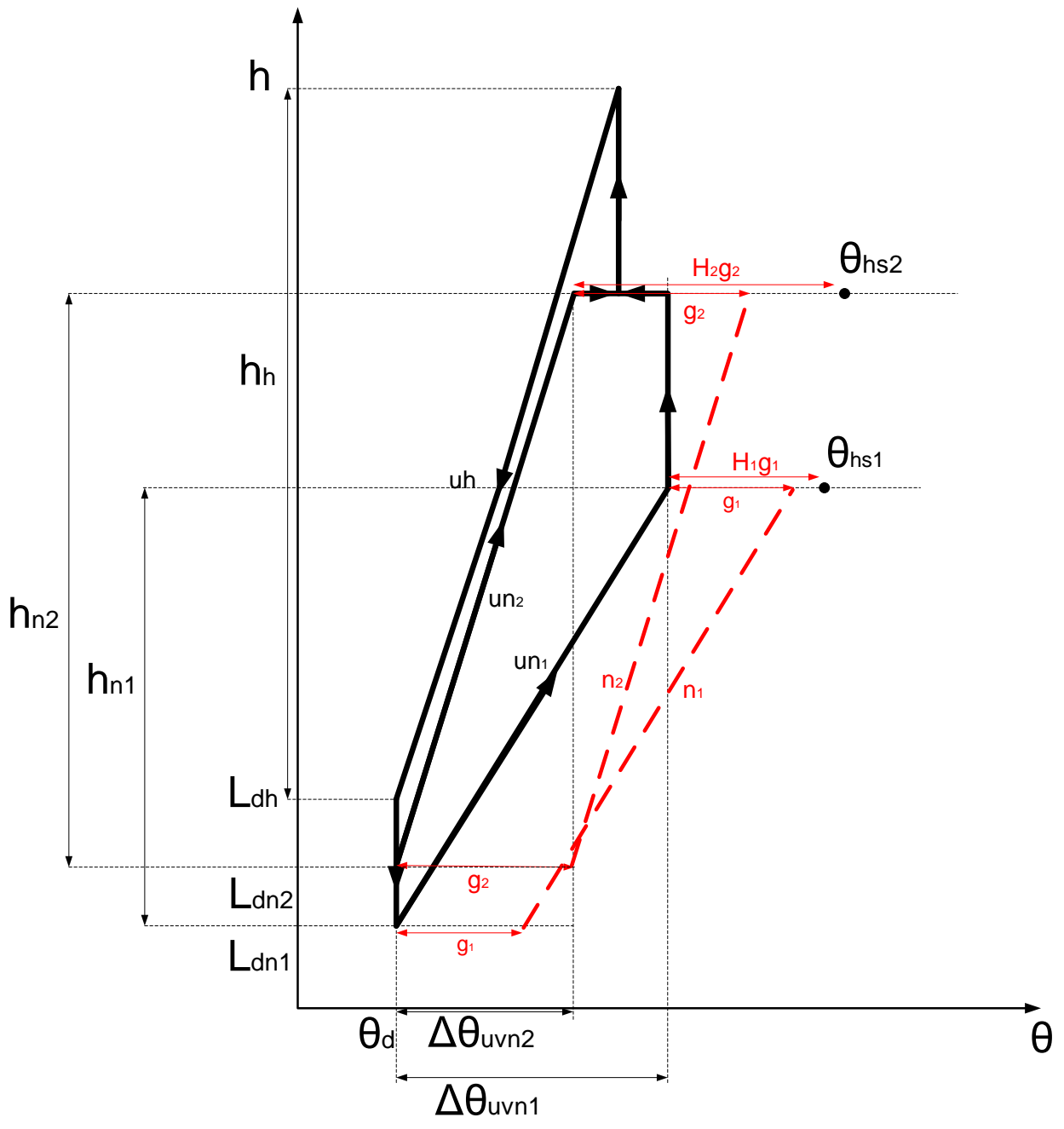
$$g_{ns1}^{OD} = 11,1\text{K}$$

$$g_{ns2}^{OD} = 10,05\text{K}$$

$$g_{n1}^{OD} = 15,06\text{K}$$

$$g_{n2}^{OD} = 17,97\text{K}$$

$$\theta_{hs1}^{OD} = \theta_{gu,n1}^{OD} + H_{n1OD} g_{n1}^{OD} = 76,18\text{K}$$



Слика 6.1

ЗАДАТАК 7

Полазећи од познатог дијаграма расподеле температуре уља по висини трансформатора са ODAF хлађењем када се он хлади помоћу 5 хладњака (укључене пумпе и вентилатори на 5 хладњака, када укупни проток уља износи $150 \text{ m}^3/\text{h}$), нацртати дијаграм расподеле температуре уља када се укључи још један (шести) хладњак (са својим пумпама и вентилаторима). Сматрати да су губици при радном режиму са 5 и са 6 хладњака исти. Усвојити следеће апроксимације и претпоставке: а) да при раду 5 хладњака од укупног притиска који произведе пумпа 80 % "отпадне" на пад притиска у хладњаку, а 20 % на пад притиска у активном делу трансформатора, б) да пад притиска на хладњаку и пад притиска у активном делу трансформатора расту линеарно са порастом протока, при чему се константе пропорционалности пада притиска разликују, в) да је снага преноса топлоте преко хладњака при константном протоку сразмерна порасту средње температуре уља у односу на амбијент, г) да се физичке карактеристике уља занемарљиво мало мењају у радном режиму хлађења са 5 и са 6 хладњака. Зависност произведеног притиска пумпе p_p (у Pa) у функцији протока уља Q (у m^3/h) гласи: $p_p = 530,2 - 0,903 \cdot Q - 0,1895 \cdot Q^2 - 0,00071164 \cdot Q^3$.

Решење

Порасте температура уља у односу на амбијент при раду 5 хладњака су (познате вредности):

- горње уље - θ_{gu5} ,
- средње уље - θ_{su5} ,
- доње уље - θ_{du5} ,

Ако је снага губитака у трансформатору једнака P_g , онда је снага хлађења по једном хладњаку једнака:

- у случају када ради 5 хладњака: $Ph = P_g/5$
- у случају када ради 6 хладњака: $Ph = P_g/6$

На основу претпоставке в) важи:

$$\theta_{su5} = c \cdot \frac{P_g}{5} \quad (7.1)$$

$$\theta_{su6} = c \cdot \frac{P_g}{6} \quad (7.2)$$

Из израза (7.1) могуће је изразити вредност константе c преко температуре средњег уља и снаге губитака. Заменом овог израза у (7.2) добија се:

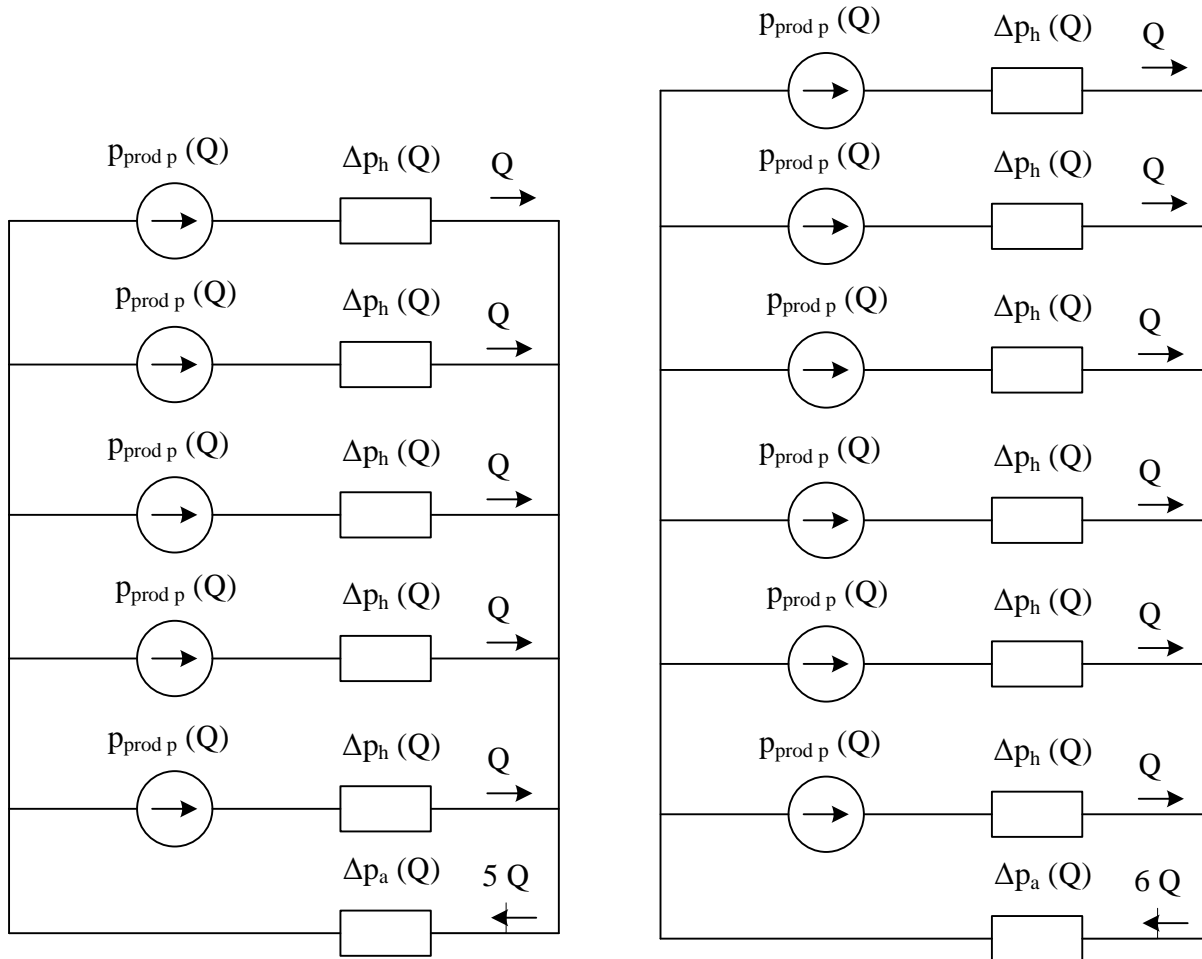
$$\theta_{su6} = \frac{\theta_{su5}}{P_g/5} \cdot \frac{P_g}{6} = \frac{5}{6} \theta_{su5} \quad (7.3)$$

Порасте температуре горњег и доњег уља у случају када раде 6 хладњака једнаки су:

$$\theta_{gu6} = \theta_{su6} + \frac{\Delta\theta_{u6}}{2} \quad (7.4)$$

$$\theta_{du6} = \theta_{su6} - \frac{\Delta\theta_{u6}}{2} \quad (7.5)$$

Дакле, како би се одредили порасте температура горњег и доњег уља, потребно је наћи вредност вертикалног градијента температуре уља $\Delta\theta_{u6}$. На слици 7.1 приказане су хидрауличне шеме за случајеве са 5 и са 6 хладњака у погону.



Слика 7.1

У случају када ради 5 хладњака, свака пумпа ствара притисак:

$$p_p \left(Q = \frac{150}{5} m^3/h \right) = 530,2 - 0,903 \cdot Q - 0,1895Q^2 - 0,00071164Q^3 = 313,346 Pa \quad (7.6)$$

На основу апроксимације а) закључује се да важи:

$$\Delta p_{hladnjak} = 0,8 \cdot p_p \left(Q = \frac{150}{5} m^3/h \right) = 265,077 Pa \quad (7.7)$$

$$\Delta p_{akt.deo} = 0,2 \cdot p_p \left(Q = \frac{150}{5} m^3/h \right) = 66,269 Pa \quad (7.8)$$

По претпоставци б), пад притиска на хладњаку и пад притиска у активном делу трансформатора расту линеарно са порастом протока, при чему се константе пропорционалности пада притиска разликују:

$$C_{hladnjak} = \frac{\Delta p_{hladnjak}}{30 \text{ m}^3/h} = 8,8359 \frac{Pa}{\text{m}^3/h} \quad (7.9)$$

$$C_{akt.deo} = \frac{\Delta p_{akt.deo}}{150 \text{ m}^3/h} = 0,4418 \frac{Pa}{\text{m}^3/h} \quad (7.10)$$

У случају када је 6 хладњака у погону, притисак који ствара свака пумпа може се одредити на основу израза датог у тексту задатка и као збир падова притисака на хладњаку и активном делу. Изједначавањем ова два израза добија се следећа једначина:

$$\begin{aligned} p_p(Q = Q_6) &= 530,2 - 0,903 \cdot Q - 0,1895Q^2 - 0,00071164Q^3 \\ &= C_{hladnjak} \cdot Q_6 + C_{akt.deo} \cdot 6 \cdot Q_6 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Решавањем једначине (7.11) добија се вредност протока кроз сваку пумпу $Q_6 = 28,768 \text{ m}^3/h$.

Расхладна снага хладњака се може прорачунати као:

$$P_h = \rho Q c_p \Delta \theta_u \quad (7.12)$$

Израз (7.12) се у случају када ради 5/6 хладњака може записати као:

$$\frac{P_g}{5} = \rho Q_5 c_p \Delta \theta_{u5} \quad (7.13)$$

$$\frac{P_g}{6} = \rho Q_6 c_p \Delta \theta_{u6} \quad (7.14)$$

Изражавањем снаге губитака из једначине (7.13) и заменом у једначину (7.14) добија се једначина чије је решење вредност вертикалног градијента температуре уља:

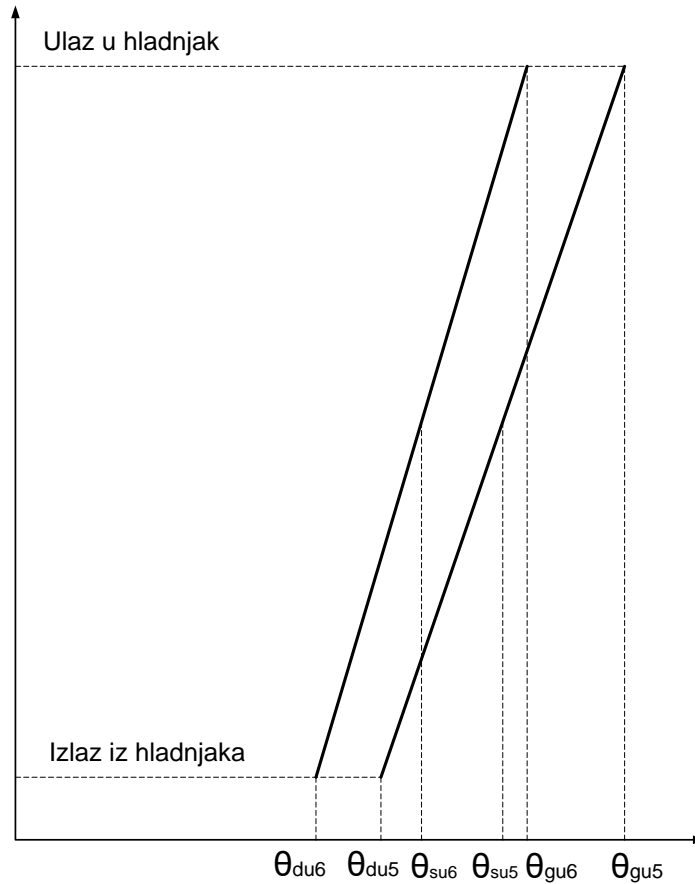
$$\Delta \theta_{u6} = \frac{5 Q_5}{6 Q_6} \Delta \theta_{u5} = \frac{5 \cdot 30}{6 \cdot 28,768} \Delta \theta_{u5} = 0,869 \cdot \Delta \theta_{u5} = 0,869 \cdot (\theta_{gu5} - \theta_{du5}) \quad (7.15)$$

Комбиновањем израза (7.4) и (7.5) са (7.3) и (7.15) добијају се пораст температуре горњег и доњег уља у случају када раде 6 хладњака:

$$\theta_{gu6} = \frac{5}{6} \theta_{su5} + \frac{0,869 \cdot (\theta_{gu5} - \theta_{du5})}{2} \quad (7.16)$$

$$\theta_{du6} = \frac{5}{6} \theta_{su5} - \frac{0,869 \cdot (\theta_{gu5} - \theta_{du5})}{2} \quad (7.17)$$

Графици промене температура по висини су приказан на слици 7.2.

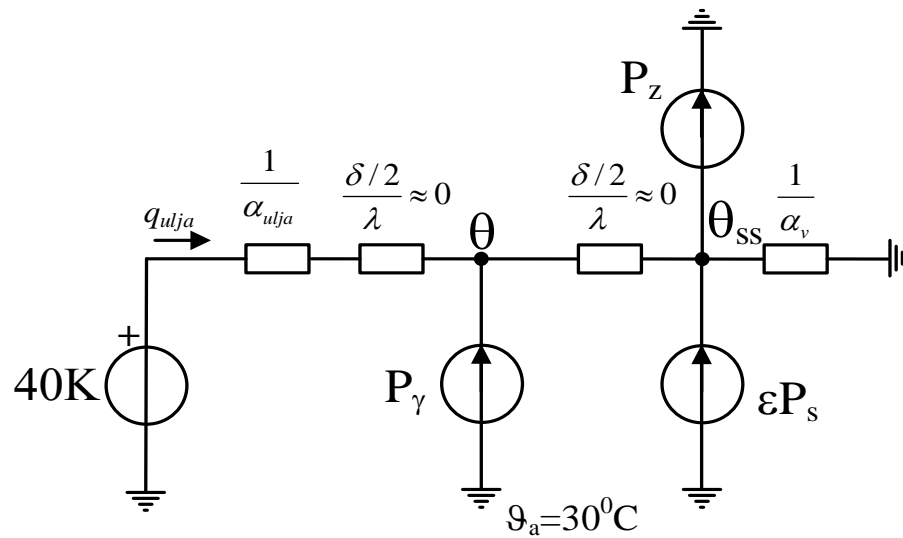


Слика 7.2

ЗАДАТАК 8

Зид суда енергетског уљног трансформатора се загрева услед расутог флукса. Температура уља износи 70°C , температура амбијента 30°C . Коефицијент размене топлоте струјањем између уља и површ суда износи $65 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$, а између површи суда и ваздуха $7 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$. Коефицијент сивоће површи суда износи $0,8$. Која је гранична вредност површинске густине снаге загревања услед расутог флукса при којој се уље хлади преко површи зида суда? Ову вредност одредити за два случаја: у току ноћи и у току дана при површинској густини снаге сунчевог зрачења која пада на површ суда од $500 \text{ W}/\text{m}^2$. Компонента размене енергије зрачењем на унутрашњој страни зида се може занемарити.

Решење



Слика 8.1

На слици 8.1 је приказана заменска шема са концентрисаним параметрима којим се моделују топлотни процеси у зиду суда трансформатора и на његовој површини. У граничном случају, уље се неће ни хладити ни загревати преко зида суда, односно површинска густина снаге којом уље размењује енергију са зидом суда биће једнака нули.

$$q_{ulja} = 0 \quad (8.1)$$

Пораст температуре суда у односу на амбијент се може израчунати као:

$$\theta = \theta_{ulja} + \left(\frac{1}{\alpha_{ulja}} + \frac{\delta/2}{\lambda} \right) \cdot q_{ulja} \quad (8.2)$$

Из (8.1) и (8.2) следи:

$$\theta = \theta_{ulja} = 40 \text{ K} \quad (8.3)$$

За пораст температуре спољашње површи суда се може написати:

$$\theta_{ss} = \frac{1}{\alpha_v} \cdot (P_\gamma + \varepsilon \cdot P_s - P_z) \quad (8.4)$$

$$\theta_{ss} = \theta - \frac{\delta/2}{\lambda} \cdot P_\gamma \approx \theta \quad (8.5)$$

Заменом θ_{ss} из једначине (8.5) у једначину (8.4) се добија:

$$P_\gamma = \alpha_v \cdot \theta - \varepsilon \cdot P_s + P_z \quad (8.6)$$

Површинска густина снаге која се зрачењем размењује са амбијентом се може одредити на следећи начин:

$$P_z = \varepsilon \cdot \sigma_c \left((273.15 + \vartheta_a + \theta_{ss})^4 - (273.15 + \vartheta_a)^4 \right) \quad (8.7)$$

Заменом (8.7) у (8.6) добија се:

$$P_{\gamma} = \alpha_v \cdot \theta - \varepsilon \cdot P_s + \varepsilon \cdot \sigma_c ((273.15 + \vartheta_a + \theta)^4 - (273.15 + \vartheta_a)^4) \quad (8.8)$$

Заменом бројних вредности се добија у току дана:

$$P_{\gamma} = 125,51 \text{ W/m}^2 \quad (8.9)$$

а у току ноћи:

$$P_{\gamma} = 525,51 \text{ W/m}^2 \quad (8.10)$$

При површинским густинама снаге губитака услед расутог флукса већим од горе наведених, уље ће се грејати преко зида суда уместо да се хлади, што је изузетно лоше јер се систем предвиђен за хлађење активних делова трансформатора понаша супротно жељеном. Критичнији је дневни период због присуства сунчевог зрачења које загрева спољну површ суда трансформатора.

ЗАДАТАК 9

Подаци о дистрибутивном енергетском уљном трансформатору: однос номиналних губитака услед оптерећења (у намотајима) и номиналних губитака у празном ходу (у језгру) $P_{Cun}/P_{Fen} = 5$, номинални пораст температуре горњег уља $\theta_{gun} = 55 \text{ K}$, пораст средње температуре намотаја у односу на средњу температуру уља $g_n = 20 \text{ K}$, фактор најтоплије тачке $H = 1,1$, временска константа по којој се приближно може рачунати временски ток промене температуре горњег уља 3 сата. Однос пораста температуре горњег уља и његове номиналне вредности (θ_{gu}/θ_{gun}) је једнак количнику губитака и номиналних губитака (P_{gu}/P_{gun}) степенованом на 0,8. Идентична зависност важи и за разлику средње температуре намотаја и средње температуре уља (g/g_n), при чему је релевантан однос губитака у намотајима (P_{Cu}/P_{Cun}). Колико износи константно максимално оптерећење у трајању од једног сата ако су по укључењу трансформатора који се налази на температури -20°C , граничне вредности за оптерећење трансформатора у оваквом нужном случају: максимално релативно струјно оптерећење 1,8, максимална температура најтоплије тачке 150°C и највиша температура горњег уља 115°C ?

Решење

Према поставци задатка, за однос разлике средњих температура намотаја и уља у стационарном стању и номиналне разлике средњих температура намотаја и уља важи релација:

$$\frac{g}{g_n} = \left(\frac{P_{Cu}}{P_{Cun}} \right)^{0,8} \quad (9.1)$$

Уколико је релативно струјно оптерећење трансформатора означено са β , тада важи следећа релација:

$$P_{Cu} = \beta^2 \cdot P_{Cun} \quad (9.2)$$

Заменом (9.2) у једначину (9.1) добија се:

$$\frac{g}{g_n} = \beta^{1,6} \quad (9.3)$$

$$g = \beta^{1,6} \cdot g_n \quad (9.4)$$

За однос пораста температуре горњег уља у стационарном стању и номиналног пораста температуре горњег уља, према условима задатка, важи релација:

$$\frac{\theta_{gu}}{\theta_{gun}} = \left(\frac{P_{Cu} + P_{Fen}}{P_{Cun} + P_{Fen}} \right)^{0,8} \quad (9.5)$$

Заменом једначине (9.2) у једначину (9.5) и уважавајући однос $P_{Cun}/P_{Fen} = 5$, добија се:

$$\frac{\theta_{gu}}{\theta_{gun}} = \left(\frac{\beta^2 \cdot P_{Cun} + \frac{1}{5} \cdot P_{Cun}}{P_{Cun} + \frac{1}{5} \cdot P_{Cun}} \right)^{0,8} \quad (9.6)$$

$$\frac{\theta_{gu}}{\theta_{gun}} = \left(\frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0,8} \quad (9.7)$$

Временска промена пораста температуре горњег уља се може апроксимативно приказати експоненцијалним функцијама, иако оне не описују тачан временски облик те промене, обзиром да је систем нелинеаран, што се огледа пре свега у зависности коефицијента преласка топлоте струјањем на ваздух од пораста температуре уља.

За сваки од критеријума датих у поставци задатка, може се израчунати критично релативно струјно оптерећење трансформатора при коме се достижу дозвољени пораст карактеристичних температура.

Стварно критично струјно оптерећење једнако је минималној вредности добијеној при анализи свих критеријума.

Прво ће се израчунати релативно струјно оптерећење при коме температура горњег уља достиже максималну дозвољену вредност. Промена температуре горњег уља дата је са:

$$\vartheta_{gu}(t) = \vartheta_a + \theta_{gu}(t) \quad (9.8)$$

где је ϑ_a температура амбијента. Одговарајућа временска промена пораста температуре горњег уља при скоковитој промени оптерећења је:

$$\theta_{gu}(t) = \theta_{gu}(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_u}} + \theta_{gu} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_u}} \right) \quad (9.9)$$

где је τ_u термичка временска константа за уље, а θ_{gu} је пораст температуре горњег уља у стационарном стању. Заменом (9.7) у (9.9) и имајући у виду да је почетна вредност пораста температуре горњег уља једнака нули (трансформатор је довољно дуго био искључен) се добија:

$$\theta_{gu}(t) = \theta_{gun} \cdot \left(\frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0,8} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_u}} \right) \quad (9.10)$$

Након 1h од укључења, при критичном релативном струјном оптерећењу, достиже се максимална дозвољена температура горњег уља:

$$\vartheta_{gu}(1h) = \vartheta_{gumax} \quad (9.11)$$

Заменом (9.10) и (9.8) у (9.11) се добија једначина из које се може израчунати критично струјно оптерећење:

$$\vartheta_{gumax} = \vartheta_{gu}(1h) = \vartheta_a + \theta_{gun} \cdot \left(\frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0,8} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1h}{\tau_u}} \right) \quad (9.12)$$

одакле се добија

$$\beta = 4,198 \quad (9.13)$$

При разматрању температуре најтоплије тачке, уводе се следеће апроксимације. Пошто је временска константа која описује промене пораста температуре намотаја у односу на уље неколико пута мања од периода који се посматра, сматра се да је након 1h већ успостављена стационарна вредност промене пораста температуре намотаја у односу на уље.

$$g(1h) = g \quad (9.14)$$

Температура најтоплије тачке се израчунава према формули:

$$\vartheta_{hs}(t) = \vartheta_a + \theta_{gu}(t) + H \cdot g(t) \quad (9.15)$$

$$\vartheta_{hs}(t) = \vartheta_a + \theta_{gun} \cdot \left(\frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0,8} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_u}} \right) + H \cdot \beta^{1,6} \cdot g_n \quad (9.16)$$

$$\vartheta_{gumax} = \vartheta_{hs}(1h) = \vartheta_a + \theta_{gun} \cdot \left(\frac{5 \cdot \beta^2 + 1}{6} \right)^{0,8} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1h}{\tau_u}} \right) + H \cdot \beta^{1,6} \cdot g_n \quad (9.17)$$

из чега се израчунава

$$\beta = 2,648 \quad (9.18)$$

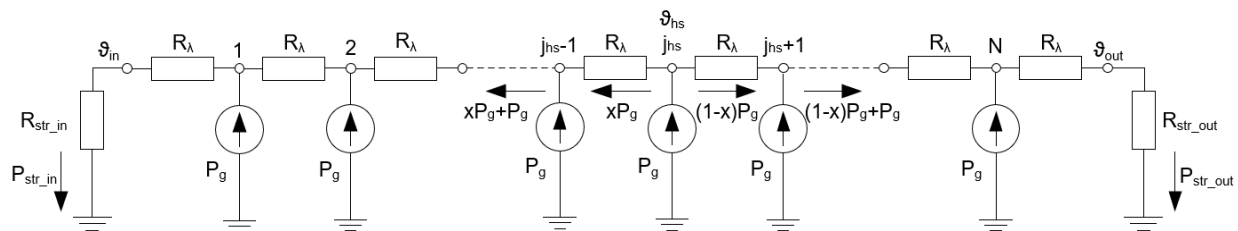
На основу израза (9.14) и (9.18), као и вредности максималног дозвољеног релативног струјног оптерећења, закључује се је критичан услов да струјно оптерећење не сме да пређе вредност 1,8.

ЗАДАТАК 10

Изрaчунати најтоплију тачку намотаја сувог електроенергетског трансформатора који се хлади ваздухом температуре 20°C , симетрично на унутрашњој и спољној површи, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем са површи на ваздух износи $\alpha_k = 6 \text{ W/m}^2\text{K}$. Висина намотаја је $H = 0,75 \text{ m}$, а унутрашњи пречник $D_u = 363 \text{ mm}$. Намотај је фолијског типа и има $N = 119$ навојака, сваки висине једнаке висини намотаја; дебљина изолације између навојака износи $\delta_i = 0,046 \text{ mm}$, специфична топлотна проводност изолације $\lambda_i = 0,15 \text{ W/mK}$, ширина проводника (алуминијум) $\delta_{Al} = 0,2 \text{ mm}$. Губици у једном навојку износе $P_g = 10 \text{ W}$. При решавању задатка сматрати да је отпор преносу топлоте провођењем кроз слојеве изолације исти, односно израчунавати га као отпор провођењу топлоте кроз раван зид површине $(\pi \cdot (D_u + N \cdot \delta_{Al} + (N + 1) \cdot \delta_i)) \cdot H$ и дебљине δ_i . Сматрати и да су отпори преласку топлоте струјањем на унутрашњој и спољашњој површи намотаја исти. Слој изолације постоји и на унутрашњој страни крајњег унутрашњег навојка и на спољној страни крајњег спољашњег навојка. Збир првих n чланова аритметичког реда (први елемент реда a_1 , разлика два суседна члана реда d) износи $n a_1 + (n(n - 1))/2 d$.

Решење

Општа шема, која важи за несиметричне услове хлађења приказана је на слици 10.1:



Слика 10.1

У условима симетричног хлађења важи: $\vartheta_{in} = \vartheta_{out}$ и $j_{hs} = 60$.

Кроз сваку од граничних површи енергија се преноси према ваздуху снагом:

$$P_{\alpha} = P_{str,in} = P_{str,out} = 59,5 \cdot 10 \text{ W} = 595 \text{ W} \quad (10.1)$$

Површ меродавна за израчунавање топлотних отпора преносу топлоте провођењем и струјањем износи:

$$S = \pi \cdot D_{sr} \cdot H = \pi \cdot (D_u + N \cdot \delta_{Al} + (N + 1) \cdot \delta_i) \cdot H = 0,9244 \text{ m}^2 \quad (10.2)$$

Топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз један слој изолације износи:

$$R_{\lambda} = \frac{1}{\lambda_i S} = \frac{1}{0,15 \cdot 0,9241} = 0,33175 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{W}} \quad (10.3)$$

Топлотни отпор преносу топлоте струјањем износи:

$$R_{\alpha} = R_{str,in} = R_{str,out} = \frac{1}{\alpha S} = \frac{1}{6 \cdot 0,9244} = 180,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{W}} \quad (10.4)$$

Температура граничних површи износи:

$$\vartheta_{in} = \vartheta_{out} = 20^{\circ}\text{C} + P_{\alpha} \cdot R_{\alpha} = 20^{\circ}\text{C} + 595 \cdot 180,3 \cdot 10^{-3} = 127,3^{\circ}\text{C} \quad (10.5)$$

На основу топлотне шеме, и узимајући у обзир симетрију (најтоплији је 60-ти навојак и половина снаге губитака у њему се преноси ка унутрашњој, а половина ка спољашњој површи намотаја; коефицијент x који се појављује у наредним изразима има вредност 0,5) могу се написати следећи изрази:

$$\vartheta_{hs} - \vartheta_{in} = \sum_{i=1}^{j_{hs}} R_{\lambda} P_i \quad (10.6)$$

На основу еквивалентне шеме се могу дефинисати снаге преноса топлоте на свакој од деоница (P_i), после чега претходни израз постаје:

$$\vartheta_{hs} - \vartheta_{in} = R_{\lambda} \left(xP_g + (xP_g + P_g) + (xP_g + 2P_g) + \dots + (xP_g + (j_{hs} - 1)P_g) \right) \quad (10.7)$$

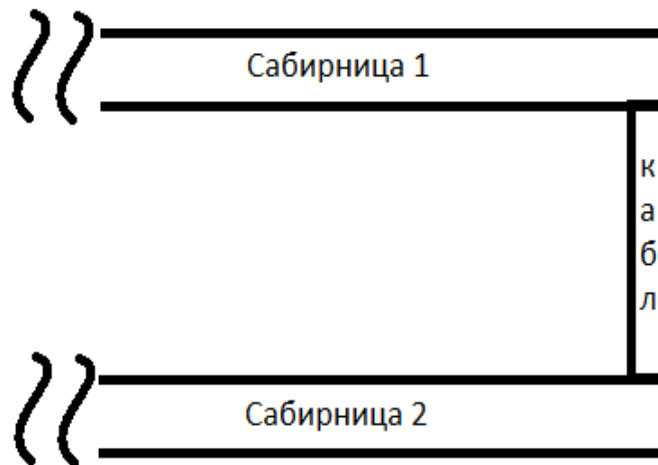
Односно

$$\vartheta_{hs} = \vartheta_{in} + R_{\lambda} \left(xj_{hs}P_g + P_g \sum_{i=1}^{j_{hs}-1} i \right) \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_{hs} = \vartheta_{in} + R_{\lambda} P_g \left(xj_{hs} + \frac{j_{hs}(j_{hs} - 1)}{2} \right) &= 127,3 + 0,33175 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot \left(0,5 \cdot 60 \right. \\ &\left. + \frac{59 \cdot 60}{2} \right) = 133,3^{\circ}\text{C} \end{aligned} \quad (10.9)$$

ЗАДАТАК 11

Одредити температуру најтоплије тачке система са слике 11.1 кога чине две идентичне бесконачно дугачке бакарне сабирнице пресека $S_s = (20 \times 5) \text{ mm}^2$ спојене каблом дужине $L_k = 20 \text{ cm}$, попречног пресека бакара $S_k = 50 \text{ mm}^2$, са изолацијом дебљине $\delta_{iz} = 1,5 \text{ mm}$, топлотне проводности $\lambda_{iz} = 0,2 \text{ W/mK}$. Читав систем се хлади природним струјањем ваздуха температуре $\vartheta_a = 20^{\circ}\text{C}$, при чему је коефицијент преласка топлоте струјањем са загрејане површи на ваздух $\alpha = 5 \text{ W/m}^2\text{K}$. Кроз сабирнице и кабл тече једносмерна струја $I_{DC} = 200 \text{ A}$. Специфична електрична отпорност бакара је $\rho_{Cu,el} = 1,68 \cdot 10^{-8} \text{ }\Omega\text{m}$, а топлотна проводност $\lambda_{Cu} = 401 \text{ W/mK}$.

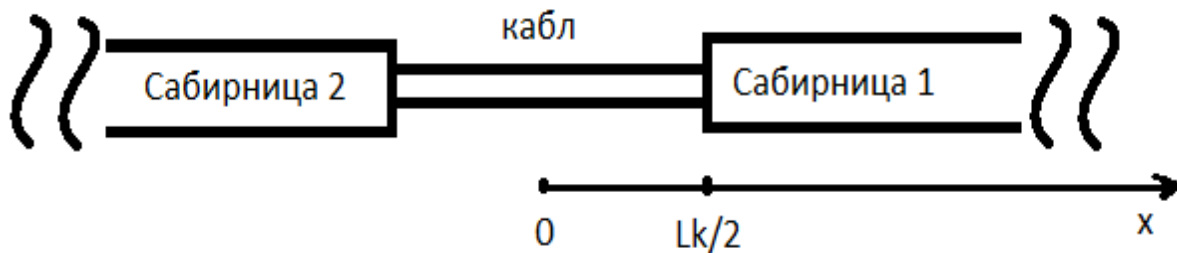


Слика 11.1

Решење

На основу симетрије система, може се закључити да је најтоплија тачка на средини кабла који има лошије услове хлађења у односу на сабирнице из разлога мањег попречног пресека и постојања слоја изолације.

У циљу једноставнијег решавања задатка и свођења на једнодимензиони проблем сабирнице и кабл ће се поставити дуж x -осе (слика 11.2), при чему се почетак осе поставља у раван симетрије, тј. на координату средине кабла. Тачка споја кабла и сабирнице је на координати $x = L_k/2$.



Слика 11.2

У том случају се претпоставља да у тачкама споја два елемента различитих попречних пресека (сабирнице и кабла) сва подужна снага која провођењем крене са једног елемента, доспе у потпуности на други елемент.

Посматра се устаљено стање и за њега се пишу температурне диференцијалне једначине за сваки елемент (кабл и сабирнице).

У случају кабла, поред снаге генерисања топлоте (Џулови губици услед протицања струје), постоји и снага одвођења топлоте која има два члана. Први се односи на провођење топлоте

кроз бакар дуж x -осе, а други на одвођење топлоте најпре провођењем кроз изолацију, па потом струјањем са слоја изолације на околину.

У случају сабирница, једина разлика је што се, услед одсуства слоја изолације, топлота одводи струјањем ваздуха ка амбијенту са саме површине бакарних сабирница.

Пречник бакарног проводника кабла износи:

$$d_k = \sqrt{\frac{4 \cdot S_k}{\pi}} = 7,979 \text{ mm} \quad (11.1)$$

а обим и површина спољашње површи кабла су:

$$O_k = (d_k + 2\delta_{iz})\pi = 0,034 \text{ m} \quad (11.2)$$

$$S_{ok} = O_k \cdot L_k = 6,898 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (11.3)$$

Површина попречног пресека и обим бакарне сабирнице су:

$$S_s = a \cdot b = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \quad (11.4)$$

$$O_s = 2 \cdot (a + b) = 0,05 \text{ m} \quad (11.5)$$

Подужне снаге генерисања топлоте (Џулових губитака) у сабирници и каблу су:

$$P_{\gamma,s} = \frac{\rho_{Cu,el} \cdot I_{DC}^2}{S_s} = 6,72 \text{ W/m} \quad (11.6)$$

$$P_{\gamma,k} = \frac{\rho_{Cu,el} \cdot I_{DC}^2}{S_k} = 13,44 \text{ W/m} \quad (11.7)$$

Подужне вредности топлотних отпора преносу топлоте провођењем кроз изолацију и струјањем са површине изолације кабла/површине сабирнице:

$$R_{prov,iz} = \frac{1}{2 \cdot \lambda_{iz} \cdot \pi} \ln\left(\frac{d_k + 2\delta_{iz}}{d_k}\right) = 0,254 \frac{\text{Km}}{\text{W}} \quad (11.8)$$

$$R_{str,k} = \frac{1}{\alpha \cdot O_k} = 5,799 \frac{\text{Km}}{\text{W}} \quad (11.9)$$

$$R_{str,s} = \frac{1}{\alpha \cdot O_s} = 4 \frac{\text{Km}}{\text{W}} \quad (11.10)$$

Укупне вредности подужних топлотних отпорности су:

$$R_k = R_{prov,iz} + R_{str,k} = 6,053 \frac{\text{Km}}{\text{W}} \quad (11.11)$$

$$R_s = R_{str,s} = 4 \frac{\text{Km}}{\text{W}} \quad (11.12)$$

Диференцијална температурна једначина за кабл:

$$\lambda_{Cu} \cdot S_k \cdot \frac{d^2 \vartheta_k(x)}{dx^2} + P_{\gamma,k} - \frac{\vartheta_k(x) - \vartheta_a}{R_k} = 0 \quad (11.13)$$

$$\frac{d^2\vartheta_k(x)}{dx^2} - q_k \cdot \vartheta_k(x) + p_k = 0 \quad (11.14)$$

где је:

$$q_k = \frac{1}{\lambda_{Cu} \cdot S_k \cdot R_k} = 8,24 \frac{1}{m^2} \quad (11.15)$$

$$p_k = \frac{P_{\gamma,k}}{\lambda_{Cu} \cdot S_k} + \frac{\vartheta_a}{\lambda_{Cu} \cdot S_k \cdot R_k} = 835,131 \frac{K}{m^2} \quad (11.16)$$

Диференцијална температурна једначина за сабирницу:

$$\lambda_{Cu} \cdot S_s \cdot \frac{d^2\vartheta_s(x)}{dx^2} + P_{\gamma,s} - \frac{\vartheta_s(x) - \vartheta_a}{R_s} = 0 \quad (11.17)$$

$$\frac{d^2\vartheta_s(x)}{dx^2} - q_s \cdot \vartheta_s(x) + p_s = 0 \quad (11.18)$$

где је:

$$q_s = \frac{1}{\lambda_{Cu} \cdot S_s \cdot R_s} = 6,234 \frac{1}{m^2} \quad (11.19)$$

$$p_s = \frac{P_{\gamma,s}}{\lambda_{Cu} \cdot S_s} + \frac{\vartheta_a}{\lambda_{Cu} \cdot S_s \cdot R_s} = 292,269 \frac{K}{m^2} \quad (11.20)$$

Решавањем диференцијалних једначина (11.14) и (11.18) добијају се изрази за промену температуре кабла и сабирнице са променом координате x :

$$\vartheta_k(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{q_k} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{q_k} \cdot x} + \frac{p_k}{q_k} \quad (11.21)$$

$$\vartheta_s(x) = C_3 \cdot e^{\sqrt{q_s} \cdot x} + C_4 \cdot e^{-\sqrt{q_s} \cdot x} + \frac{p_s}{q_s} \quad (11.22)$$

Вредности интеграционе константе $C_3 = 0$ добија се из услова да нема преноса топлоте провођењем кроз бакар када x координата тежи бесконачности:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d\vartheta_s(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow \infty} (C_3 \cdot \sqrt{q_s} \cdot e^{\sqrt{q_s} \cdot x} - C_4 \cdot \sqrt{q_s} \cdot e^{-\sqrt{q_s} \cdot x}) = 0 \quad (11.23)$$

Преостале три интеграционе константе C_1 , C_2 и C_4 се добијају из граничних услова:

1. На споју сабирнице и кабла ($x = L_k/2$) сва подужна снага са сабирнице се преноси на кабл:

$$-\lambda_{Cu} \cdot S_k \cdot \left(\frac{d\vartheta_k}{dx} \right)_{x=(\frac{L_k}{2})_-} = -\lambda_{Cu} \cdot S_s \cdot \left(\frac{d\vartheta_s}{dx} \right)_{x=(\frac{L_k}{2})_+} \quad (11.24)$$

2. Температуре бабра са леве и десне стране граничне површи на споју кабла и сабирнице су једнаке:

$$\vartheta_k \left(x = \left(\frac{L_k}{2} \right)_- \right) = \vartheta_s \left(x = \left(\frac{L_k}{2} \right)_+ \right) \quad (11.25)$$

3. На средини кабла тј. на координати $x = 0$ се налази најтоплија тачка проводника, па се стога подужна снага генерисања топлоте на тој координати одводи ка крајевима кабла, тј. у супротним смеровима:

$$-\lambda_{Cu} \cdot S_k \cdot \left(\frac{d\vartheta_k}{dx} \right)_{x=0} = 0 \quad (11.26)$$

Решавањем система од три једначине са три непознате добијају се вредности интеграционих константи: $C_1 = -22,53$ $C_2 = 22,53$ и $C_4 = 9,676$.

Тражена вредност највише температуре, односно температура на средини кабла је:

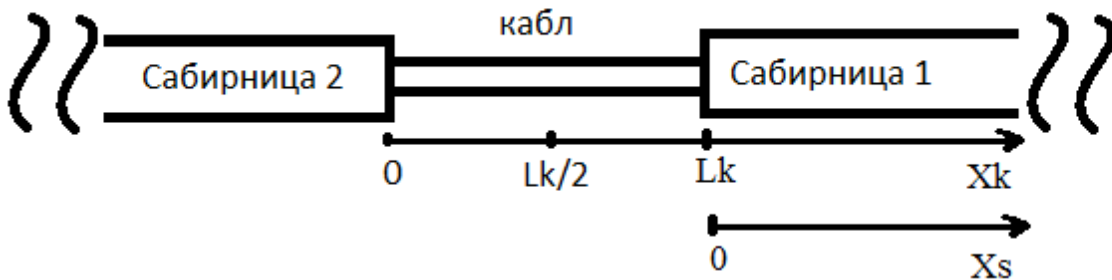
$$\vartheta_k(x = 0) = 56,287^\circ\text{C} \quad (11.27)$$

Као провера могу се одредити и температуре на споју кабла и сабирнице (треба да буду једнаке):

$$\vartheta_k(x = \left(\frac{L_k}{2}\right)_-) = 54,418^\circ\text{C} \quad (11.28)$$

$$\vartheta_s(x = \left(\frac{L_k}{2}\right)_+) = 54,418^\circ\text{C} \quad (11.29)$$

Други начин решавања задатка је могућ ако се кабл и сабирница посматрају у одвојеним координатним системима, као на слици 11.3.



Слика 11.3

У овом случају би поступак решавања задатка био потпуно исти као и у случају са једним координатним системом, све до тренутка када треба написати граничне услове. Нови гранични услови су:

1. На споју сабирнице и кабла ($x = L_k/2$) сва подужна снага са сабирнице се преноси на кабл:

$$-\lambda_{Cu} \cdot S_k \cdot \left(\frac{d\vartheta_k}{dx} \right)_{x=(L_k)_-} = -\lambda_{Cu} \cdot S_s \cdot \left(\frac{d\vartheta_s}{dx} \right)_{x=0_+} \quad (11.30)$$

2. Температуре бабра са леве и десне стране граничне површи на споју кабла и сабирнице су једнаке:

$$\vartheta_k(x = (L_k)_-) = \vartheta_s(x = 0_+) \quad (11.31)$$

3. На средини кабла тј. на координати $x = 0$ се налази најтоплија тачка проводника, па се стога подужна снага генерисања топлоте на тој координати одводи ка крајевима кабла, тј. у супротним смеровима:

$$-\lambda_{Cu} \cdot S_k \cdot \left(\frac{d\vartheta_k}{dx} \right)_{x=\frac{L_k}{2}} = 0 \quad (11.32)$$

Решавањем система од три једначине са три непознате добијају се вредности интеграционих константи: $C_1 = -16,908$ $C_2 = 30,021$ и $C_4 = 7,538$. Константа C_3 је и сада једнака нули.

Тражена вредност највише температуре, односно температура на средини кабла је:

$$\vartheta_k \left(x = \frac{L_k}{2} \right) = 56,287^\circ\text{C} \quad (11.33)$$