



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

Катедра за енергетске претвараче и погоне

Термички процеси у електроенергетици

**Материјали за рачунске вежбе
(Први колоквијум)**

Новембар 2020.

ЗАДАТАК 1

Површина равне плоче ширине $w = 1 \text{ m}$ се одржава на константној температури $\vartheta_p = 230^\circ\text{C}$, користећи независно контролисане тракасте електричне грејаче, од којих је сваки $L = 50 \text{ mm}$ дугачак. Преко плоче струји ваздух температуре $\vartheta_\infty = 25^\circ\text{C}$, брзином од 60 m/s . Колика је снага загревања на грејачу на коме она достиже максималну вредност да би се остварио специфицирани режим?

Вредности параметара ваздуха на температури од 400 K , што представља средњу вредност температуре површи и ваздуха, и притиску од 1 атмосфере, износе: кинематска вискозност $\nu = 26,41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, специфична топлотна проводност $\lambda = 0,0338 \text{ W}/(\text{m K})$, *Prandtl*-ов број $Pr = 0,69$.

Решење

Снаге загревања појединих грејача морају бити различите да би се одржала константна температура површи плоче јер се дуж плоче мења коефицијент преласка топлоте струјањем (доведена електрична снага је једнака снази којом се енергија струјањем преноси са површи грејача на ваздух – $\alpha S (\vartheta_p - \vartheta_\infty)$). Максимална снага се има на оном грејачу где је максимална средња вредност коефицијента преласка топлоте. Дакле, да би се решио задатак, потребно је анализирати вредности средњих коефицијената преласка топлоте струјањем на сваком од грејача, користећи изразе (18) – (32) (<http://term-procesi.etf.bg.ac.rs/predavanja.html> / Часови 4-6). За почетак ћемо одредити да ли и на ком од грејача долази до промене режима струјања из ламинарног у турбулентни. За вредност критичног *Reynolds*-овог броја $Re_{xc} = 5 \cdot 10^5$, из израза (19) се долази до координате на којој „настаје“ турбулентно струјање:

$$x_c = \frac{\nu}{u_\infty} Re_{xc} = \frac{26,41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{60 \text{ m/s}} 5 \times 10^5 = 0,22 \text{ m} \quad (1.1)$$

То значи да је струјање ваздуха на прва четири грејача и на првих 20 mm петог грејача ламинарно, а на осталих 30 mm турбулентно, као и на грејачима после петог.

У дискусији која следи једначину (22) је објашњено да коефицијент преласка топлоте струјањем у области ламинарног струјања опада са повећањем растојања од ивице плоче, због чега он засигурно највећу вредност у области од првог до четвртог грејача достиже на првом грејачу.

У области турбулентног струјања, коефицијент преласка топлоте струјањем се са растојањем од ивице плоче мења на следећи начин (израз се добија из (20), (25) и (19) – прецизније у изразу (19) карактеристична димензија је растојање од ивице плоче x):

$$\alpha_x(x) = \frac{\lambda \left(0,0296 \cdot \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \right)}{x} \quad (1.2)$$

Коефицијент преласка топлоте је обрнуто сразмеран са $x^{1/5}$, што значи да опада са растојањем. Дакле, у области од шестог грејача надаље, средња вредност коефицијента преласка топлоте струјањем има највећу вредност на шестом грејачу.

Дакле, „кандидати“ за највећу средњу вредност коефицијента преласка топлоте су први, шести и пети грејач, на коме постоји и област ламинарног и област турбулентног струјања. Снага загревања првог грејача се израчунава на следећи начин. Из основног закона преноса топлоте струјањем:

$$q_1 = \bar{\alpha}_1 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.3)$$

Из израза (1.1) следи:

$$Re_1 = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{60 \text{ m/s} \cdot 0,05 \text{ m}}{26,41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,14 \cdot 10^5 \quad (1.4)$$

Из израза (22):

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\lambda \left(0,332 \cdot \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \right)}{x} dx = 2\alpha_1 \quad (1.5)$$

$$\bar{\alpha}_1 = 2 \cdot \frac{0,0338 \text{ W/mK} \cdot (0,332 \cdot (1,14 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot 0,69^{1/3})}{0,05 \text{ m}} = 134 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (1.6)$$

$$q_1 = 134 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot (0,05 \times 1) \text{ m}^2 \cdot (230 - 25)^\circ \text{C} = 1370 \text{ W} \quad (1.7)$$

За грејаче 5 и 6 најбржи начин да се одреде средње вредности коефицијената преласка топлоте струјањем је да се употребе готови изрази за средње вредности коефицијента преласка топлоте од почетка плоче до задате координате x ((28) и (32)). Пре него што се то учини, потребно је направити кратку анализу и успоставити релацију између средње вредности коефицијената преласка топлоте струјањем на деоници од растојања x_1 до растојања x_2 (α_{1-2}), с једне стране, и коефицијената преласка топлоте на деоницама од $x = 0$ до x_1 (α_1), односно од $x = 0$ до x_2 (α_2). Релација се једноставно успоставља на основу дефиниције средњих вредности коефицијената преласка топлоте и елементарне математичке особине интеграла:

$$\alpha_{1-2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\int_0^{x_2} \alpha(x) dx - \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \right) \quad (1.8)$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1} \left(x_2 \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} \alpha(x) dx - x_1 \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \right)$$

$$\alpha_{1-2} = \frac{\alpha_2 x_2 - \alpha_1 x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.9)$$

На основу претходног се једноставно израчунавају снаге загревања петог и шестог грејача.

Снага загревања петог грејача:

$$q_5 = \bar{\alpha}_5 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) = \bar{\alpha}_{1-5} \cdot 5 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) - \bar{\alpha}_{1-4} \cdot 4 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.10)$$

$$q_5 = (\bar{\alpha}_{1-5} \cdot 5 L - \bar{\alpha}_{1-4} \cdot 4 L) w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.11)$$

Израчунавање коефицијената преласка топлоте потребних у претходном изразу:

$$\overline{N}_{u_4} = 0,664 \cdot R_{e_4}^{1/2} \cdot P_r^{1/3} \quad (1.12)$$

$$R_{e_4} = 4R_{e_1} = 4,56 \cdot 10^5 \quad (1.13)$$

$$\overline{N}_{u_4} = 0,664 \cdot R_{e_4}^{1/2} \cdot P_r^{1/3} = 0,664 \cdot (4,56 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot (0,69)^{1/3} = 396 \quad (1.14)$$

$$\overline{\alpha}_{1-4} = \frac{\lambda \overline{N}_{u_4}}{4L} = \frac{396 \cdot 0,0338 \text{ W/(mK)}}{0,2m} = 67 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \quad (1.15)$$

$$R_{e_5} = 5R_{e_1} = 5,70 \cdot 10^5 \quad (1.16)$$

$$\overline{N}_{u_5} = (0,037 \cdot R_{e_5}^{4/5} - 871) \cdot P_r^{1/3} = (0,037 \cdot (5,70 \cdot 10^5)^{4/5} - 871) \cdot P_r^{1/3} = 546 \quad (1.17)$$

$$\overline{\alpha}_{1-5} = \frac{\lambda \overline{N}_{u_5}}{5L} = \frac{546 \cdot 0,0338 \text{ W/(mK)}}{0,25m} = 74 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \quad (1.18)$$

Заменом вредности коефицијената преласка топлоте у израз за снагу загревања (снагу која се одводи са површи струјањем ваздуха):

$$q_5 = (74 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,25m - 67 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,20m) \cdot 1m \cdot (230 - 25)K = 1050W \quad (1.19)$$

Снага загревања шестог грејача:

$$q_6 = \overline{\alpha}_{1-6} \cdot 6Lw(\vartheta_p - \vartheta_\infty) - \overline{\alpha}_{1-5} \cdot 5Lw(\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.20)$$

$$q_6 = (\overline{\alpha}_{1-6} \cdot 6L - \overline{\alpha}_{1-5} \cdot 5L)w(\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.21)$$

Израчунавање средњег коефицијената преласка топлоте од почетка плоче до краја шестог грејача:

$$R_{e_6} = 6R_{e_1} = 6,84 \cdot 10^5 \quad (1.22)$$

$$\overline{N}_{u_6} = (0,037 \cdot (6,84 \cdot 10^5)^{4/5} - 871) \cdot 0,69^{1/3} = 753 \quad (1.23)$$

$$\overline{\alpha}_{1-6} = \frac{\lambda \overline{N}_{u_6}}{6L} = \frac{753 \cdot 0,038 \text{ W/(mK)}}{0,30m} = 85 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \quad (1.24)$$

Заменом вредности коефицијената преласка топлоте у израз за снагу загревања:

$$q_6 = (85 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,30m - 74 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot 0,25m) \cdot 1m \cdot (230 - 25)K = 1440W \quad (1.25)$$

Однос снага загревања на три „кандидата“ (грејач 1, грејач 5 и грејач 6) за највећу снагу загревања је $q_6 > q_1 > q_5$, што значи да је максимална снага загревања 1440 W.

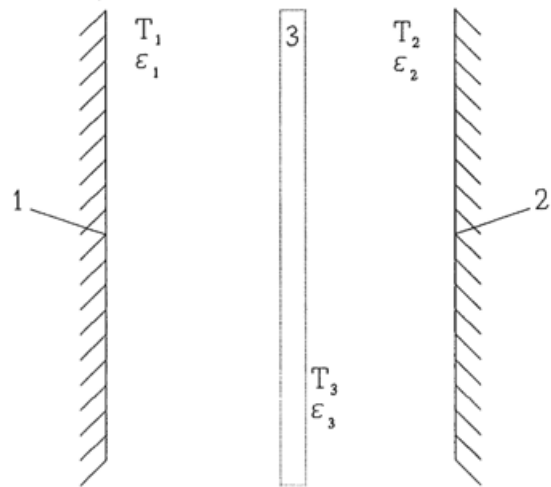
ЗАДАЦИ 2, 3, 4, 5 и 6 могу се пронаћи у збирци задатака под редним бројевима 15, 16, 17, 24 и 26, респективно.

<http://term-procesi.etf.bg.ac.rs/dokumenti/vezbe%20na%20tabli/ZbirkaDeo2.pdf>

ЗАДАТАК 2

а) Извести израз за површинску густину снаге којом се енергија размењује зрачењем између две паралелне велике површи 1 и 2, које се налазе на температурама T_1 и T_2 и чије површи имају својства идеално сивог тела, коефицијента сивоће ε_1 и ε_2 , респективно. Апсорпциона својства су карактерисана коефицијентима апсорпције, који су једнаки коефицијентима сивоће (емисивностима). Због величине површи може се сматрати да су ивични ефекти занемарљиво мали.

б) Какав се ефекат постиже постављањем застора (екрана) између тих површи? Коефицијент сивоће екрана (плоче која се умеће) износи ε_3 .



Слика 2.1

Решење

а) Према законима зрачења са дела површи 1, површине S (која се налази на температури T_1), се емитује енергија снагом q_1 . Осим тога, од ње се рефлектује и део енергије које услед зрачења долази са површи 2 и поново се враћа ка површи 2. На основу тога се за укупну снагу којом се енергија преноси зрачењем са дела површи 1 може написати:

$$q_{1u} = q_1 + (1 - A_1) \cdot q_{2u} \quad (2.1)$$

Аналогно, укупна снага којом се енергија преноси зрачењем са дела површи 2 износи:

$$q_{2u} = q_2 + (1 - A_2) \cdot q_{1u} \quad (2.2)$$

где q_{iu} , q_i и A_i представљају укупну снагу преноса енергије зрачењем, снагу зрачења сагласно *Stefan-Boltzman*-овом закону и коефицијент апсорпције површи i ($i = 1, 2$).

Решавањем претходног система од две једначине са две непознате (q_{1u} и q_{2u}) се добија:

$$q_{1u} = \frac{q_1 + q_2 - A_1 \cdot q_2}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2} \quad (2.3)$$

$$q_{2u} = \frac{q_1 + q_2 - A_2 \cdot q_1}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2} \quad (2.4)$$

Снага којом се енергија размењује зрачењем између делова посматраних површи се добија као разлика ових снага, што се за $T_1 > T_2$ исказује једначином:

$$q = q_{1u} - q_{2u} \quad (2.5)$$

Заменом израза за q_{1u} и q_{2u} се добија

$$q = \frac{A_2 \cdot q_1 - A_1 \cdot q_2}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2} \quad (2.6)$$

Ако се у изразу (2.6) изврше замене $A_i = \varepsilon_i$ (коефицијент апсорпције тела је једнак његовом коефицијенту сивоће) и вредности q_i (по *Stefan-Boltzman*-овом закону зрачења сивог тела)

$$q_i = C_i \cdot \left(\frac{T_i}{100}\right)^4 \cdot S = C_c \cdot \varepsilon_i \cdot \left(\frac{T_i}{100}\right)^4 \cdot S \quad (2.7)$$

добија се израз за тражену снагу, који гласи:

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S \quad (2.8)$$

Из њега се једноставно долази и до траженог израза за површинску густину снаге којим се енергија зрачењем размењује између ових површи, дељењем снаге са површином S . Он гласи:

$$q_s = \frac{q}{S} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) \quad (2.9)$$

где C_c представља константу зрачења црног тела, која је једнака *Stefan-Boltzman*-овој константи помноженој са 10^8 ($C_c = \sigma_c \cdot 10^8 = 5,67 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$). C представља константу зрачења сивог тела и једнака је производу константе зрачења црног тела и коефицијента сивоће (ε).

Као бројни пример, посматрајмо како се мења површинска густина снаге (q_s у kW/m^2), којом се енергија размењује између површи чија је емисивност $\varepsilon_1 = 0,8$ и површи чија је емисивност $\varepsilon_2 = 0,4$, а температура $T_2 = 293 \text{ K}$ у зависности од температуре T_1 (K). Резултати израчунавања дати су скупом парова (T_1, q_s):

{(673; 4,1), (773; 7,2), (873; 11,8), (973; 18,3), (1073; 27,2), (1173; 38,9)}

б) За размену енергије између површи 1 и 3, односно 3 и 2 (слика 2.1) важи иста релација која је изведена за случај размене енергије зрачењем између површи 1 и 2, када између њих не постоји екран. Дакле, може се написати:

$$q_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \left(\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_3}{100}\right)^4 \right) S \quad (2.10)$$

односно

$$q_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left(\left(\frac{T_3}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S \quad (2.11)$$

При писању једначина (2.10) и (2.11) је претпостављено стационарно стање и занемарен је топлотни отпор провођењу топлоте кроз плочу 3 (екран), из чега следи да су обе граничне површи екрана на истој температури.

За даље решавање је погодно увести ознаке:

$$C_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1} \quad (2.12)$$

$$C_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (2.13)$$

У стационарном стању снаге размене енергије између површи 1 и екрана, односно површи 2 и екрана (q_{13} и q_{32}) су једнаке, па се може написати једначина:

$$C_{13} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right) = C_{32} \left(\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (2.14)$$

Њеним решавањем по температури T_3 се добија:

$$\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{C_{13} \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + C_{32} \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}{C_{13} + C_{32}} \quad (2.15)$$

Заменом претходног израза у израз (2.10), добија се израз за снагу размене енергије између површи 1 и 2 када између њих постоји радијациони екран:

$$q = q_{13} = q_{32} = \frac{C_{13} \cdot C_{32}}{C_{13} + C_{32}} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.16)$$

Заменом вредности C_{13} и C_{32} се добија коначан израз за снагу размене енергије зрачењем између две бесконачно велике паралелне површи између којих је постављен екран:

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.17)$$

Ефекат постављања екрана се може најбоље уочити ако се упореде изрази (2.8) и (2.17). Постављањем екрана се смањује снага размене енергије зрачењем. За мале вредности емисивности екрана (ε_3) тај ефекат је нарочито изражен (за $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ следи $q \rightarrow 0$). Ова појава се у пракси веома често примењује у циљу смањења размене енергије зрачењем.

Примера ради, површинска густина снаге којом се енергија размењује између две паралелне велике површи, чије су емисивности $\varepsilon_1 = 0,8$ и $\varepsilon_2 = 0,4$, убацивањем алуминијумског екрана (чија је емисивност $\varepsilon_3 = 0,05$) се смањује за 93,4%. Овај резултат се добија на основу израза (2.8) и (2.17) и не зависи од температура T_1 и T_2 .

ЗАДАТАК 2 – решење помоћу радијационе шеме

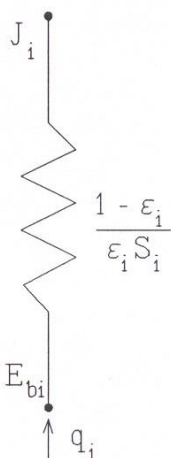
На часовима предавања (Часови 7 до 9), су изведене формуле за:

1. Снагу којом се енергија одводи са површи тела која се може приказати елементом мреже са слике 2.2:

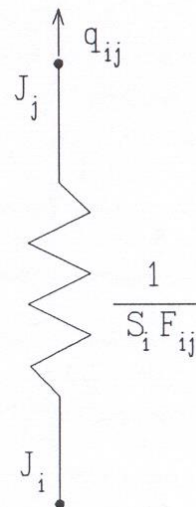
$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \cdot S_i} \quad (2.18)$$

2. Снагу размене енергије између две површи (i и j), која се може приказати елементом мреже датим на слици 2.3:

$$q_i = \sum_{j=1}^N S_i \cdot F_{ij} \cdot (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^N q_{ij} \quad (2.19)$$



Слика 2.2



Слика 2.3

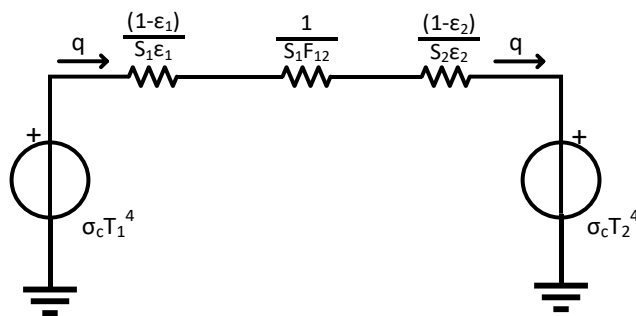
На основу представљених формула и њихових графичких приказа лако се могу формирати радијационе шеме.

а) За случај две паралелне велике површи на температурама T_1 и T_2 биће формирана радијациона шема са два чвора чији се потенцијали одређују на основу израза за површинску густину снаге зрачења црног тела на датим температурама.

Између ових чворова се размењује енергија зрачењем кроз отпоре који узимају у обзир

- 1) несавршеност зрачења сивог тела, преко емисивности и
- 2) количину енергије која доспева са једног на друго тело, преко фактора виђења.

Дакле, снага размене енергије зрачењем између две површи на свом путу „види“ три елемента отпорности, као што је то приказано на слици 2.4.



Слика 2.4 – Радијациона шема за две паралелне површи

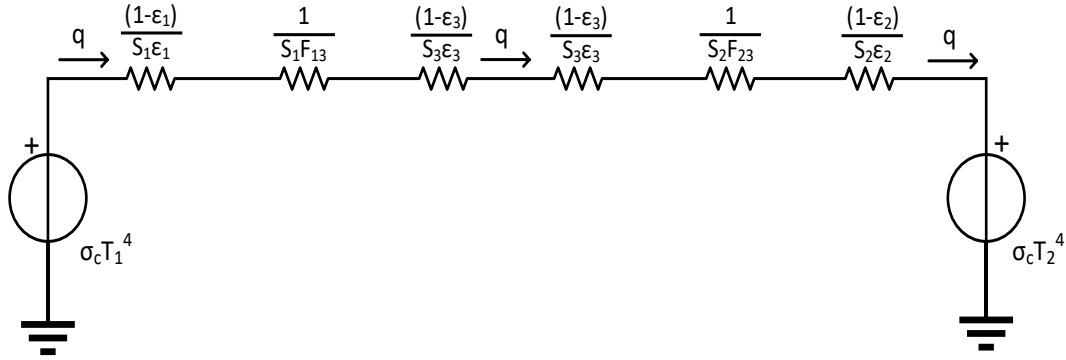
На основу приказане радијационе шеме се лако долази до израза за снагу којом се енергија размењује између две велике паралелне површи, при чему се претпоставља да су им површине једнаке (S) и да је фактор виђења између њих 1.

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (2.20)$$

$$= \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S$$

Лако се уочава да је добијен исти израз као једнакост (2.8).

б) У случају постојања екрана између две велике паралелне површи могуће је формирати једну радијациону шему приказану на слици 2.5. У екрану (уметнутој плочи) нема ни извора ни понора енергије, односно енергија која долази од површи 1 ка површи 3 одлази од површи 3 ка површи 2 (претпоставка да је површ 1 топлија од површи 2).



Слика 2.5 – Радијациона шема за две паралелне површи са екраном између њих

Сада се лако може написати израз за снагу размене енергије зрачењем између две велике паралелне површи који одговара изразу (2.17):

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{13} S_1} + \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1}{F_{23} S_2} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} \quad (2.21)$$

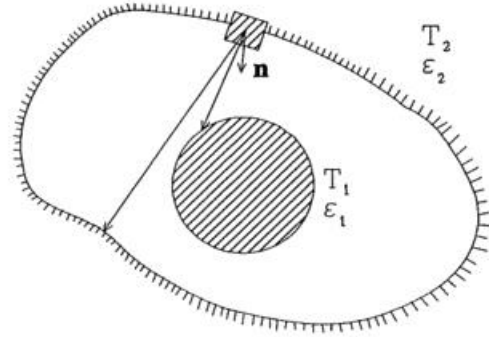
$$= \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{13}} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{23}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.22)$$

S

ЗАДАТАК 3

Извести израз за снагу којом се енергија размењује зрачењем између две површи 1 и 2 (где површ 2 обухвата површ 1 – слика 3.1) које се налазе на температурама T_1 и T_2 и чије површи имају својства идеално сивих тела, коефицијента сивоће ε_1 и ε_2 , респективно. Коефицијенти апсорпције су једнаки коефицијентима сивоће. Површина површи између којих се размењује енергија зрачењем износи S_1 и S_2 .



Слика 3.1

Решење

Основна разлика од случаја који се има при размени енергије између две паралелне, бесконачно велике површи (задатак 2) је у томе што само део енергије коју емитује површ 2 ($k \cdot q_{2u}$) стиже до површи 1, док остатак $((1 - k) \cdot q_{2u})$ стиже на површ 2.

Као и у претходном задатку, на основу енергетског биланса се може написати једначина:

$$q_{1u} = q_1 + (1 - A_1) \cdot k \cdot q_{2u} \quad (3.1)$$

односно

$$q_{2u} = q_2 + (1 - A_2) \cdot q_{1u} + (1 - A_2) \cdot (1 - k) \cdot q_{2u} \quad (3.2)$$

где q_{iu} , q_i и A_i представљају укупну снагу, снагу зрачења сагласно *Stefan-Boltzman*-овом закону и коефицијент апсорпције површи i ($i = 1, 2$). k је коефицијент којим се исказује колики део енергије која се емитује са површи тела 2 стиже до површи тела 1. Његова вредност се налази у интервали $[0, 1]$.

Решавањем претходног система једначина са две непознате (q_{1u} и q_{2u}) се добија:

$$q_{1u} = \frac{A_2 \cdot q_1 + k \cdot (1 - A_2) \cdot q_1 + (1 - A_1) \cdot k \cdot q_2}{k \cdot A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2 \cdot k} \quad (3.3)$$

$$q_{2u} = \frac{q_2 + (1 - A_2) \cdot q_1}{k \cdot A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2 \cdot k} \quad (3.4)$$

Снага којом се енергија размењује зрачењем између посматраних површи се добија као разлика снаге којом се у неком тренутку, при стационарном стању, енергија преноси од површи 1 ка површи 2 и снаге којом се енергија, у истом тренутку, преноси од површи 2 ка површи 1:

$$q = q_{1u} - k \cdot q_{2u} \quad (3.5)$$

Заменом израза за q_{1u} и q_{2u} из (3.3) и (3.4) у израз (3.5) добија се:

$$q = \frac{A_2 \cdot q_1 - A_1 \cdot k \cdot q_2}{k \cdot A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2 \cdot k} \quad (3.6)$$

На основу једнакости коефицијента апсорпције и коефицијента сивоће ($A = \varepsilon$) *Stefan-Boltzman*-овог закона зрачења сивог тела, израз (3.6) постаје:

$$q = \frac{C_c \varepsilon_1 \varepsilon_2}{k \cdot A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2 \cdot k} \left(S_1 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - k S_2 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (3.7)$$

Коначно, потребно је одредити вредност коефицијента k . Он се одређује из услова да је снага размене енергије зрачењем једнака нули у случају да су једнаке температуре површи 1 и 2 ($T_1 = T_2 = T$). Увођењем тог услова у једначину (3.7) се добија да је $k = S_1/S_2$. Када се ова вредност коефицијента k замени у израз (3.7), добија се коначни израз за снагу којом се енергија размењује зрачењем између површи површине S_1 и S_2 . Он гласи:

$$q = \frac{C_c S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (3.8)$$

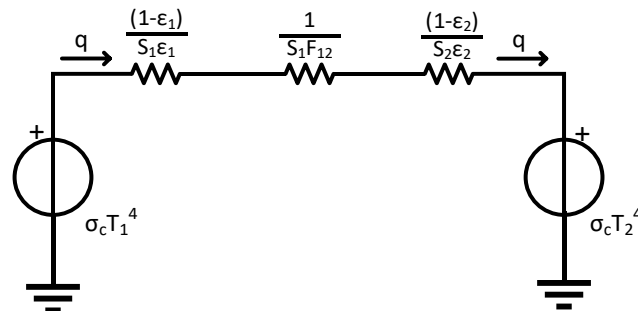
Као бројни пример, посматрајмо како се мења снага (q , у kW), којом се енергија размењује између унутрашње површи, чија је емисивност $\varepsilon_1 = 0,4$, температура $T_1 = 1073$ K и површина $S_1 = 1$ m² и спољашње површи, чија је емисивност $\varepsilon_2 = 0,8$, а температура $T_2 = 293$ K, у зависности од односа површина S_1/S_2 . Резултат израчунавања се даје скупом парова ($S_1/S_2, q$):

$$\{(\rightarrow 0, 29,9), (1/8, 29,5), (1/4, 29,2), (1/2, 28,5), (3/4, 27,8), (7/8, 27,5), (\rightarrow 1, 27,2)\}$$

Види се да је опсег варијације снаге мали (промена за свега 10%). То је резултат малог коефицијент сивоће тела 1 (ε_1) у односу на коефицијент сивоће тела 2 (ε_2).

ЗАДАТАК 3 – решење помоћу радијационе шеме

Решење задатка се своди на постављање радијационе шеме са два чвора, по један за свако од тела на различитим температурама и различитих површина.



Слика 3.2 – Радијациона шема за две површи од којих једна обухвата другу

У овом примеру површине два тела нису једнаке, а фактор виђења између прве и друге површи је једнак 1, јер како друга површ окружује прву, јасно је да све што се израчи са површи 1 доспева на површ 2.

На основу приказане радијационе шеме добија се израз за снагу размене енергије између две површи од којих се прва налази унутар друге:

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (3.9)$$

$$q = \frac{C_c S_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \left(\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (3.10)$$

Добијена једнакост одговара изразу (3.8).

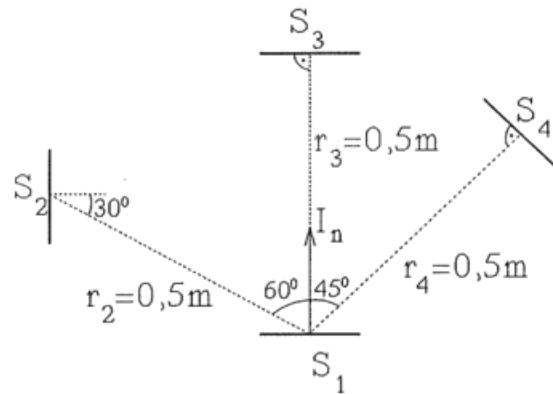
ЗАДАТАК 4

Мала површ површине $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$ зрачи дифузно. Измерена вредност јачине зрачења у правцу нормале, по јединици површине површи која зрачи износи $I_{n, s} = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$. Зрачењу ове мале површи су изложене три површи површина $S_2 = S_3 = S_4 = 10^{-3} \text{ m}^2$, које су удаљене $0,5 \text{ m}$ од површи S_1 (користиће се иста ознака за површ и вредност њене површине).

а) Колика је јачина зрачења по јединици површине S_1 у сваком од три правца, дефинисаним „тачкастим“ површима S_2 , S_3 и S_4 ? Положај и оријентација површи S_1 , S_2 , S_3 и S_4 приказани су на слици 4.1.

б) Под којим се просторним угловима из „тачкасте“ површи S_1 виде површи S_2 , S_3 и S_4 ?

в) Колика је снага зрачења која се са површи S_1 емитује до површи S_2 , S_3 и S_4 ?



Слика 4.1

Решење

а) Код дифузног извора зрачења, вредност јачине зрачења се његове елементарне површи, подељена са површином елементарне површи пројектованом на правац зрачења, је иста у свим правцима, што се исказује једначином:

$$\frac{I_n}{dS} = \frac{I_\varphi}{dS \cdot \cos \varphi} \quad (4.1)$$

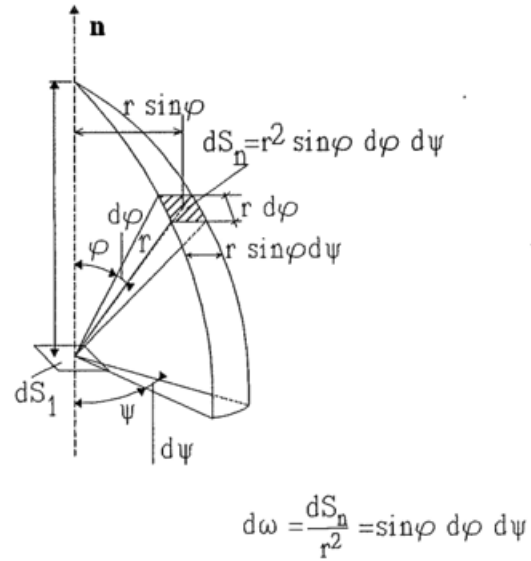
Из овог услова се добија веза између јачине зрачења у произвољном правцу, дефинисаном углом φ (у односу на нормалу) и јачине зрачења у правцу нормале, која гласи:

$$I_\varphi = I_n \cdot \cos \varphi \quad (4.2)$$

Дакле, расподела јачине зрачења код дифузног извора врши се по *Lambert*-овом косинусном закону. Применом израза (4.2) се добијају тражене вредности $I_{2, s} = 3500 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$, $I_{3, s} = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$ и $I_{4, s} = 4950 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$.

б) Елементарни просторни угао $d\omega$ је дефинисан као простор ограничен зрацима, повученим из центра сфере, којима се види елементарни део сфере. Он је одређен односом површине елемента сфере dS_n и квадратом полупречника сфере: $d\omega = dS_n/r^2$.

Малој површи произвољног облика и оријентације одговара просторни угао, под којим се она види из дефинисане тачке, који је једнак односу површине њене пројекција на раван управну на правац одређен дефинисаном тачком и малом површи која се посматра и квадрата одстојања. Елементарни просторни угао који одговара правцу дефинисаном угловима φ и ψ у сферном координатном систему се одређује на начин приказан на слици 4.2.



Слика 4.2

Све четири површи са слике 4.1 се могу сматрати диференцијалним („тачкастим“), јер важи $S_j/r_j^2 \ll 1$. Дакле, $d\omega_j = dS_{n,j}/r_j^2$, где је $dS_{n,j} = dS_j \cdot \cos \varphi_j$, а φ_j угао између правца нормале и правца упадног зрачења. Тражени просторни углови имају вредности:

$$\omega_{1-2} = \frac{10^{-3} \cdot \cos 30^\circ}{0,5^2} = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (4.3)$$

$$\omega_{1-3} = \frac{10^{-3} \cdot \cos 0^\circ}{0,5^2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (4.4)$$

$$\omega_{1-4} = \frac{10^{-3} \cdot \cos 0^\circ}{0,5^2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (4.5)$$

в) Обзиром да су све површи диференцијалне („тачкасте“, „елементарне“), снага зрачења која се са површи S_1 емитује до површи S_2 , S_3 и S_4 се одређује као производ просторног угла под којим се види површ S_i ($i = 2, 3, 4$) и интензитета у том правцу, односно према изразу:

$$q_{1-i} = I_{\varphi_{1,i}} \cdot \omega_{1-i} \quad (4.6)$$

где је

$$I_{\varphi_{1,i}} = I_n \cdot \cos \varphi_{1,i} = I_{n,S} \cdot S_1 \cdot \cos \varphi_{1,i} \quad (4.7)$$

У изразу (4.7), $\varphi_{1,i}$ представља угао између правца зрачења и нормале на површ S_1 .

Применом израза (4.7), добијају се снаге зрачења са површи S_1 до површи S_2 , S_3 и S_4 :

$$q_{1-2} = 12,1 \text{ mW}, q_{1-3} = 28 \text{ mW} \text{ и } q_{1-4} = 19,8 \text{ mW}.$$

Задржимо се на појмовима тачкастог извора зрачења и тачкастог пријемника зрачења. Извор зрачења се може посматрати као тачкасти ако се са његове сваке елементарне површи тачка у којој се посматра зрачење тела види под истим углом у односу на нормалу. У том случају су јачине зрачења са свих елементарних делова исте (без обзира на њихову просторну расподелу са елементарног дела површи); просторна расподела зрачења површи тела је збирни резултат зрачења са њених елементарних делова. Расподела зрачења са елементарних делова, као карактеристика површи која зрачи, има идентичан облик за све елементарне површи. Извор се тада може свести на тачку, у односу на коју се могу

дефинисати и просторни углови. Површ која је пријемник зрачења се може сматрати тачкастом површи ако се сви њени делови виде под истим углом са сваке од тачака на површи извора зрачења. Тада се могу дефинисати просторни углови под којима се са сваке елементарне површи извора (са сваке тачке површи извора) види пријемник зрачења.

ЗАДАТАК 5

Посматрајмо диск пречника D (површине S_j) и равну површ површине S_i која је много мања од површине диска (S_j). Диск и равна површ су паралелни. Равна површ мале површине се налази на растојању L од центра диска, лоцирана око нормале која пролази кроз центар диска. Одредити фактор виђења површи S_j са површи S_i ($F_{i \rightarrow j}$).

Решење

Обзиром да се површ површине S_i може сматрати тачкастим извором зрачења (углови γ_i и γ_j и растојање R са слике 5.1 су приближно константни за све тачке површи S_i) када се посматра енергија која се зрачи до површи диска, израз за фактор виђења се своди на:

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cdot \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_j \quad (5.1)$$

односно, обзиром да је $\gamma_i = \gamma_j = \gamma$ (слика 5.1):

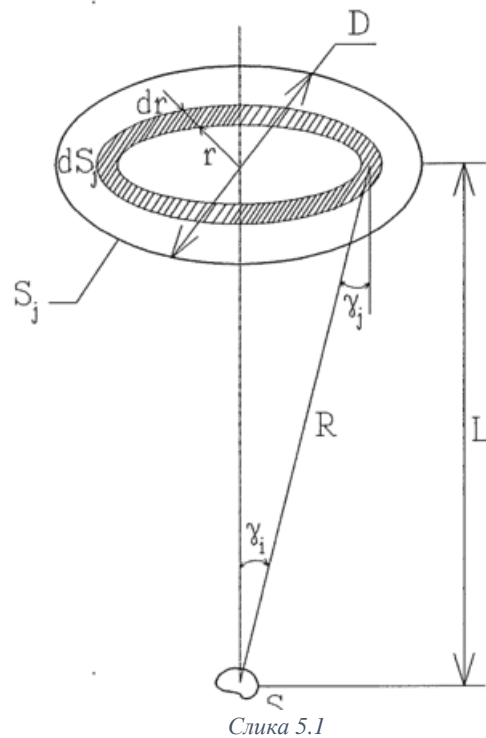
$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos^2 \gamma_i}{\pi R^2} dS_j \quad (5.2)$$

Интеграција по површи S_j може се извршити поделом диска на концентричне прстенове полупречника r и ширине dr , за које су γ и R константни, слика 5.1 ($dS_j = 2\pi r dr$, $R^2 = r^2 + L^2$, $\cos \gamma = L/R$), на начин

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{r=0}^{D/2} \frac{1}{\pi(r^2 + L^2)} \left(\frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = 2L^2 \int_{r=0}^{D/2} \frac{r dr}{(r^2 + L^2)^2} = \frac{D^2}{4L^2 + D^2} \quad (5.3)$$

Дакле, до површи диска се преноси део укупне снаге зрачења са површи малог тела који је једнак:

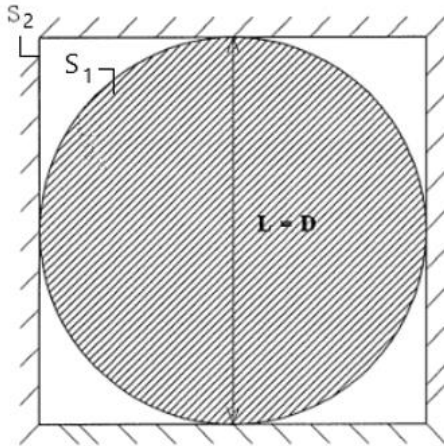
$$\frac{D^2}{4L^2 + D^2} \quad (5.4)$$



ЗАДАТАК 6

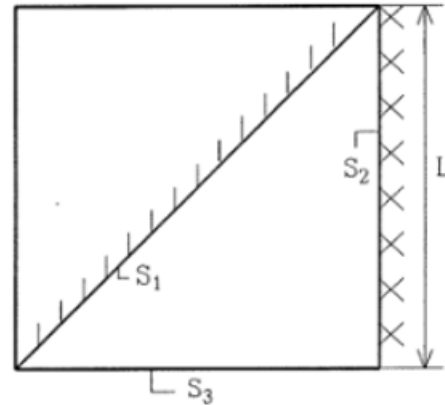
Одредити факторе виђења површи S_2 са површи S_1 (F_{12}) и површи S_1 са површи S_2 (F_{21}) за следеће геометрије:

а) сфера пречника D унутар коцке стране L , која је једнака пречнику D ,



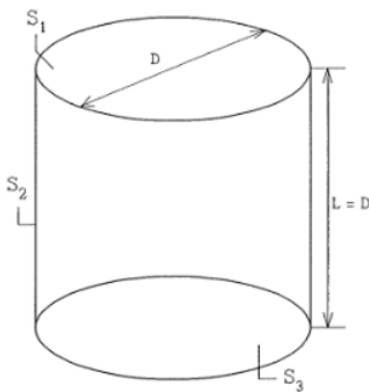
Слика 6.1

б) површ дијагоналног пресека и једна површ канала квадратног попречног пресека стране L ,



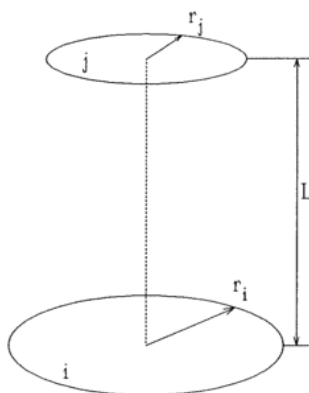
Слика 6.2

в) базис и омотач цилиндричне цеви пречника D и дужине L , која је једнака пречнику D .



Слика 6.3

У литератури се могу пронаћи изложени поступци за одређивање фактора виђења између појединачних површи. Поступци се базирају на формулама или графичким зависностима како би се избегло решавање сложених интеграла при решавању практичних проблема. Једна од формула које се обично дају у литератури је за фактор виђења између коаксијалних паралелних дискова различитих полупречника (слика 6.4). Поступак је следећи:



Слика 6.4

$$R_i = \frac{r_i}{L}$$

$$R_j = \frac{r_j}{L}$$

$$s = 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2} \quad (6.1)$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \left(s - \sqrt{s^2 - 4 \left(\frac{r_j}{r_i} \right)^2} \right)$$

Решење

а) Обзиром да целокупна снага зрачења са површи 1 долази до површи 2, важи:

$$F_{12} = 1 \quad (6.2)$$

Сада се F_{21} може израчунати као:

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_{12} = \frac{4 \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}{6L^2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} \quad (6.3)$$

б) За површ S_I може се написати:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (6.4)$$

Обзиром да је површ 1 равна, сопствени фактор виђења има вредност:

$$F_{11} = 0 \quad (6.5)$$

На основу симетрије може се написати:

$$F_{12} = F_{13} \quad (6.6)$$

Једноставним решавањем претходних једначина, добија се вредност:

$$F_{12} = \frac{1}{2} \quad (6.7)$$

Сада се може одредити и F_{21} :

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_{12} = \frac{L\sqrt{2}}{L} \cdot 0,5 = 0,71 \quad (6.8)$$

в) Применом поступка за одређивање фактора виђења између коаксијалних паралелних дискова различитих пречника, изложеног у тексту изнад, за фактор F_{31} се добија:

$$\begin{aligned} R_1 = R_3 = R &= \frac{D/2}{D} = 0,5 \\ s &= 1 + \frac{1 + R^2}{R^2} = 1 + \frac{1 + 0,25}{0,25} = 6 \\ F_{13} &= \frac{1}{2} \left(6 - \sqrt{6^2 - 4 \left(\frac{D/2}{D/2}\right)^2} \right) \approx 0,17 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Фактор F_{12} се може одредити применом следећег израза:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (6.10)$$

где су: $F_{11} = 0$ и $F_{13} = 0,17$. Дакле, добија се вредност $F_{12} = 0,83$.

Фактор виђења F_{21} је једнак:

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_{12} = \frac{\pi D^2}{4\pi DL} \cdot 0,83 \approx 0,21 \quad (6.11)$$

ЗАДАТАК 7

Израчунати фактор виђења површи 2 (бесконечно дугачак цилиндар пречника 2m) са површи 1 (бесконечно дуг полукружни цилиндар полупречника 0.5 m).

Решење

Пошто су површи 1 и 2 бесконачно дуге, могу се занемарити ефекти крајева на вредности фактора виђења. Како би одредили вредност фактора виђења површи 2 са површи 1, допунићемо површ 1 са површи 3 (видети слику 7.1) тако да добијемо затворену површ (ову површ означимо са 1').

На овај начин добија се затворени систем од две површи (1' и 2) за које важи следећи израз:

$$F_{1'1'} + F_{1'2} = 1 \quad (7.1)$$

Из чињенице да целокупно зрачење са тела 1' стиже до тела 2, следи $F_{1'2} = 1$ и $F_{1'1'} = 0$. Сада је могуће одредити вредност фактора виђења $F_{21'}$, као:

$$F_{21'} = \frac{S_{1'}}{S_2} \cdot F_{1'2} = \frac{(0,5 \cdot \pi + 1) \cdot L}{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot L} \cdot 1 = 0,4092 \quad (7.2)$$

Имајући у виду облике површи 1 и 1', може се написати

$$F_{21} = F_{21'} = 0,4092 \quad (7.3)$$

Коначно, могуће је одредити и тражени фактор виђења:

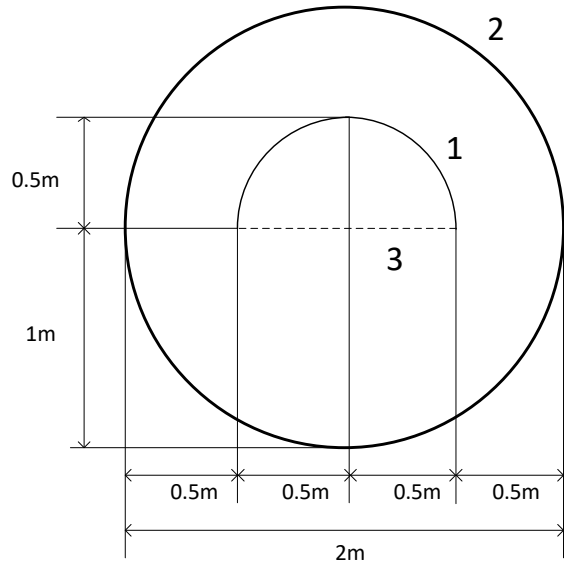
$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_{21} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot L}{2 \cdot 0,5 \cdot \pi \cdot L} \cdot 0,4092 = 0,8184 \quad (7.4)$$

ЗАДАТАК 8

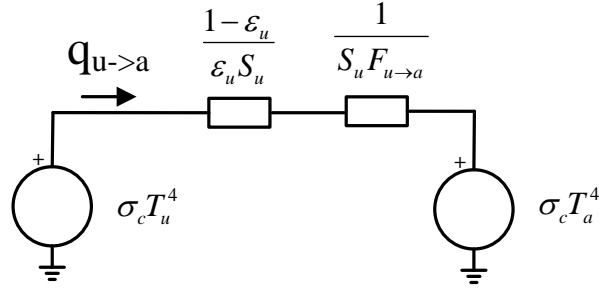
Цев пречника $D_u = 5$ cm, емисивности $\varepsilon_u = 0,8$ и температуре $\vartheta_u = 800^\circ\text{C}$ се налази у слободном простору температуре 20°C . За колико се смањи снага преноса топлоте зрачењем од цеви ако се она постави у цев (екран) чији је пречник унутрашње површи $D_{su} = 7$ cm, њена емисивност $\varepsilon_{su} = 0,2$, док је пречник спољашње површи екранске цеви $D_{ss} = 8$ cm, а емисивности $\varepsilon_{ss} = 0,8$? Сматрати да је отпор преносу топлоте кроз цев занемарљиво мали.

Решење

У случају да екран није постављен, спољашња површ цеви и амбијент образују затворен простор.. Размена енергије зрачењем између површи које образују затворен простор може се анализирати на основу следеће радијационе шеме (слика 8.1).



Слика 7.1



Слика 8.1 – Радијациона шема

За практичну употребу радијационих шема потребно је познавати факторе виђења између одговарајућих површи. У овом случају није потребно решавати површинске интеграле да би се одредили фактори виђења.

Пошто сва енергија емитована са површи цеви доспева у амбијент, на основу дефиниције фактора виђења се закључује следеће:

$$F_{u \rightarrow a} = \frac{Q_{u \rightarrow a}}{Q_{uk}} = 1 \quad (8.1)$$

где је $Q_{u \rightarrow a}$ енергија која, емитована са површи цеви, стиже у амбијент, а Q_{uk} је укупна енергија емитована са површи цеви. Израз (8.1) би важио и када би се енергије замениле одговарајућим снагама.

За факторе виђења $F_{u \rightarrow u}$ и $F_{u \rightarrow a}$ важи:

$$F_{u \rightarrow u} + F_{u \rightarrow a} = 1 \Rightarrow F_{u \rightarrow u} = 1 - F_{u \rightarrow a} = 0 \quad (8.2)$$

Енергија емитована у амбијенту само делом стиже на површ цеви, док остатак енергије завршава у амбијенту. Због тога је фактор виђења $F_{a \rightarrow u} < 1$. Па важи:

$$F_{a \rightarrow u} \cdot S_a = F_{u \rightarrow a} \cdot S_u \Rightarrow F_{a \rightarrow u} = F_{u \rightarrow a} \cdot \frac{S_u}{S_a} \rightarrow 0 \quad (8.3)$$

јер $S_a \rightarrow \infty$.

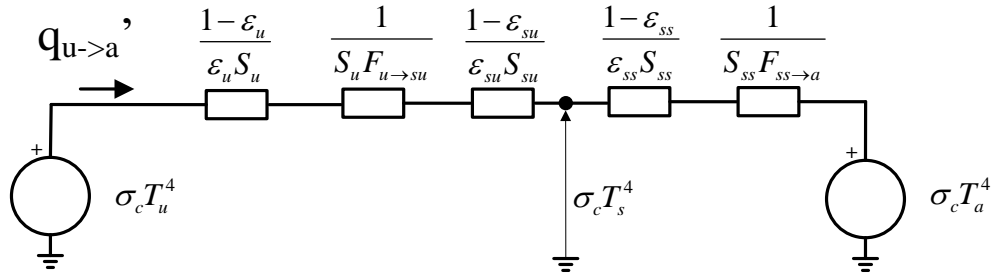
На основу радијационе шеме (слика 8.1) може се израчунати укупна енергија која се размењује између спољашње површи цеви и амбијента износи:

$$q_{u \rightarrow a} = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_a^4)}{\frac{1-\epsilon_u}{S_u \epsilon_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow a}}} = \epsilon_u S_u \sigma_c (T_u^4 - T_a^4) \quad (8.4)$$

Након постављања екрана, енергија се зрачењем преноси између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана и између спољашње површи екрана и амбијента. Радијациона шема за овај случај приказана је на слици 8.2. Снага која се размењује између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана по јединици дужине износи:

$$q_{u \rightarrow su} = \frac{\sigma_c (T_u^4 - T_s^4)}{\frac{1-\epsilon_u}{\epsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1-\epsilon_{su}}{\epsilon_{su} S_{su}}} \quad (8.5)$$

где је T_s температура екрана, а $F_{u \rightarrow su}$ фактор виђења између спољашње површи цеви и унутрашње површи екрана. Пошто сва енергија емитована са спољашње површи цеви доспева на унутрашњу површ екрана, закључује се да је $F_{u \rightarrow su} = 1$.



Слика 8.2

Екран је танак и отпор преносу топлоте између унутрашње и спољашње површи екрана је занемарљиво мали. Због тога се може сматрати да су температуре спољне и унутрашње површи приближно једнаке.

Снага која се размењује између спољашње површи екрана и амбијента по јединици дужине износи:

$$q_{ss \rightarrow a} = \frac{\sigma_c (T_s^4 - T_a^4)}{\frac{1 - \epsilon_{ss}}{\epsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \quad (8.6)$$

Пошто нема генерисања топлотне енергије у екрану, закључује се да је:

$$q_{u \rightarrow su} = q_{ss \rightarrow a} = q_{u \rightarrow a}' \quad (8.7)$$

Из (8.5), (8.6) и (8.7) следи снага која се зрачењем размењује између цеви и амбијента:

$$q_{u \rightarrow a}' = \frac{1}{\frac{1 - \epsilon_u}{\epsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \epsilon_{su}}{\epsilon_{su} S_{su}} + \frac{1 - \epsilon_{ss}}{\epsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \sigma_c (T_u^4 - T_a^4) \quad (8.8)$$

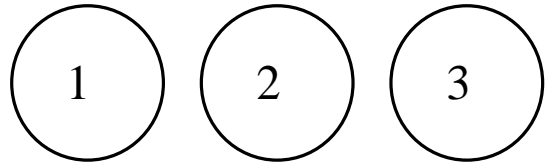
Однос поменутих снага износи:

$$\begin{aligned} \frac{q_{u \rightarrow a}'}{q_{u \rightarrow a}} &= \frac{\epsilon_u S_u \sigma_c (T_u^4 - T_a^4)}{\frac{1}{\frac{1 - \epsilon_u}{\epsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \epsilon_{su}}{\epsilon_{su} S_{su}} + \frac{1 - \epsilon_{ss}}{\epsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}} \sigma_c (T_u^4 - T_a^4)} = \\ &= \frac{\epsilon_u S_u}{\frac{1}{\frac{1 - \epsilon_u}{\epsilon_u S_u} + \frac{1}{S_u F_{u \rightarrow su}} + \frac{1 - \epsilon_{su}}{\epsilon_{su} S_{su}} + \frac{1 - \epsilon_{ss}}{\epsilon_{ss} S_{ss}} + \frac{1}{S_{ss} F_{ss \rightarrow a}}}} = 3,91 \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} F_{u \rightarrow su} &= 1; \\ F_{ss \rightarrow a} &= 1; \\ S_u &= D_u \pi L; \\ S_{su} &= D_{su} \pi L; \\ S_{ss} &= D_{ss} \pi L; \end{aligned}$$

ЗАДАТАК 9

Уколико се све три фазе сувог електроенергетског трансформатора који се хлади ваздухом и који се налази у просторији температуре 20°C направе на исти начин, средња фаза је нешто топлија од крајњих фаза. Разлог томе је мања снага која се зрачењем одводи са спољашњих површи високонапонских (спољних) намотаја средишње фазе. Написати математички исказ хлађења средишње и крајњих фаза из којих се то види, користећи теорију размене топлоте зрачењем (преко фактора виђења).



Слика 9.1

Решење

Спољашње површи фаза 1, 2 и 3 и амбијент образују затворен простор, те се пренос топлоте зрачењем може анализирати на основу фактора виђења и одговарајућих шема зрачења.

Означимо са F_{12} фактор виђења између фазе 1 и 2. Због симетрије се закључује да су фактор виђења између фаза 1 и 2 и фактор виђења између фаза 3 и 2 једнаки.

$$F_{32} = F_{12} \quad (9.1)$$

Такође се из геометрије проблема закључује да је фактор виђења између фаза 1 и 3 једнак нули:

$$F_{13} = 0 \quad (9.2)$$

Означимо са q_{12} снагу која се зрачењем размењује између фаза 1 и 2. На основу енергетског биланса, примењеног на фазу 1, следи:

$$q_1 = q_{12} + q_{1a} \quad (9.3)$$

где је q_1 укупна снага зрачења са површи фазе 1. Делењем једначине (9.3) са q_1 се добија:

$$1 = \frac{q_{12}}{q_1} + \frac{q_{1a}}{q_1} \quad (9.4)$$

На основу дефиниције фактора виђења, једначина (9.4) се може написати у следећем облику:

$$1 = F_{12} + F_{1a} \quad (9.5)$$

Из једначине (9.5) и симетрије фаза 1 и 3 следи да фактори виђења између фазе 1 и амбијента, односно фазе 3 и амбијента износе:

$$F_{1a} = F_{3a} = 1 - F_{12} \quad (9.6)$$

На основу енергетског биланса, примењеног на фазу 2, следи:

$$q_2 = q_{21} + q_{23} + q_{2a} \quad (9.7)$$

где је q_2 укупна снага зрачења са површи фазе 2. Делењем једначине (9.7) са q_2 се добија:

$$1 = \frac{q_{21}}{q_2} + \frac{q_{23}}{q_2} + \frac{q_{2a}}{q_2} \quad (9.8)$$

На основу дефиниције фактора виђења, једначина (9.8) се може написати у следећем облику:

$$1 = F_{21} + F_{23} + F_{2a} \quad (9.9)$$

За факторе виђења важе следеће релације:

$$F_{21} \cdot S_2 = F_{12} \cdot S_1 \quad (9.10)$$

$$F_{23} \cdot S_2 = F_{32} \cdot S_3 \quad (9.11)$$

Пошто важи да је $S_1 = S_2 = S_3 = S$, следи да су одговарајући фактори виђења једнаки.

$$F_{21} = F_{12} \quad (9.12)$$

$$F_{23} = F_{32} \quad (9.13)$$

На основу (9.1), (9.9), (9.12) и (9.13) следи да фактор виђења између фазе 2 и амбијента износи:

$$F_{2a} = 1 - 2 \cdot F_{12} \quad (9.14)$$

Ако претпоставимо да су температуре све три фазе приближно исте и једнаке (T), до хлађења долази само између спољних површи намотаја и амбијента.

$$q_{1a} = q_{3a} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{F_{1a}S}\right)} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-F_{12})S}\right)} \quad (9.15)$$

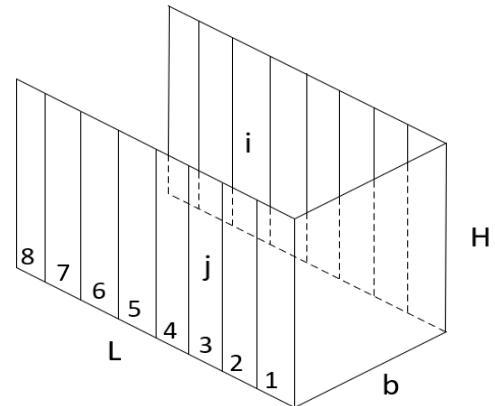
$$q_{2a} = \frac{\sigma_c(T^4 - T_a^4)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-2F_{12})S}\right)} \quad (9.16)$$

$$\frac{q_{1a}}{q_{2a}} = \frac{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-2F_{12})S}\right)}{\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon S} + \frac{1}{(1-F_{12})S}\right)} > 1 \quad (9.17)$$

Закључак: при истој температури све три фазе, већа је снага којом се топлота преноси ка околини зрачењем са крајњих фаза него са средње фазе.

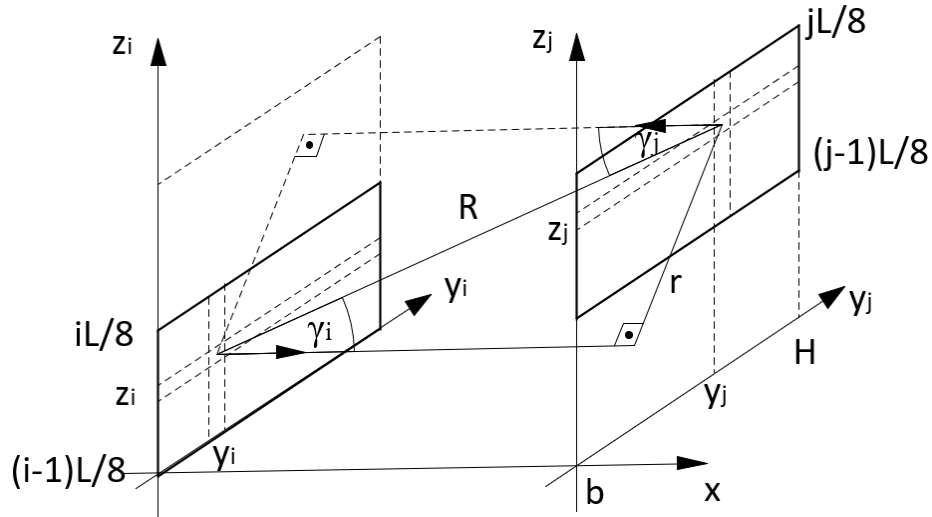
ЗАДАТАК 10

Написати израз у форми четвороструког интеграла из кога се може одредити фактор виђења између правоугаоних области i и j димензија $L/8 \times H$ (слика 10.1). Израз под интегралом треба да садржи само променљиве по којима се врши интеграција. Може се сматрати да су све димензије означене на слици познате.



Слика 10.1

Решење



Слика 10.2

Фактор виђења између правоугаоних површи i и j одређује се по формули

$$F_{ij} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cos \gamma_j}{R^2 \pi} dS_i dS_j \quad (10.1)$$

Потег између два делића ових површи (R) може се израчунати као:

$$R^2 = b^2 + r^2 = b^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \quad (10.2)$$

Пошто ове две површи припадају паралелним равнинама, углови између вектора нормале на површину и потега (γ_i и γ_j) су једнаки, па важи:

$$\cos \gamma = \cos \gamma_i = \cos \gamma_j = \frac{b}{R} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}} \quad (10.3)$$

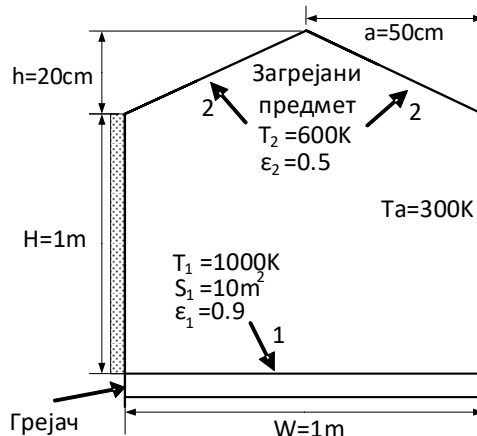
Сада је комбиновањем израза (10.1), (10.2) и (10.3) могуће написати коначан израз за израчунавање фактора виђења између правоугаоних површи i и j :

$$F_{ij} = \frac{1}{\frac{L}{8}H} \int_{y_i=0}^{y_i=H} \int_{z_i=(i-1)\frac{L}{8}}^{z_i=i\frac{L}{8}} \int_{y_j=0}^{y_j=H} \int_{z_j=(j-1)\frac{L}{8}}^{z_j=j\frac{L}{8}} \frac{b^2}{\pi (b^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2)^2} dz_j dy_j dz_i dy_i \quad (10.4)$$

где је $i, j = 1, 2, \dots, 8$.

ЗАДАТАК 11

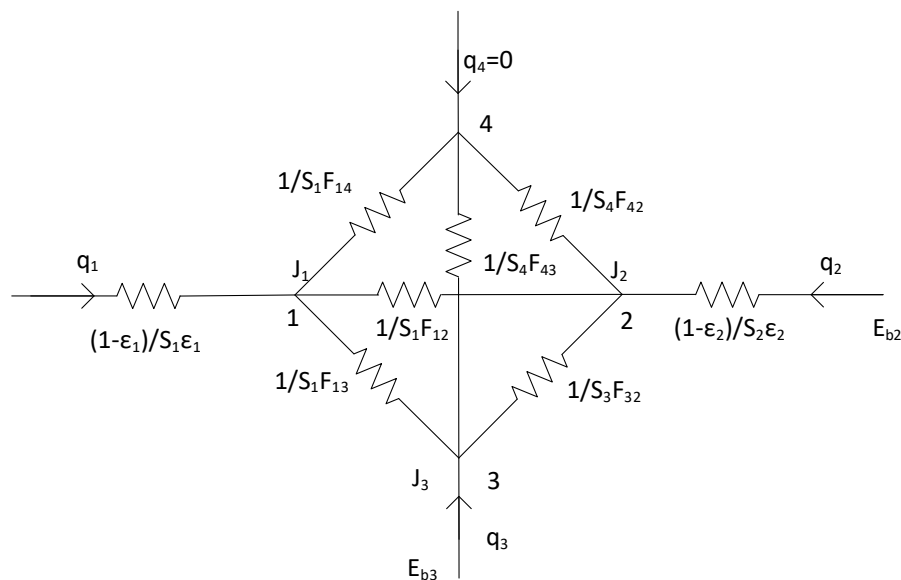
Написати систем од четири једначине са 4 непознате чијим се решавањем може одредити снага загревања грејача при којој се остварују температуре приказане на слици (T_1 , T_2 и T_a). Дужина (дубинска координата) површи (1) и (2) износи L . Десна и предња вертикална површ су отворене, односно кроз њих се топлота зрачењем размењује са амбијентом. Лева и задња страна су идеално топлотно изоловане. Пренос топлоте струјањем се може занемарити, а за површи се може сматрати да зраче дифузно. “Фактор виђења” између паралелних правоугаоних површи димензија $L \times W$, које се налазе на растојању H , износи F_1 , а сопствени фактор виђења површи састављене од једног правоугаоника димензија $L \times H$ и једног дела облика „кућице“ (правоугаоник $W \times H$ и једнакокраки троугао висине h и дужине основе W) је F_2 .



Слика 11.1

Решење

Пошто је при прорачунима могуће занемарити пренос топлоте струјањем, топлотни процес се може описати радијационом шемом приказаном на слици 11.2. За такав приступ је потребно формирати затворену површ. Поред површи грејача (1) и загреваног предмета (2), затворени простор се формира помоћу површи 3, коју чине десна и предња вертикална површ (које се могу посматрати као апсолутно црно тело) и површи 4 коју чине лева и задња вертикална површ (непознате температуре T_x). Површине површи 3 и 4 су једнаке и износе $S_3 = S_4 = H \cdot L + H \cdot W + \frac{1}{2} \cdot h \cdot W$.



Слика 11.2

За решавање радијационе шеме је потребно одредити вредности међусобних фактора виђења између површи (1, 2, 3 и 4).

Фактор виђења између површи (1) и (2) је једнак фактору виђења између површи (1) и правоугаоне површи димензија $H \times L$ која је паралелна површи (1) и налази се на растојању H од ње (ова површ ће се означити са (2')). Следи да је $F_{12} = F_{12'}$, На основу поставке задатка, $F_{12'} = F_1$.

Даље, на основу димензија површи (1) и (2) добијамо ($S_2 = 2 \cdot (L \cdot \sqrt{a^2 + h^2})$):

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} F_{12} = \frac{S_1}{S_2} F_1 \quad (11.1)$$

За површ 1 важи $F_{11} = 0$. Због симетрије за површи 3 и 4 важи $F_{13} = F_{14}$, па су фактори виђења између површи (1) и (3), односно (1) и (4):

$$F_{13} = F_{14} = \frac{1 - F_{12} - F_{11}}{2} = \frac{1 - F_1}{2} \quad (11.2)$$

$$F_{41} = F_{31} = \frac{S_1}{S_3} F_{13} = \frac{S_1}{S_4} F_{14} = \frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{1 - F_1}{2} \quad (11.3)$$

На основу симетрије следи:

$$F_{32} = F_{32'} = F_{31} = \frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{1 - F_1}{2} \quad (11.4)$$

$$F_{42} = F_{42'} = F_{41} = \frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{1 - F_1}{2} \quad (11.5)$$

Из геометрије добијамо и преостали фактор виђења између површи (2) и (3):

$$F_{23} = \frac{S_3}{S_2} F_{32} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{1 - F_1}{2} \quad (11.6)$$

$$F_{24} = \frac{S_4}{S_2} F_{42} = \frac{S_1}{S_2} \cdot \frac{1 - F_1}{2} \quad (11.7)$$

По тексту задатка важи $F_{33} = F_{44} = F_2$, одакле се долази до:

$$F_{43} = 1 - F_{41} - F_{42} - F_{44} = 1 - 2 \cdot \frac{S_1}{S_3} \cdot \frac{1 - F_1}{2} - F_2 \quad (11.8)$$

Из познатих температура самих површи се долази до:

$$E_{b1} = \sigma_c T_1^4 \quad (11.9)$$

$$E_{b2} = \sigma_c T_2^4 \quad (11.10)$$

$$E_{b3} = \sigma_c T_a^4 \quad (11.11)$$

Једначина за чвор 1:

$$q_1 = \frac{E_{b1} - J_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1}} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{S_1 F_{12}}} + \frac{J_1 - J_3}{\frac{1}{S_1 F_{13}}} + \frac{J_1 - J_4}{\frac{1}{S_1 F_{14}}} \quad (11.12)$$

Једначина за чвор 2:

$$q_2 = \frac{E_{b2} - J_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{J_2 - J_1}{\frac{1}{S_1 F_{12}}} + \frac{J_2 - J_3}{\frac{1}{S_3 F_{32}}} + \frac{J_2 - J_4}{\frac{1}{S_4 F_{42}}} \quad (11.13)$$

Једначина за чвор 3:

$$q_3 = \frac{J_3 - J_1}{\frac{1}{S_1 F_{13}}} + \frac{J_3 - J_2}{\frac{1}{S_3 F_{32}}} + \frac{J_3 - J_4}{\frac{1}{S_4 F_{43}}} \quad (11.14)$$

Пошто се површ 3 може посматрати као апсолутно црно тело, за чвор 3 важи следећа једнакост: $J_3 = E_{b3}$.

Једначина за чвор 4:

$$q_4 = 0 = \frac{J_4 - J_1}{\frac{1}{S_1 F_{14}}} + \frac{J_4 - J_2}{\frac{1}{S_4 F_{42}}} + \frac{J_4 - J_3}{\frac{1}{S_4 F_{43}}} \quad (11.15)$$

Из једначине (11.12) добија се:

$$J_1 = E_{b1} - q_1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} = \sigma_c T_1^4 - q_1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} \quad (11.16)$$

Заменом овог израза у изразе (11.12), (11.13), (11.14) и (11.15) добија се тражени систем од четири једначине са четири непознате (q_1, J_2, J_3, J_4):

$$q_1 = \frac{\sigma_c T_1^4 - q_1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} - J_2}{\frac{1}{S_1 F_{12}}} + \frac{\sigma_c T_1^4 - q_1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} - J_3}{\frac{1}{S_1 F_{13}}} + \frac{\sigma_c T_1^4 - q_1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} - J_4}{\frac{1}{S_1 F_{14}}} \quad (11.17)$$

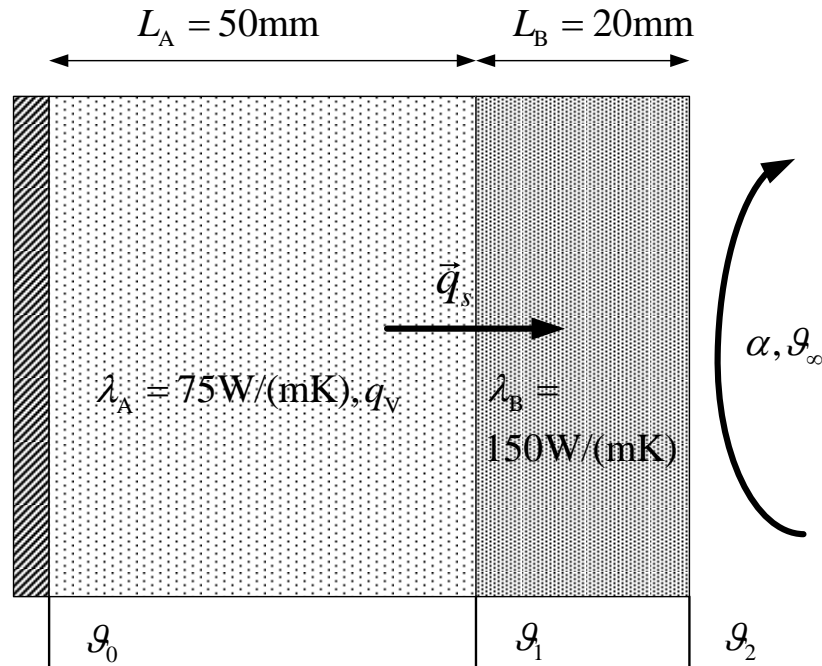
$$\frac{\sigma_c T_2^4 - J_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{J_2 - \sigma_c T_1^4 - q_1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1}}{\frac{1}{S_1 F_{12}}} + \frac{J_2 - J_3}{\frac{1}{S_3 F_{32}}} + \frac{J_2 - J_4}{\frac{1}{S_4 F_{42}}} \quad (11.18)$$

$$J_3 = \sigma_c T_a^4 \quad (11.19)$$

$$0 = \frac{J_4 - \sigma_c T_1^4 - q_1 \cdot \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1}}{\frac{1}{S_1 F_{14}}} + \frac{J_4 - J_2}{\frac{1}{S_4 F_{42}}} + \frac{J_4 - J_3}{\frac{1}{S_4 F_{43}}} \quad (11.20)$$

ЗАДАТАК 12

Раван зид се састоји из два слоја, израђена од различитих материјала А и В. У слоју А се равномерно по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v = 1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$. Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици 12.1. Гранична површ слоја А је добро топлотно изолована, а гранична површ слоја В се хлади водом температуре $\vartheta_\infty = 30^\circ\text{C}$, уз коефицијент преласка топлоте струјањем $\alpha = 1000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. Скицирати расподелу температуре дуж x осе у стационарном стању. Одредити температуру граничне изоловане површи слоја А (ϑ_0) и температуру граничне хлађене површи слоја В (ϑ_2).



Слика 12.1

Решење

За сваки од слојева се може поставити и решити општа једначина температурног поља. За слој А она гласи:

$$\lambda_A \cdot \Delta \vartheta + q_v = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (12.1)$$

где је са Δ означен *Laplace*-ов оператор који у *Descartes*-овом координатном систему има следећи облик

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (12.2)$$

У стационарном стању се расподела температуре не мења у времену, те важи:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \quad (12.3)$$

Општа једначина температурног поља за слој А у стационарном стању гласи:

$$\lambda_A \cdot \Delta \vartheta + q_V = 0 \quad (12.4)$$

$$\lambda_A \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + q_V = 0 \quad (12.5)$$

Пошто се посматра једнодимензиони пренос топлоте важи:

$$\vartheta = \vartheta(x) = \text{const}(y, z) \quad (12.6)$$

што повлачи за собом:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = 0 \quad (12.8)$$

Заменом у (12.5) се добија:

$$\lambda_A \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + q_V = 0 \quad (12.9)$$

Њено опште решење је:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (12.10)$$

где су C_1 и C_2 интеграционе константе.

За слој В општа једначина температурног поља гласи:

$$\lambda_B \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0 \quad (12.11)$$

чије опште решење је:

$$\vartheta(x) = C_3 \cdot x + C_4 \quad (12.12)$$

где су C_3 и C_4 интеграционе константе.

Четири непознате константе се могу одредити из граничних услова који се постављају на површима дисконтинуитета материјалне средине:

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0_+) = 0 \quad (12.13)$$

$$-\lambda_A \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_{A-}) = -\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_{A+}) \quad (12.14)$$

$$\vartheta(L_{A-}) = \vartheta(L_{A+}) \quad (12.15)$$

$$-\lambda_B \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(L_A + L_B) = \alpha \cdot (\vartheta(L_A + L_B) - \vartheta_\infty) \quad (12.16)$$

Из услова (12.13) се добија:

$$-\frac{q_V \cdot 0}{\lambda_A} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (12.17)$$

Из услова (12.15) се добија:

$$-\frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_2 = C_3 \cdot L_A + C_4 \quad (12.18)$$

Из услова (12.14) се добија:

$$-\lambda_A \cdot \left(-\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_A} \right) = -\lambda_B \cdot C_3 \Rightarrow C_3 = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \quad (12.19)$$

Из услова (12.16) се добија:

$$-\lambda_B \cdot C_3 = \alpha \cdot (C_3 \cdot (L_A + L_B) + C_4 - \vartheta_\infty) \quad (12.20)$$

$$-\lambda_B \cdot \left(-\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \right) = \alpha \cdot \left(-\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot (L_A + L_B) + C_4 - \vartheta_\infty \right) \quad (12.21)$$

$$q_V \cdot L_A = -\frac{q_V \cdot \alpha \cdot L_A^2}{\lambda_B} - \frac{q_V \cdot \alpha \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \alpha \cdot C_4 - \alpha \cdot \vartheta_\infty \quad (12.22)$$

$$C_4 = \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.23)$$

На основу једначина (12.12), (12.19) и (12.23) може се добити расподела температуре у слоју В:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot x + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.24)$$

Заменом бројних вредности у (12.24) се добија температура граничне хлађене површи слоја В:

$$\vartheta_2 = \vartheta(L_A + L_B) = -\frac{q_V \cdot L_A}{\lambda_B} \cdot (L_A + L_B) + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{\lambda_B} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.25)$$

$$\vartheta_2 = \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^\circ C \quad (12.26)$$

Заменом (12.19) и (12.23) у (12.18) се добија:

$$C_2 = \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.27)$$

Расподела температуре у слоју А се добија заменом израза (12.17) и (12.27) у (12.10):

$$\vartheta(x) = -\frac{q_V \cdot x^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty \quad (12.28)$$

из чега се израчунава тражена температура изоловане површи:

$$\vartheta_0 = \vartheta(0) = \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} + \vartheta_\infty = 140^\circ C \quad (12.29)$$

Могућ је и препоручљив **други приступ** решавању овог задатка:

Укупна генерисана снага у слоју А се може израчунати на следећи начин:

$$q_A = \iiint_{V_A} q_V \cdot dV = q_V \cdot \iiint_{V_A} dV = q_V \cdot V_A = q_V \cdot S \cdot L_A \quad (12.30)$$

Снага генерисана у слоју А се у стационарном стању преноси струјањем на воду на граничној површи 2:

$$q_A = q_V \cdot S \cdot L_A = \alpha \cdot S \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_\infty) \quad (12.31)$$

Из (12.31) се може израчунати температура граничне површи 2:

$$\vartheta_2 = \frac{q_V L_A}{\alpha} + \vartheta_\infty = 105^\circ C \quad (12.32)$$

Познајући отпор преносу топлоте кроз слој В, може се израчунати температура граничне површи 1:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_A \cdot R_B^T \quad (12.33)$$

$$R_B^T = \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \quad (12.34)$$

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = q_V \cdot L_A \cdot S \cdot \frac{1}{\lambda_B} \cdot \frac{L_B}{S} \quad (12.35)$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = 115^\circ C \quad (12.36)$$

Користећи услов (12.15) може се одредити расподела температуре у слоју А:

$$-\frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + C_2 = \vartheta_1 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} \quad (12.37)$$

$$C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} \quad (12.38)$$

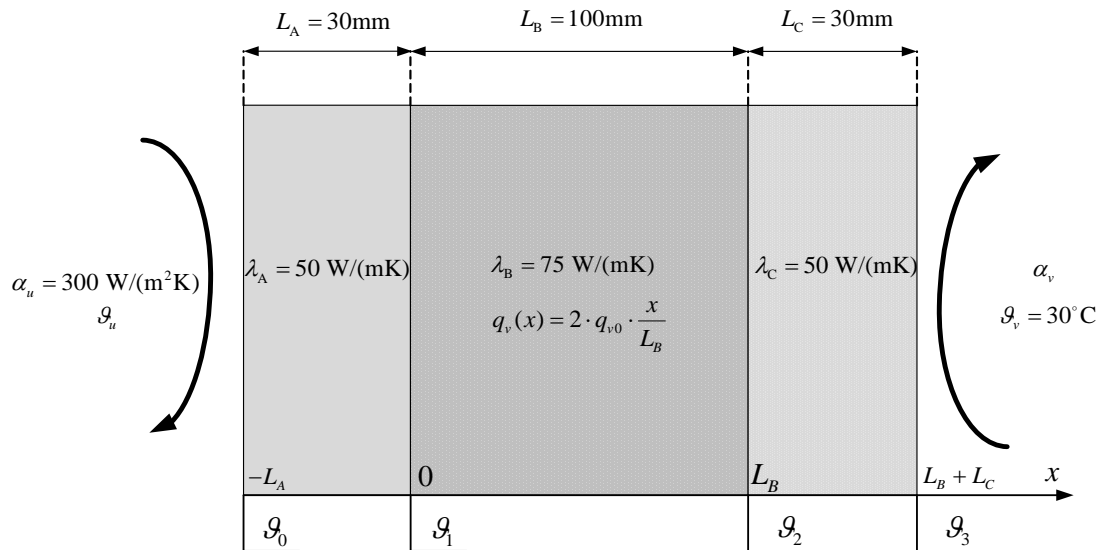
Температура граничне изоловане површи слоја А се добија заменом (12.38) у (12.10):

$$\vartheta_0 = C_2 = \vartheta_\infty + \frac{q_V \cdot L_A^2}{2 \cdot \lambda_A} + \frac{q_V \cdot L_A}{\alpha} + \frac{q_V \cdot L_A \cdot L_B}{\lambda_B} = 140^\circ C \quad (12.39)$$

ЗАДАТАК 13

Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала А, В и С. У слоју В се по запремини генерише топлота запреминском густином снаге $q_v(x) = 2 \cdot q_{v0} \cdot \frac{x}{L_B}$ ($q_{v0} = 250 \cdot 10^3 \text{ W/m}^3$). Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици. Гранична површ слоја А се хлади уљем непознате температуре (ϑ_u), уз коефицијент преноса топлоте струјањем $\alpha_u = 300 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, а гранична површ слоја С се хлади водом температуре $\vartheta_v = 30^\circ\text{C}$, при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ($\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$) на следећи начин: $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta|/20)^{0,25}$ ($\alpha_{v0} = 1000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$).

Одредити непознату температуру уља тако да се тачно четвртина укупне снаге генерисане у слоју В преноси на уље. Колико износе температуре $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$? Колико износи максимална температура слоја В?

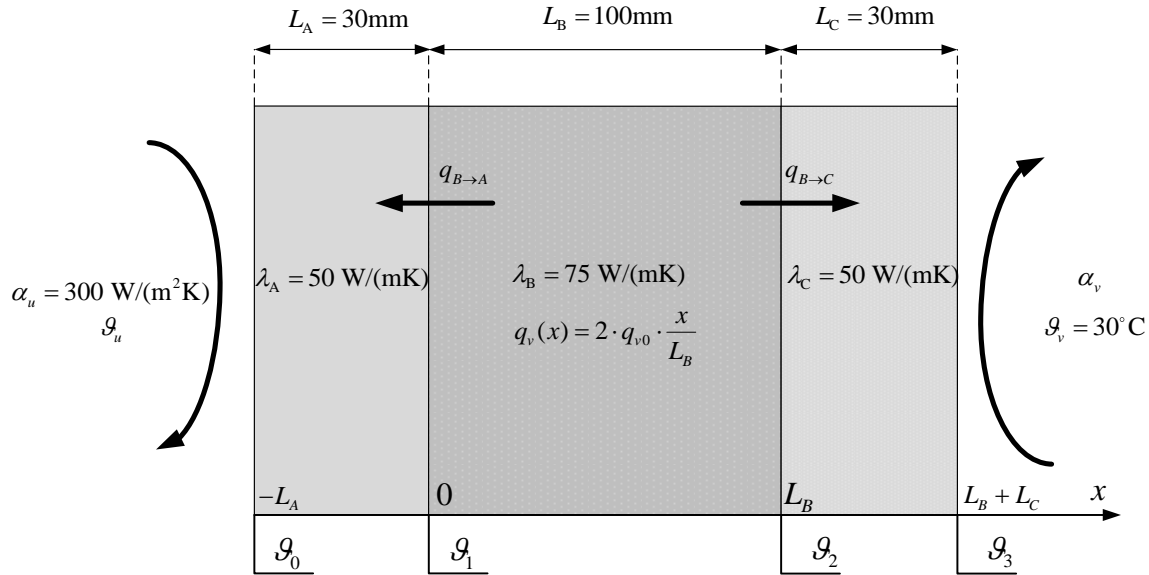


Слика 13.1

Решење

Укупна снага којом се топлота генерише у области В добија се интеграцијом запреминске густине снаге по запремини области В:

$$q_{genB} = \iiint_B q_v \cdot dV = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x) \cdot S \cdot dx = \frac{q_{v0} \cdot S}{L_B} (L_B^2 - 0) = q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (13.1)$$



Слика 13.2

На основу услова задатка да се четвртина снаге генерисане у области В пренеси на уље, снаге којима се енергија преноси из области В ка области А ($q_{B \rightarrow A}$) и из области В ка области С ($q_{B \rightarrow C}$) (слика 13.2) износе:

$$q_{B \rightarrow A} = \frac{1}{4} \cdot q_{genB} = \frac{1}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (13.2)$$

$$q_{B \rightarrow C} = q_{genB} - q_{B \rightarrow A} = \frac{3}{4} \cdot q_{genB} = \frac{3}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B$$

С обзиром да се посматра устаљено стање, без генерисања топлоте у области С, целокупна снага која се из области В пренесе ка области С се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура ϑ_3 ($\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$):

$$q_{strujanja_v} = q_{B \rightarrow C} = \alpha_v(\theta) \cdot S \cdot \theta = \frac{\alpha_{v0} \cdot S}{20^{0,25}} \cdot \theta^{1,25} \quad (13.3)$$

$$\theta = \left(\frac{q_{B \rightarrow C} \cdot 20^{0,25}}{\alpha_{v0} \cdot S} \right)^{0,8} = \left(\frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot 20^{0,25}}{4 \cdot \alpha_{v0}} \right)^{0,8} = 19^\circ C \quad (13.4)$$

$$\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v \Rightarrow \vartheta_3 = \theta + \vartheta_v = 49^\circ C \quad (13.5)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = q_{B \rightarrow C} \cdot R_C^T = q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} \quad (13.6)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} = \vartheta_3 + \frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot L_C}{4 \cdot \lambda_C} = 60,25^\circ C \quad (13.7)$$

Расподела температуре у области В добија се решавањем опште температурне једначине која за поменућу област има следећи облик:

$$\lambda_B \cdot \frac{d^2 \theta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \quad (13.8)$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\frac{q_v(x)}{\lambda_B} = -\frac{2 \cdot q_{v0} \cdot x}{\lambda_B \cdot L_B} \quad (13.9)$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = -\frac{q_{v0} \cdot x^3}{3 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (13.10)$$

Интеграционе константе које фигуришу у (13.10) могу се одредити из граничних услова за десну граничну површ слоја В (на тој граничној површи познајемо и вредност температуре и њен градијент – у овом случају извод по x координати).

$$\begin{aligned} \vartheta(L_{B-}) &= \vartheta_2 \\ -\lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(L_{B-}) \cdot S &= q_{B \rightarrow C} \end{aligned} \quad (13.11)$$

Након одређивања интеграционих константи, уврштавањем њихових вредности у једначину (13.10) може се добити температура ϑ_1 :

$$\vartheta_1 = \vartheta(0) = C_2 = 63,027^\circ C \quad (13.12)$$

Остале непознате температуре се добијају на следећи начин:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} \Rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_1 - R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} = 59,28^\circ C \quad (13.13)$$

$$q_{B \rightarrow A} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_u) \Rightarrow \vartheta_u = \vartheta_0 - \frac{q_{B \rightarrow A}}{\alpha_u \cdot S} = 38,44^\circ C \quad (13.14)$$

Вредност x координате на којој се постиже максимална температура у области В (x^*) може се добити диференцирањем расподеле температуре која је дата изразом (13.10) и изједначавањем добијеног израза са нулом. Потом се заменом у (13.10), за тако добијену вредност x^* , добија максимална температура у области В.

$$x^* = \frac{L_B}{2} = 50 \text{ mm} \quad (13.15)$$

$$\vartheta_{max B} = \vartheta(x^*) = 65,81^\circ C \quad (13.16)$$

ЗАДАТАК 14

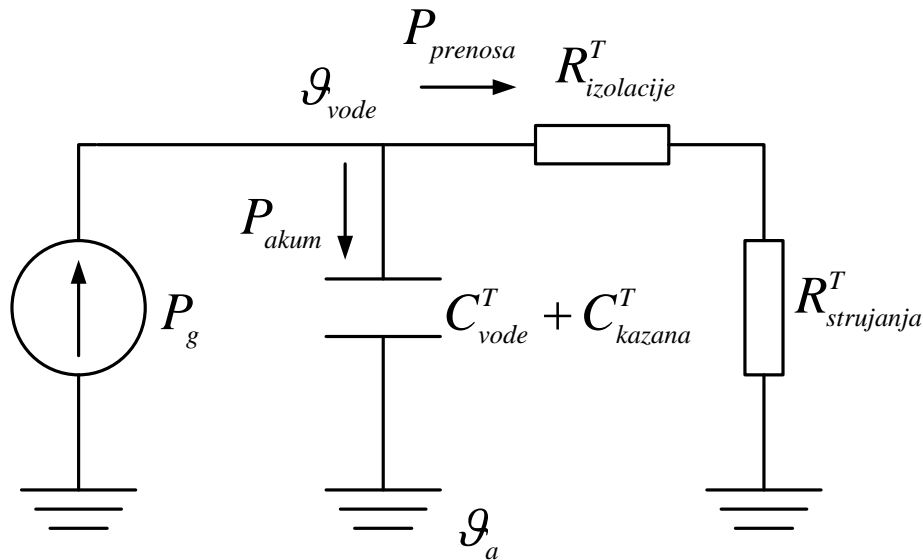
У бојлеру запремине 50l налази се вода на температури амбијента $\vartheta_a = 20^\circ C$. Бојлер поседује “on-off” (хистерезисни) регулатор који искључује грејач када температура воде пређе подешену вредност за 5 К, а укључује грејач када температура воде падне испод подешене вредности за 5 К. Израчунати утрошену електричну енергију (у kWh) у периоду од 24h ако је подешена температура у бојлеру $90^\circ C$. Сматрати да се у бојлеру током посматраних 24h не размењује вода. Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача $P_{gr} = 2 \text{ kW}$, маса казана $m_k = 9,5 \text{ kg}$, површина казана (унутрашња површина топлотне изолације) $S_u = 0,8 \text{ m}^2$, дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности $\lambda = 0,1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $\delta = 30 \text{ mm}$, спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације) $S_s = 1 \text{ m}^2$. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи $\alpha_s = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан $\alpha_u \gg \alpha_s$. Густина воде износи $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, специфични

топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ и специфични топлотни капацитет казана $c_{pk} = 474 \text{ J/(kgK)}$. Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана израчунавати по формула за раван зид површине $(S_u + S_s) / 2$.

Решење

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења: занемарен је отпор преношењу топлоте кроз воду и зид казана, као и топлотни капацитет изолације. Сматра се да маса воде и зид бојлера представљају изотермичку запремину.

Пошто се вода у бојлеру на почетку посматраног интервала (дужине 24h) налази на температури амбијента, хистерезисни регулатор укључује грејач. Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на слици.



Слика 14.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214,5 \text{ kJ/kg} \quad (14.1)$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околина износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{\frac{S_s + S_u}{2}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0,5333 \text{ K/W} \quad (14.2)$$

Укупна снага којом грејач генерише топлотну енергију представља збир снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (14.3)$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (14.4)$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \quad (14.5)$$

Са θ је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент.

Треба напоменути да ова анализа и њени резултати важе само под условом да нема протока воде кроз бојлер. У супротном би се јавиле додатне компоненте снаге којом се енергија размењује са амбијентом, јер би посматрани систем представљао отворени систем са протоком флуида. У том случају би и варијације температуре воде по запремини бојлера биле веће, па би се поставило питање оправданости претпоставке да унутрашњост бојлера представља изотермичку запремину.

Заменом израза (14.4) и (14.5) у једначину (14.3) се добија диференцијална једначина која описује промену пораста температуре воде и казана у односу на амбијент.

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (14.6)$$

Даљим сређивањем се добија једначина у следећој форми:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (14.7)$$

$$R^T \cdot P_g = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (14.8)$$

где је са τ означена временска константа система. Њено решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (14.9)$$

где је са θ_0 означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са θ_∞ пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго, што овде није случај).

У стационарном стању нема промене температуре, те је извод температуре (па и пораста температуре) једнак нули:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (14.10)$$

те се заменом у једначину (14.8) добија:

$$\theta_\infty = P_g \cdot R^T \quad (14.11)$$

У тренутку t^* пораст температуре достиже вредност θ^* (који у овом случају одговара температури воде од 95°C). Време t^* се израчунава из једначине (14.9) примењене за тренутак t^* :

$$\theta^* = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) \quad (14.12)$$

$$(\theta_0 - \theta_\infty) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \theta^* - \theta_\infty \quad (14.13)$$

$$e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\theta^* - \theta_{\infty}}{\theta_0 - \theta_{\infty}} \quad (14.14)$$

$$-\frac{t^*}{\tau} = \ln \frac{\theta^* - \theta_{\infty}}{\theta_0 - \theta_{\infty}} \quad (14.15)$$

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_{\infty}}{\theta^* - \theta_{\infty}} \quad (14.16)$$

Израз (14.16) је општи и важи како за загревање, тако и за хлађење и у даљем тексту ће бити искључиво коришћен.

За конкретан случај, време загревања воде од 20°C до 95°C износи:

$$t_{zagr1} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{0 - 0,5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 2000} = 2,3168h \quad (14.17)$$

Након што температура воде достигне 95°C, регулатор искључује грејач и вода у бојлеру почиње да се хлади. За време хлађења од 95°C до 85°C се добија:

$$t_{hladjenja} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 0}{(85 - 20) - 0,5333 \cdot 0} = 4,547h \quad (14.18)$$

Након што температура воде падне на 85°C, регулатор поново укључује грејач и температура воде у бојлеру почиње да расте. Време загревања воде од 85°C до 95°C износи:

$$t_{zagrevanja} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(85 - 20) - 0,5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 2000} = 0,3188h \quad (14.19)$$

Анализира се период од 24h. На почетку тог периода, вода се загрева од 20°C до 95°C. Након тога се одиграва више циклуса хлађења од 95°C до 85°C и загревања од 85°C до 95°C. Један такав циклус траје:

$$t_{ciklusa} = t_{zagrevanja} + t_{hladjenja} = 4,8658h \quad (14.20)$$

Укупан број таквих циклуса у току дана је:

$$n = \frac{24h - 2,3168h}{4,8658h} = 4,45 \quad (14.21)$$

Пети циклус започиње хлађењем воде. Оно не стигне да се заврши у току посматраног дана јер је:

$$24h - 2,3168h - 4 \cdot 4,8658h = 2,22h < 4,547h \quad (14.22)$$

Закључак је да се загревање воде од 85°C до 95°C обави четири пута у току дана. Укупна утрошена електрична енергија у току једног дана износи:

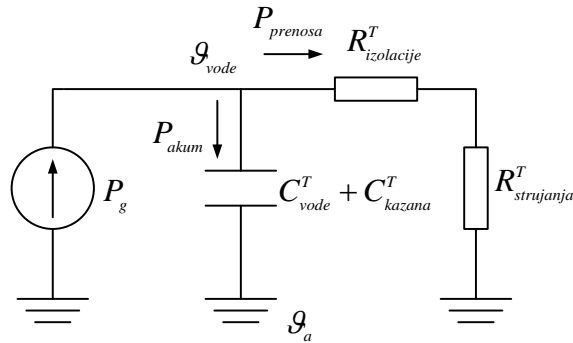
$$\begin{aligned} W_{el} &= P_g \cdot (t_{zagr1} + 4 \cdot t_{zagrevanja}) = 2 \text{ kW} \cdot (2,3168h + 4 \cdot 0,3188h) = \\ &= 4,6336 \text{ kWh} + 2,5504 \text{ kWh} = 7,184 \text{ kWh} \end{aligned} \quad (14.23)$$

ЗАДАТАК 15

Вода у бојлеру запремине 80 литара са грејачем снаге 2 kW се загреје са 20°C на 75°C за 175 минута. Посматрати следећу ситуацију: вода се загреје на 75°C, после чега се грејач искључи и остаје трајно искључен. У истом тренутку из бојлера се источи 10 литара мешавине топле и хладне воде (температура хладне воде износи 20°C), температуре 55°C. После тога нема даље потрошње воде. После ког времена ће температура воде у бојлеру да опадне на 50°C? Сматрати да је температура амбијента 20°C и да је снага преноса топлоте од воде ка амбијенту сразмерна разлици температуре воде и амбијента. Густина воде износи $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$, специфични топлотни капацитет металног казана $c_{pk} = 474 \text{ J/(kgK)}$, а његова тежина $m_k = 20 \text{ kg}$. Топлотни капацитет изолације се може занемарити.

Решење

Топлотна шема која описује наведени проблем:



Слика 15.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C^T_{kazana} + C^T_{vode} = m_k \cdot c_{pk} + \rho_v \cdot V \cdot c_{pv} = 345,48 \text{ kJ/K} \quad (15.1)$$

Промена пораста температуре воде у бојлеру у односу на амбијент описана је следећом диференцијалном једначином:

$$C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} = P_g \quad (15.2)$$

Сређивањем једначине (15.2) се добија:

$$R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = R^T \cdot P_g \quad (15.3)$$

$$\tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \quad (15.4)$$

где је са τ означена временска константа загревања (хлађења):

$$\tau = R^T \cdot C^T \quad (15.5)$$

Решење диференцијалне једначине гласи:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{stac} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (15.6)$$

где је:

- θ_0 - пораст температуре воде у тренутку $t = 0$
- θ_{stac} - пораст температуре воде у устаљеном стању које би наступило када би загревање трајало неограничено дуго.

У посматраном случају загревања воде са 20°C на 75°C , величине које фигуришу у претходном изразу износе:

$$\theta_0 = 0 \text{ K} \quad (15.7)$$

$$\theta_{stac} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \quad (15.8)$$

Заменом претходне две вредности у израз за промену температуре и посматрањем тренутка у коме вода достиже температуру 75°C (тренутак у коме се грејач искључује – 175 минута након почетка загревања), може се одредити временска константа загревања, а потом из ње и топлотни отпор према амбијенту.

$$\theta(t^*) = \theta^* = 55 \text{ K} = \frac{\tau}{C^T} \cdot P_g \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}) \quad (15.9)$$

Претходна једначина је трансцедентна по τ и може се решити итеративним поступком (или употребом одговарајућег калкулатора):

$$\tau_{k+1} = \frac{C^T \cdot \theta^*}{P_g \cdot (1 - e^{-\frac{t^*}{\tau_k}})} \quad (15.10)$$

Узимањем почетног погађања $\tau = 3\text{h}$, након довољног броја итерација добија се приближна вредност временске константе:

$$\tau = 14,333\text{h} \quad (15.11)$$

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешавине топле и хладне воде температуре 55°C :

Енергија коју треба довести (позитиван број) / одвести (негативан број) телу чији топлотни капацитет износи C^T да би јој се температура променила са ϑ_p на ϑ се израчунава као:

$$E = C^T \cdot (\vartheta - \vartheta_p) \quad (15.12)$$

За воду запремине $V = 10\text{l}$, топлотни капацитет износи

$$C_{10l\ vode}^T = \rho \cdot V \cdot c_p \quad (15.13)$$

(у приближним прорачунима се може сматрати да се ρ и c_p не мењају са температуром)

Одређивање почетне температуре воде у бојлеру након истицања 10 литара мешавине топле и хладне воде температуре 55°C :

$$345,48 \text{ kJ/K} \cdot (75 - \vartheta_x) = 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4200 \text{ kJ/(kgK)} \cdot (55 - 20) \quad (15.14)$$

$$\begin{aligned} \vartheta_x &= 75 - (10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot 4200 \text{ kJ/(kgK)} \cdot (55 - 20)) / 345,48 \text{ kJ/K} \\ &= 70,74^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (15.15)$$

Време хлађења воде са $70,74^{\circ}\text{C}$ на 50°C одређује се помоћу следећег израза (изведен у задатку 14 са рачунских вежби):

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_{stac}}{\theta^* - \theta_{stac}} = 14,333h \cdot \ln \frac{50,74 - 0}{30 - 0} = 7,53h \quad (15.16)$$

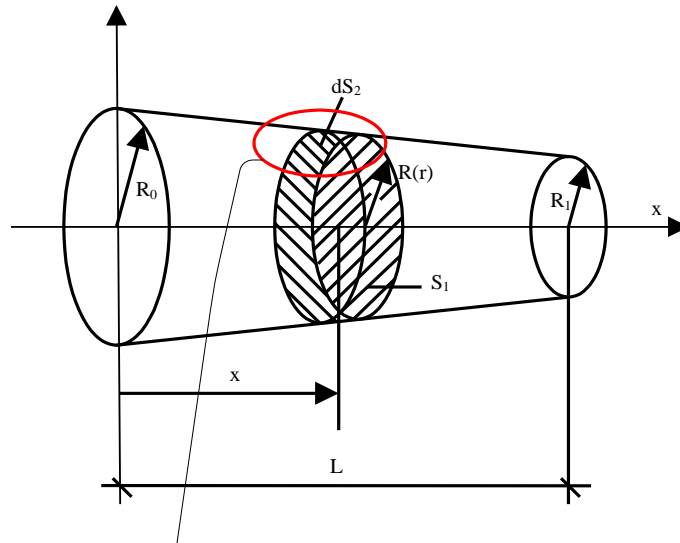
ЗАДАТАК 16

На слици 16.1 је приказан конусни пресек тела начињеног од керамике. Пречник кружног попречног пресека је променљив. У постављеном координатном систему зависност пречника од растојања x је линеарна и одређена изразом $D = D_0 + a \cdot x$, при чему је $a = -0,25$ и $D_0 = 62,5 \text{ mm}$. Базис керамичког тела мањег пречника налази се на растојању $x_1 = L = 200 \text{ mm}$ од координатног почетка (слика 16.1). Температуре граничних базиса су константне и износе $T_0 = 400 \text{ K}$ и $T_1 = 600 \text{ K}$, а омотач је идеално топлотно изолован од околине.

- Извести израз за расподелу температуре по x координати у општим бројевима.
- Израчунати бројну вредност снаге преноса топлоте провођењем од једног до другог базиса

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{l}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{l}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\vec{l}_x$.

Специфична топлотна проводност керамике се у посматраном температурном опсегу не мења значајно ($3,64 \text{ W/mK}$ за 400 K и $3,28 \text{ W/mK}$ за 600 K), па се може усвојити да она има приближно константну вредност од $3,46 \text{ W/mK}$.



Слика 16.1

Решење

Из услова да је извод температуре по x координати константан у сваком од пресека по x оси следи:

$$\vec{q}_s = \vec{q}_s(x) = \text{const}(r, \varphi) \quad (16.1)$$

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \text{grad}\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \right) \quad (16.2)$$

Из (16.1) и (16.2) следи:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \vec{i}_x \quad (16.3)$$

Флуks вектора површинске густине снаге представља снагу (q), чија је вредност константна у сваком од пресека по x оси:

$$q = \iint_S \vec{q}_s \cdot d\vec{S} \quad (16.4)$$

$$q = \iint_S -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \vec{i}_x \cdot \vec{i}_x \cdot dS \quad (16.5)$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \iint_S dS = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \cdot \frac{D^2(x) \cdot \pi}{4} \quad (16.6)$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \cdot \frac{(D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi}{4} \quad (16.7)$$

Интеграљењем једначине (16.7) може се одредити просторна расподела температуре у стационарном стању:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \quad (16.8)$$

$$d\vartheta = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \cdot dx \quad (16.9)$$

Једначина (16.9) представља диференцијалну једначину код које су променљиве раздвојене. Њено решење се налази интеграцијом:

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(x)} d\vartheta = -\int_0^x \frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot (D_0 + a \cdot x)^2 \cdot \pi} \cdot dx \quad (16.10)$$

$$\vartheta(x) - \vartheta_0 = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot a \cdot \pi} \left(-\frac{1}{D_0 + a \cdot x} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (16.11)$$

Из једначине (16.11) написане за десни базис се може одредити снага којом се преноси топлота између 2 базиса:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = -\frac{4 \cdot q}{\lambda \cdot a \cdot \pi} \left(-\frac{1}{D_0 + a \cdot L} + \frac{1}{D_0} \right) \quad (16.12)$$

$$q = -\frac{\lambda \cdot a \cdot \pi \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_0)}{4 \cdot \left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot L}\right)} = -2,123W \quad (16.13)$$

Заменом израза (16.13) у (16.11), добија се расподела температуре по x оси:

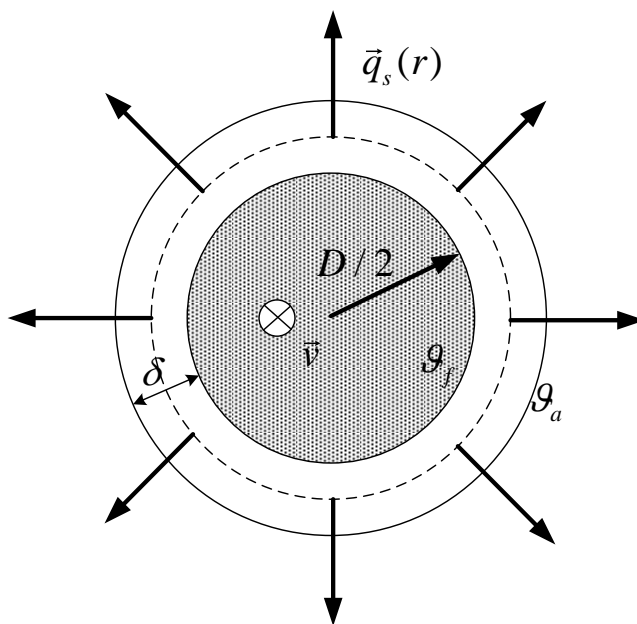
$$\vartheta(x) = \vartheta_0 + \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot L}\right)} \cdot \left(\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_0 + a \cdot x}\right) \quad (16.14)$$

ЗАДАТАК 17

Кроз једну металну цев кружног попречног пресека и спољашњег пречника 40 mm великом брзином протиче флуид температуре веће од амбијента. Може се сматрати да је отпор преласку топлоте струјањем са флуида на унутрашњи зид цеви занемарљиво мали. Цев је танка, тако да се може сматрати да је и отпор провођењу топлоте кроз цев занемарљив. Око цеви се поставља слој изолације топлотне проводности $\lambda = 0,2 \text{ W/(m K)}$. Коefицијент преласка топлоте са спољне површи изолације на околни ваздух износи $\alpha = 8,5 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Одредити при којој дебљини изолације је снага преноса топлоте од флуида ка ваздуху температуре амбијента максимална. Која је минимална дебљина изолације којом се постиже да су губици 50% мањи од оних који се имају када изолација уопште не постоји.

Израз за градијент температуре у цилиндричном координатном систему гласи $grad\vartheta = \frac{\partial\vartheta}{\partial r}\vec{l}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\vec{l}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\vec{l}_z$.

Решење



Слика 17.1

Укупан отпор преносу топлоте са флуида ка амбијенту састоји се из отпора преносу топлоте провођењем кроз слој изолације и отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи изолације.

У даљем тексту биће одређена компонента топлотног отпора провођењу кроз слој изолације.

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \text{grad}\vartheta = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial\vartheta}{\partial z} \vec{i}_z \right) \quad (17.1)$$

Из разлога симетрије, температура је константна на свакој од цилиндричних површи које су концентричне са металном цеви:

$$\vartheta = \vartheta(r) = \text{const}(\varphi, z) \quad (17.2)$$

Заменом (10.2) у (10.1) се добија:

$$\vec{q}_s = -\lambda \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial r} \vec{i}_r \quad (17.3)$$

Посматра се стационарно стање. Флукс вектора површинске густине снаге кроз цилиндричну површ провучену кроз изолацију, концентрично металној цеви, на растојању r од центра проводника, представља снагу (q) која се преноси из унутрашњости цеви ка расхладном флуиду (ваздуху). Ова снага је иста кроз сваку тако формирану површ, зато што се у изолацији не генерише топлота.

$$q = \iint_S \vec{q}_s \cdot d\vec{S} \quad (17.4)$$

$$q = \iint_S q_s \cdot \vec{i}_r \cdot \vec{i}_r \cdot dS = \iint_S q_s \cdot dS \quad (17.5)$$

$$q = q_s(r) \cdot \iint_S dS = q_s(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad (17.6)$$

Заменом (17.3) у (17.6) се добија:

$$q = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad (17.7)$$

чијим решавањем се може одредити расподела температуре дуж радијалних праваца:

$$d\vartheta = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot r \cdot L} \cdot dr \quad (17.8)$$

Интеграцијом од спољне површи цеви до спољне површи изолације се добија:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R + \delta}{R}\right) = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (17.9)$$

Топлотна снага (q) која се преноси из унутрашњости цеви ка расхладном флуиду (ваздуху) се може приказати у следећем облику:

$$q = q_L \cdot L \quad (17.10)$$

где је q_L снага преноса топлоте по јединици дужине. Заменом (17.10) у (17.9) добија се:

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = -\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{R + \delta}{R}\right) = -\frac{q_L}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (17.11)$$

Топлотни отпор изолације по јединици дужине износи:

$$R_{izolacije}^T = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{q_L} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) \quad (17.12)$$

Приметимо да у граничном процесу када дебљина изолације δ поприма мале вредности, важи следеће:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{izolacije}^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\ln\left(1 + \frac{2 \cdot \delta}{D}\right) \right) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \frac{2 \cdot \delta}{D} = \frac{1}{\lambda} \frac{\delta}{D\pi} \quad (17.13)$$

што је исто као да се топлотни отпор рачунао по формули за раван зид.

Друга компонента топлотног отпора (подужна вредност) износи:

$$R_{strujanja}^T = \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} \quad (17.14)$$

Укупан подужни топлотни отпор износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T \quad (17.15)$$

$$R^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{D + 2 \cdot \delta}{D}\right) + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} \quad (17.16)$$

Сврха постављања изолације је да се умањи снага која се преноси са флуида ка амбијенту. Снага која се по јединици дужине преноси са флуида ка амбијенту износи:

$$P = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{R^T} \quad (17.17)$$

Да би се поменута снага умањила, потребно је повећати топлотни отпор дат релацијом (17.16). Са повећањем дебљине изолације расте топлотни отпор провођењу топлоте кроз изолацију, али се истовремено повећава и спољна површина изолације са које се струјањем одводи топлота, што доводи до опадања отпора преносу топлоте струјањем на граничној површи.

Критична дебљина изолације је она при којој снага губитака достиже свој максимум. Да би се одредила критична дебљина изолације, потребно је анализирати зависност топлотних отпора од дебљине изолације. Вредност за коју се има екстремум функције топлотних губитака, односно подужног отпора, добија се изједначавањем првог извода укупног подужног отпора по дебљини изолације са нулом:

$$\frac{\partial R^T}{\partial \delta} = \frac{1}{2\pi\lambda} \cdot \frac{D}{D + 2\delta} \cdot \frac{2}{D} - \frac{2}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)^2} = \frac{-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta}{\pi \cdot \lambda \cdot \alpha \cdot (D + 2 \cdot \delta)^2} = 0 \quad (17.18)$$

$$-2 \cdot \lambda + \alpha \cdot D + 2 \cdot \alpha \cdot \delta_{kr} = 0 \quad (17.19)$$

$$\delta_{kr} = \frac{2 \cdot \lambda - \alpha \cdot D}{2 \cdot \alpha} \quad (17.20)$$

Дата критична дебљина изолације има физички смисао само за $\delta_{kr} > 0$. При томе и за $\delta < \delta_{kr}$ и за $\delta > \delta_{kr}$ укупни топлотни отпор расте (снага губитака опада). При некој дебљини

изолације, укупни топлотни отпор постаје једнак оном који би се имао да изолација не постоји. Дебљина изолације мора бити већа од те вредности да би се постигао жељени ефекат умањења снаге губитака. Овај случај се најчешће јавља код цеви малог пречника и у случају да се има мала вредност коефицијента преласка топлоте струјањем.

Уколико је $\delta_{kr} \leq 0$, тада се за свако $\delta > 0$ укупна вредност топлотног отпора повећава, а снага губитака смањује.

У конкретном случају, критична дебљина изолације износи:

$$\delta_{kr} = 3,53 \text{ mm} \quad (17.21)$$

Снага губитака по јединици дужине у случају да изолације нема износи:

$$P_{g0} = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} \quad (17.22)$$

Након постављања изолације, нова подужна вредност снаге губитака износи:

$$P_{g1} = \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \ln \frac{D + 2 \cdot \delta}{D}} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)}} \quad (17.23)$$

Пошто је снага губитака много мања од снаге која се посредством флуида преноси дуж цеви, сматрано је да је температура флуида ϑ_f иста без обзира на дебљину изолације.

Из поставке задатка је:

$$P_{g0} = 2 \cdot P_{g1} \quad (17.24)$$

$$\frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi}} = 2 \cdot \frac{\vartheta_f - \vartheta_a}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \ln \frac{D + 2 \cdot \delta}{D}} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)}} \quad (17.25)$$

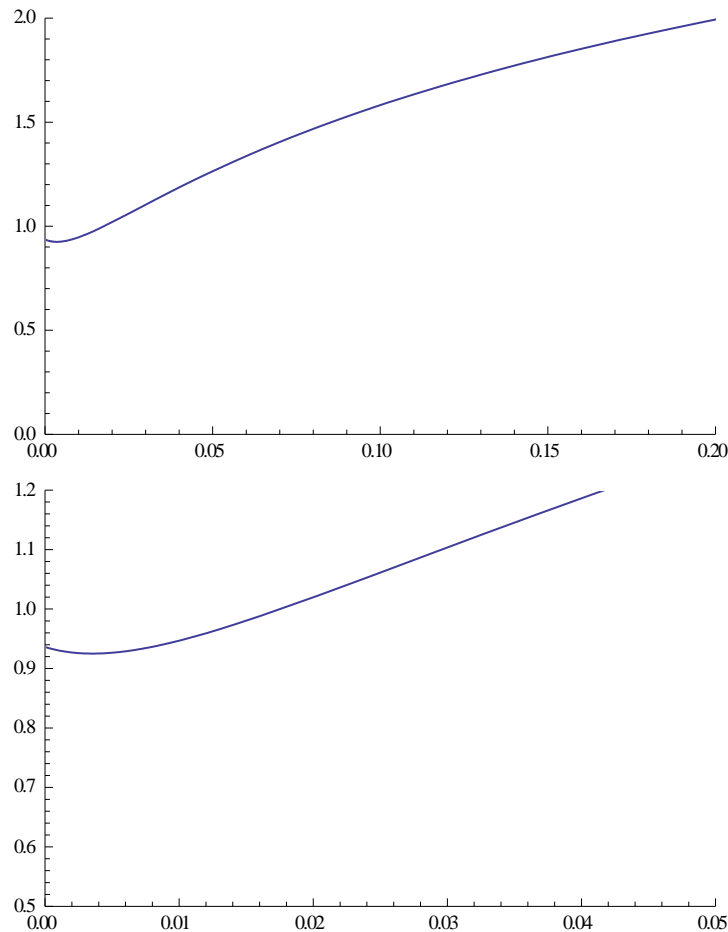
$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \ln \frac{D + 2 \cdot \delta}{D}} + \frac{1}{\alpha \cdot \pi \cdot (D + 2 \cdot \delta)} = 2 \cdot \frac{1}{\alpha \cdot D \cdot \pi} \quad (17.26)$$

Из једначине (17.26) се налази потребна дебљина изолације:

$$\delta = 165,24 \text{ mm} \quad (17.27)$$

што је јако велика вредност, те се поставља питање економске оправданости постављања изолације толике дебљине.

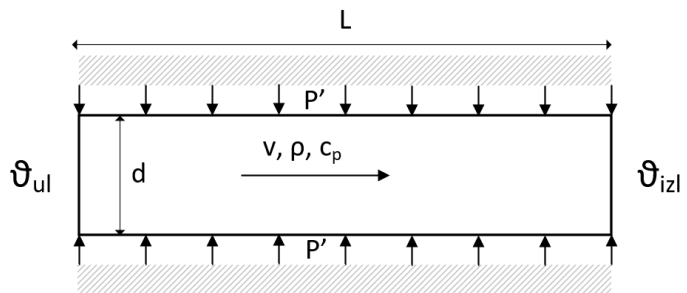
Промена топлотног отпора у зависности од дебљине изолације је дата на слици 17.2:



Слика 17.2

ЗАДАТАК 18

Кроз цев која дужине $L=5\text{ m}$ и унутрашњег пречника $d=5\text{ cm}$, протиче уље брзином $v=10\text{ cm/s}$. Температура уља на уласку у цев износи $\vartheta_{ul} = 20^\circ\text{C}$. Уље се загрева помоћу грејача, који је са друге стране идеално топлотно изолован, подужном снагом $P' = 500\text{ W/m}$. Густина уља при 20°C износи $\rho = 980\text{ kg/m}^3$, а температурна зависност специфичног топлотног капацитета гласи $c_p(\text{J/kgK})=2200+3,6\vartheta$, где је ϑ температура у $^\circ\text{C}$. При решавању задатка сматрати да је вредност c_p константна, одређена према средњој температури уља на уласку и изласку из цеви. Нацртати промену температуре површине цеви дуж правца струјања уља, ако је коефицијент преласка топлоте струјањем са уља на зид цеви једнак $\alpha = 20\text{ W/(m}^2\text{K)}$.



Слика 18.1

Решење

Прво је потребно одредити температуру уља на излазу из цеви. Целокупна топлотна енергија генерисана у цеви се преноси ка уљу и изазива пораст његове температуре дуж правца струјања (у смеру осе x), па важи:

$$P'L = \rho c_p Q (\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) \quad (18.1)$$

$$Q = vS = v\pi \frac{d^2}{4} = 0,1 \cdot \pi \cdot \frac{0,05^2}{4} = 0,00019635 \text{ m}^3/\text{s} \quad (18.2)$$

$$\frac{P'L}{\rho Q} = (2200 + 3,6 \frac{\vartheta_{izl} + \vartheta_{ul}}{2}) (\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) \quad (18.3)$$

$$\frac{P'L}{\rho Q} = 2200(\vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}) + 1,8(\vartheta_{izl}^2 - \vartheta_{ul}^2) \quad (18.4)$$

$$\vartheta_{izl}^2 + \frac{2200}{1,8} \vartheta_{izl} - \vartheta_{ul}^2 - \frac{2200}{1,8} \vartheta_{ul} - \frac{P'L}{1,8\rho Q} = 0 \quad (18.5)$$

Решавањем квадратне једначине добија се да је температура уља на изласку из цеви једнака $\vartheta_{izl} = 25,69^\circ\text{C}$.

По услову задатака, можемо апроксимирати вредност c_p као:

$$c_p = 2200 + 3,6 \frac{\vartheta_{izl} + \vartheta_{ul}}{2} = 2282,242 \text{ J/kgK} \quad (18.6)$$

Одредимо сада промену температуре уља дуж цеви. Посматрајмо део цеви од почетка до неке координате x . Овај део важи:

$$P'x = \rho c_p Q (\vartheta(x) - \vartheta_{ul}) \quad (18.7)$$

$$\vartheta(x) = \vartheta_{ul} + \frac{P'}{\rho c_p Q} \cdot x \quad (18.8)$$

Сада је потребно одредити везу између температуре уља и температуре цеви. За део цеви елементарне дужине dx на одстојању x од почетка, може се написати следећи израз ($\vartheta^{ulja}(x) = \vartheta(x)$):

$$P'dx = \alpha \cdot d \cdot \pi \cdot dx \cdot (\vartheta^{cevi}(x) - \vartheta^{ulja}(x)) \quad (18.9)$$

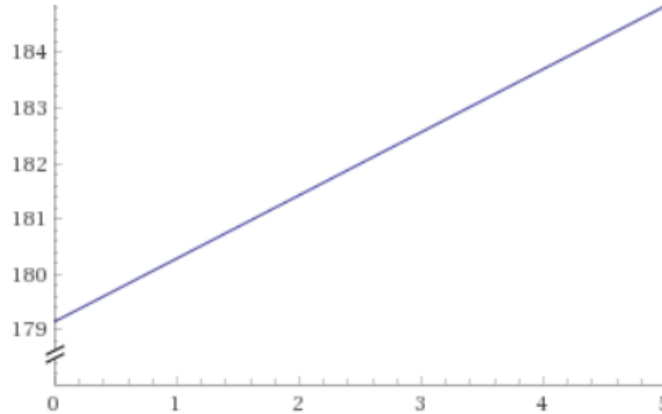
Одавде добијамо израз за температуру цеви:

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta^{ulja}(x) + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} \quad (18.10)$$

Коначно добијамо израз за промену температуре цеви са координатом x :

$$\vartheta^{cevi}(x) = \vartheta_{ul} + \frac{P'}{\alpha \cdot d \cdot \pi} + \frac{P'}{\rho c_p Q} \cdot x = 179,15 + 1,1385 \cdot x \quad (18.11)$$

На слици 18.2 приказана је зависност температуре цеви од координате x .



Слика 18.2

ЗАДАТАК 19

Једножилни кабл пресека бакра (специфична електрична проводност на 20°C $\sigma_{20\text{Cu}} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром $\alpha_{\text{Cu}20} = 4,29 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$) $S_{\text{Cu}} = 95 \text{ mm}^2$, са PVC изолацијом дебљине изолације $d_{iz} = 1 \text{ mm}$ (топлотне специфичне проводности $\lambda_{\text{PVC}} = 0,16 \text{ W/(mK)}$) положена је у тло специфичне топлотне отпорности $\rho_z = 2,5 \text{ (mK)/W}$. Максимална дозвољена температура PVC изолације износи $\vartheta_{\text{doz}} = 70^{\circ}\text{C}$, а температура земље удаљене од кабла $\vartheta_z = 20^{\circ}\text{C}$. Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл за два случаја: а) да је кабл положен директно у тло, б) да је постављен у кошуљицу сачињену од материјала специфичне топлотне отпорности $\rho_{zk} = 1 \text{ (mK)/W}$ - сматрати да је спољашња површ кошуљице цилиндар ваљка пречника $D_k = 200 \text{ mm}$. При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтно тло", на коме је температура једнака $\vartheta_z = 20^{\circ}\text{C}$, може узети цилиндар ваљка пречника $D_{ref} = 1000 \text{ mm}$.

Решење

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_p} \cdot \ln\left(\frac{D_p}{D_s}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_p}\right) \quad (19.1)$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) \quad (19.2)$$

где је:

- λ_i - специфична топлотна проводност изолације кабла,
- λ_p - специфична топлотна проводност материјала постелице,
- λ_z - специфична топлотна проводност тла (земље),
- D_p - пречник (еквивалентно по обиму) спољне површи постелице (за израчунавање за реалну геометрију, круг у правоугаонику, видети лабораторијску вежбу 3.).

Пречници проводника и проводника са изолацијом једнаки су:

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10.998mm \approx 11mm \quad (19.3)$$

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11mm + 2mm = 13mm \quad (19.4)$$

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,16 \frac{W}{mK}} \cdot \ln\left(\frac{13mm}{11mm}\right) + \frac{1 \frac{mK}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{200mm}{13mm}\right) + \frac{2,5 \frac{mK}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000mm}{200mm}\right) = 1,242 \frac{Km}{W} \quad (19.5)$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,16 \frac{W}{m \cdot K}} \cdot \ln\left(\frac{13mm}{11mm}\right) + \frac{2,5 \frac{m \cdot K}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000mm}{13mm}\right) = 1,89 \frac{Km}{W} \quad (19.6)$$

Електрична отпорност проводника једнака је:

$$R_{Cu} = \frac{1}{\sigma \cdot S} (1 + \alpha(70 - 20)) = \frac{1}{56 \cdot 95} (1 + 4,29 \cdot 10^{-3}50) = 2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \quad (19.7)$$

Једначина енергетског биланса гласи:

$$R_{Cu} I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_a}{R_l^T} \quad (19.8)$$

Одавде добијамо израз за дозвољену струју:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_a}{R_{Cu} R_l^T}} \quad (19.9)$$

- Са кошуљицом:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 20}{2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1,242 \frac{K}{W}}} = 420,2 A \quad (19.10)$$

- Без кошуљице:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 20}{2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1,89 \frac{K}{W}}} = 340,6 A \quad (19.11)$$

ЗАДАТАК 20

Колико износи дозвољено струјно оптерећење трофазног самоносивог кабловског снопа (СКС), пресека електропроводног дела фазног проводника 50 mm^2 , подужног отпора на 90°C $r_m = 0,365 \text{ } \Omega/\text{km}$, који се налази у ваздуху температуре $\vartheta_a = 24^\circ\text{C}$, брзине струјања (брзина ветра) $v_v = 1 \text{ m/s}$, изложен је дејству зрачења сунца, укупне површинске густине снаге зрачења $q_s = 600 \text{ W/m}^2$? Може се сматрати да је спољашња површ СКС преко које се топлота размењује са околином круг пречника $D = 58 \text{ mm}$, а коефицијент сивоће $\varepsilon = 0,8$. Параметри ваздуха: $\lambda = 0,02424 + 7,208 \cdot 10^{-5}\vartheta_a$, $\nu = 1,337 \cdot 10^{-5} + 8,641 \cdot 10^{-8}\vartheta_a + 1,071 \cdot 10^{-10}\vartheta_a^2$, $\beta = 0,003628 - 9,866 \cdot 10^{-6}\vartheta_a$, $c_p = 1007 + 2(\vartheta_a + 273 - 300)/50$, $\rho = 1,292 \cdot 273,2 / (273,2 + \vartheta_a)$, $a = \lambda / (\rho c_p)$, $Pr = \nu/a$.

Коефицијент преласка топлоте принудним струјањем са хоризонталног цилиндра на ваздух се може израчунати из израза $Nu_D = 0,3 + \left((0,62 \cdot Re_D^{1/2} Pr^{1/3}) / (1 + (0,4/Pr)^{2/3})^{1/4} \right) (1 + (Re_D/282000)^{5/8})^{4/5}$, где је Reynolds-ов број једнак $Re_D = (V \cdot D)/\nu$

Параметри ваздуха се одређују за средњу вредност температуре површи и ваздуха, за коју се приближно може сматрати да има константну вредност од 24°C .

Усвојити апроксимацију да је читава спољна површ СКС изложена дејству сунчаног зрачења. У прорачуну уважити и размену топлоте зрачењем између спољне површи СКС и амбијента.

Подаци преузети из техничке препоруке Електродистрибуције: вредност струје при којој се при стандардним условима (температура ваздуха 40°C , температура проводника (дефинисана класом изолације) 90°C , температуре спољне површи СКС 80°C , брзина ветра $V = 0 \text{ m/s}$, зрачење Сунца 900 W/m^2) достиже максимално дозвољена температура проводника износи 176 A . Из наведених података из техничке препоруке одредити отпор преносу топлоте провођењем кроз слој изолације.

Решење – решење урађено у програмском пакету Mathcad

Одређивање отпора провођењу топлоте кроз изолацију на основу вредности температура проводника и спољашње површи СКС-а које су дате у Техничкој препоруци 8 б.

Познате вредности $\nu_p := 90$ $\nu_{spks} := 80$ $I_s := 176$ $r_m := 0.00036$

$$R\lambda := \frac{(\nu_p - \nu_{spks})}{r_m \cdot (I_s)^2} = 0.884 \quad (20.1)$$

Одређивање коефицијента преласка топлоте код принудног струјања, за услове дате у задатку

Познате вредности $V_v := 1$ $D_{spk} := 0.058$ $\nu_a := 24$

Параметри ваздуха

$$\lambda(x) := 0.02424 + 7.208 \cdot 10^{-5} \cdot x$$

$$\nu(x) := 1.337 \cdot 10^{-5} + 8.641 \cdot 10^{-8} \cdot x + 1.071 \cdot 10^{-10} \cdot x^2$$

$$\beta(x) := 0.003628 - 9.866 \cdot 10^{-6} \cdot x$$

$$cp(x) := 1007 + 2 \cdot \frac{(x + 273 - 300)}{50}$$

$$\rho(x) := 1.292 \cdot \frac{273.2}{(273.2 + x)}$$

$$a(x) := \frac{\lambda(x)}{cp(x) \cdot \rho(x)}$$

$$Pr(x) := \frac{v(x)}{a(x)}$$

Reynolds-ов број:

$$ReF(x) := Vv \cdot \frac{Dspk}{v(x)}$$

Nusselt-ов број:

$$NuF(x) := 0.3 + \frac{\left[\left(0.62 \cdot ReF(x)^{\frac{1}{2}} \cdot Pr(x)^{\frac{1}{3}} \right) \right]}{\left[1 + \left(\frac{0.4}{Pr(x)} \right)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{1}{4}}} \cdot \left[1 + \left(\frac{ReF(x)}{282000} \right)^{\frac{5}{8}} \right]^{\frac{4}{5}} \quad (20.2)$$

$$\alpha F(x) := NuF(x) \cdot \frac{\lambda(x)}{Dspk} \quad (20.3)$$

$$\alpha F(va) = 14.175 \quad (20.4)$$

Коефицијент преласка топлоте код принудног струјања се одређује на основу параметара ваздуха добијених за температуру ваздуха од 24°C.

Одређивање површине СКС-а на којој се врши размена топлоте

Познате вредности $Dspk = 0.058$ $Su := 1.1 \cdot 16 \cdot 10^{-6}$

Вредност површине попречног пресека носећег ужета је коригована због слоја изолације за 10%

$$S_{spoljasnjeg_omotaca} := \pi \cdot Dspk = 0.182$$

Пречник једног проводника са изолацијом (добијен из једнакостраничног троугла странице Dp)

$$D_p := \frac{\frac{D_{spk}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 0.5} \quad (20.5)$$

Пречник носећег ужета са изолацијом

$$D_u := \sqrt{\frac{4 \cdot S_u}{\pi}} \quad (20.6)$$

Угао који носеће уже затвара за размену топлоте са околином

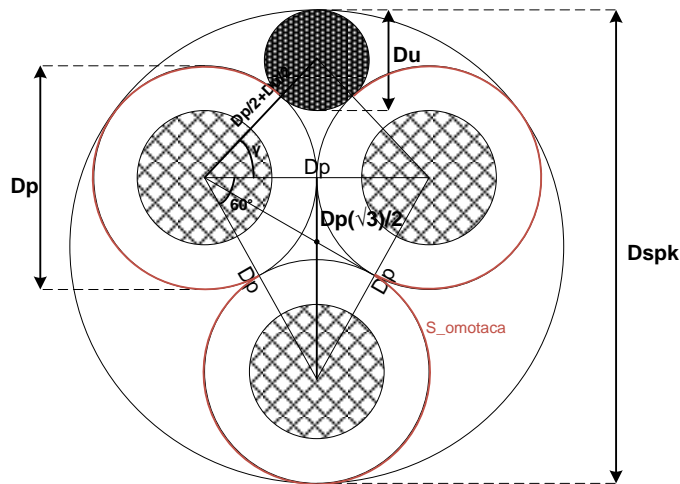
$$\gamma := \frac{180}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{D_p}{D_p + D_u}\right) \quad (20.7)$$

$$\gamma = 31.74$$

Површина СКС-а на којој се размењује топлота

$$S_{omotaca} := \frac{3 \cdot 360 - 3 \cdot 60 - 2 \cdot \gamma}{3 \cdot 360} 3 \cdot \pi \cdot D_p \quad (20.8)$$

$$S_{omotaca} = 0.197$$



Слика 20.1 – Попречни пресек СКС-а

Одређивање температуре спољашње површине СКС-а и дозвољеног струјног оптерећења проводника из система једначина

Познате вредности $q_s := 600$ $\sigma := 5.67 \cdot 10^{-8}$ $\epsilon_{spk} := 0.8$

Почетне вредности непознатих величина $\nu_k := 70$ $l := 200$

Решавање система две једначине

Given

(1) Једначина биланса снага, при чему се СКС хлади струјањем и зрачењем, а повећању температуре спољашње површи СКС-а доприносе губици у проводнику и снага зрачења сунца

$$(v_k - v_a) \cdot \alpha F(v_a) \cdot S_{omotaca} + \varepsilon_{spk} \cdot \sigma \cdot S_{omotaca} \cdot [(v_k + 273.16)^4 - (v_a + 273.16)^4] = 3 \cdot r_m \cdot I^2 + \frac{S_{omotaca}}{2} \cdot \varepsilon_{spk} \cdot q_s$$

(2) Снага провођења топлоте од проводника кроз изолацију до спољашње површи СКС-а

$$r_m \cdot I^2 = \frac{(v_p - v_k)}{R\lambda}$$

prom := Find(vk, I)

$$\text{prom} = \begin{pmatrix} 61.11 \\ 299.146 \end{pmatrix}$$

Решење система једначина $v_k := \text{prom}_0 = 61.11$ $I := \text{prom}_1 = 299.146$

Провера вредности температуре спољашње површи СКС-а наведене у препоруци Електродистрибуције за референтну дату тачку (стандардне амбијенталне услове)

Познате вредности $v_{as} := 40$ $q_{ss} := 900$ $g_e := 9.81$

Одређивање коефицијента преласка топлоте код природног струјања

Rayleigh-ев број:

$$\text{RaN}(x) := \frac{g_e \cdot \beta \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right) \cdot (x - v_{as}) \cdot D_{spk}^3}{\nu \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right) \cdot a \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right)} \quad (20.9)$$

Nusselt-ов број:

$$\text{NuN}(x) := \left[0.6 + \frac{0.387 \cdot \text{RaN}(x)^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{\text{Pr} \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right)} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right]^2 \quad (20.10)$$

$$\alpha_N(x) := \text{NuN}(x) \cdot \frac{\lambda \left(\frac{x + v_{as}}{2} \right)}{D_{spk}} \quad (20.11)$$

Коефицијент преласка топлоте код природног струјања се одређује са параметрима ваздуха за средњу вредност температуре површи и ваздуха.

Решавање система две једначине

Почетне вредности непознатих величина $v_k := 80$ $I := 170$

Giver

(1) Једначина биланса снага, при чему се СКС хлади струјањем и зрачењем, а повећању температуре спољашње површи СКС-а доприносе губици у проводнику и снага зрачења сунца

$$(v_k - v_{as}) \cdot \alpha N(v_k) \cdot S_{omotaca} + \epsilon_{spk} \cdot \sigma \cdot S_{omotaca} \cdot [(v_k + 273.16)^4 - (v_{as} + 273.16)^4] = 3 \cdot m \cdot I^2 + \frac{S_{omotaca}}{2} \cdot \epsilon_{spk} \cdot q_{ss}$$

(2) Снага провођења топлоте од проводника кроз изолацију до спољашње површи СКС-а

$$m \cdot I^2 = \frac{(v_p - v_k)}{R\lambda}$$

prom := Find(vk, I)

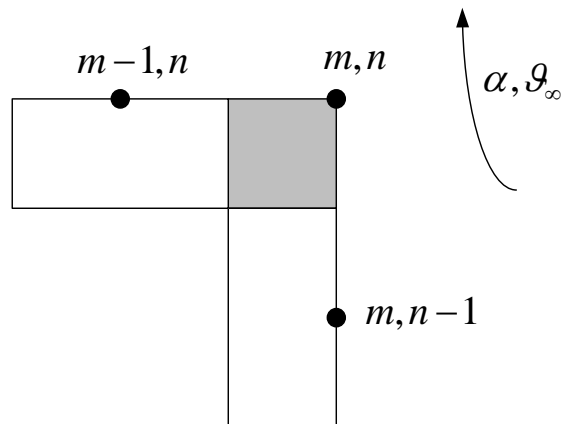
$$\text{prom} = \begin{pmatrix} 81.006 \\ 166.912 \end{pmatrix}$$

Решење система једначина $v_k := \text{prom}_0 = 81.006$ $I := \text{prom}_1 = 166.912$

При максимално дозвољеној температури проводника од 90°C, одступање струје од стандардом дате вредности (176 A) је -9,088 A, док је одступање температуре спољашње површи СКС-а 1,006 K.

ЗАДАТАК 21

Извести израз за методу коначних елемената за елемент топлопроводне средине приказан на слици 21.1. При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре користити имплицитну методу. Познати су сви подаци о карактеристикама материјала и коефицијенту преласка топлоте струјањем са тела на околни флуид температуре ϑ_∞ . Дискретизација топлопроводне средине је извршена тако да је $\Delta x = \Delta y$.



Слика 21.1

Решење

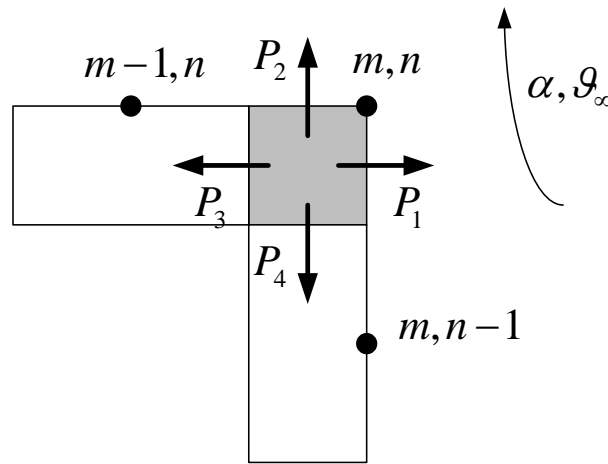
На основу биланса снага (који директно следи из енергетског биланса) примењеног на посматрани елемент (слика), може се написати следећа једначина:

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (21.1)$$

где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се топлотна енергија генерише унутар посматраног елемента,
- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима и флуидом.

Снага којом се топлотна енергија размењује са околином има више компонената које су означене на слици 21.2 и могу се изразити преко одговарајућих температура и параметара средине.



Слика 21.2

$$P_1 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L}} \quad (21.2)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L}} \quad (21.3)$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{\frac{\Delta y}{2} \cdot L}} \quad (21.4)$$

$$P_4 = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \quad (21.5)$$

У овом случају, са $p+1$ је означен садашњи тренутак.

Укупна снага којом се енергија преноси ка околини износи:

$$P_{prenosa} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad (21.6)$$

Заменом израза (21.2), (21.3), (21.4) и (21.5) у једначину (21.6) се добија коначан израз за снагу којом се топлота преноси ка околини:

$$P_{prenosa} = \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \quad (21.7)$$

Снага којом се топлотна енергија генерише у посматраној запремини износи:

$$P_{gen} = q_V \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (21.8)$$

Снага којом се топлотна енергија акумулише у посматраној запремини износи:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta_{m,n}}{\partial t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (21.9)$$

Извод температуре посматраног елемента по времену, који фигурише у (21.9), може се дискретизовати и апроксимирати као количник разлике температура посматраног елемента у садашњем и претходном тренутку и корака временске дискретизације.

$$\frac{d\vartheta_{m,n}}{dt} \approx \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (21.10)$$

Заменом (21.10) у (21.9) се добија коначан израз за снагу којом се енергија акумулише:

$$P_{akum} = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot L \quad (21.11)$$

Заменом (21.7), (21.8) и (21.11) у (21.1) се добија:

$$\begin{aligned} q_V \cdot \frac{1}{4} \Delta x \Delta y L = & \rho \cdot c_p \cdot \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \cdot \frac{1}{4} \Delta x \Delta y L + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{\infty}}{\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} \\ & + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m-1,n}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot L} + \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n-1}^{p+1}}{\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Delta y}{2} \cdot L} \end{aligned} \quad (21.12)$$

Даљим сређивањем претходне једначине се добија:

$$\begin{aligned} \vartheta_{m,n}^{p+1} \cdot (1 + 4 \cdot Fo + 4 \cdot Fo \cdot Bi) - 2 \cdot Fo \cdot (\vartheta_{m-1,n}^{p+1} + \vartheta_{m,n-1}^{p+1}) \\ = 4 \cdot Fo \cdot Bi \cdot \vartheta_{\infty} + \vartheta_{m,n}^p + q_V \frac{\Delta t}{\rho \cdot c_p} \end{aligned} \quad (21.13)$$

где су *Fourier*-ов и *Biot*-ов број дати следећим изразима:

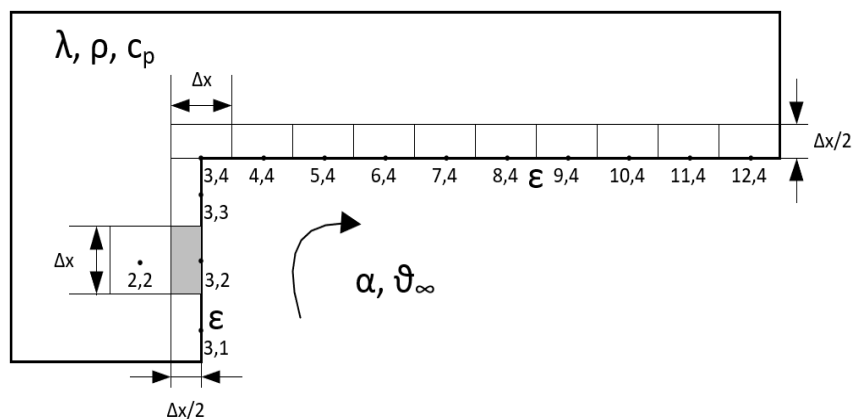
$$Fo = \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \quad (21.14)$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (21.15)$$

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\lambda} \quad (21.16)$$

ЗАДАТАК 22

Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине на координати (3,2). При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Димензије и положај елемента су приказани на слици 22.1. Топлотна проводност материјала је λ , специфични топлотни капацитет је c_p , густина ρ и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре ϑ_{∞} је α . Коефицијент сивоће површи износи $\varepsilon = 1$. Уважити размену топлоте зрачењем са сваким елементом, при чему се код одређивања размене топлоте између два елемента може сматрати да су они елементарни, занемарљиво малих димензија (димензија по дубини је мала).



Слика 22.1

Решење

Једначине по методи коначних елемената постављају се на основу енергетског биланса и из њега проистеклог биланса снага, примењеног на поједине елементе.

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (22.1)$$

где су:

- P_{gen} - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,

- P_{akum} - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу, и
- $P_{prenosa}$ - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је $P_{gen} = 0$.

Укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу износи:

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta x}{2} L \frac{d\vartheta_{3,2}}{dt} \quad (22.2)$$

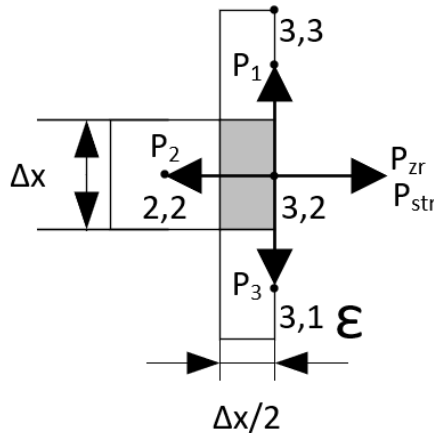
Извод температуре по времену у једначини се мора дискретизовати. У супротном, добијена једначина би била диференцијална једначина првог реда, а одређивање расподеле температуре у коначном (али јако великом) броју елемената би изискивао решавање система диференцијалних једначина. Уколико се извод по времену у једначини дискретизује, добија се систем алгебарских једначина.

Пошто се ради о експлицитној методи, извод по времену се дискретизује као количник разлике температура посматраног елемента у наредном ($p+1$ -ом) и текућем (p -том) тренутку и одговарајућег корака временске дискретизације (Δt).

$$\frac{d\vartheta_{m,n}}{dt} \approx \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (22.3)$$

Заменом овог израза у претходну једначину добија се коначан израз за снагу којом се енергија акумулише у посматраном елементу:

$$P_{akum} = \rho c_p \frac{(\Delta x)^2}{2} L \frac{\vartheta_{3,2}^{p+1} - \vartheta_{3,2}^p}{\Delta t} \quad (22.4)$$



Слика 22.2

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем, струјањем и зрачењем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} + P_{zr} \quad (22.5)$$

На слици 22.2 су приказане снаге којима се енергија размењује са суседним елементима и снаге којима се енергија преноси струјањем на флуид и зрачењем у околину. Свака од поменутих снага може се изразити помоћу температура поменутих елемената и параметара средине.

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји из три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3,3), (2,2) и (3,1).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^3 P_k \quad (22.6)$$

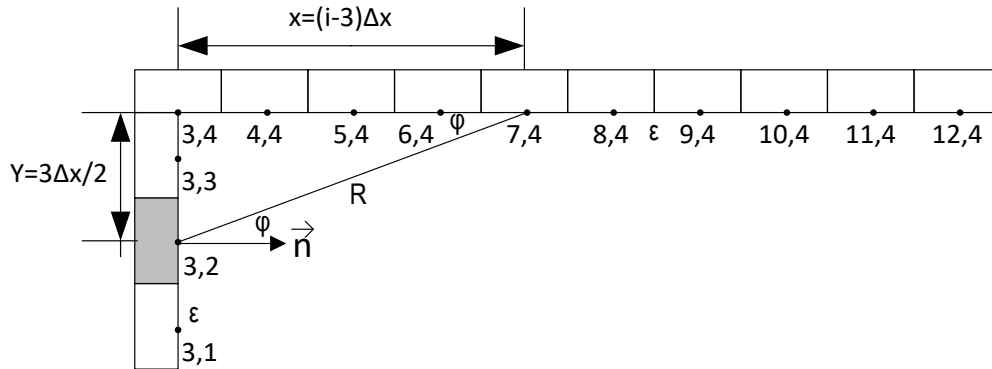
$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta x/2}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{2}{\lambda L}} \quad (22.7)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{2,2}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta x}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{2,2}^p}{\frac{1}{\lambda L}} \quad (22.8)$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,1}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L \Delta x/2}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,1}^p}{\frac{2}{\lambda L}} \quad (22.9)$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha} \frac{1}{L \Delta x}} = \alpha L \Delta x (\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{\infty}^p) \quad (22.10)$$



Слика 22.3

Топлота се са посматраног елемента може пренети зрачењем на хоризонталне елементе са координатама од (3,4) до (12,4), при чему се за сваки од два посматрана елемента мора одредити фактор виђења. Према тексту задатка површи су елементарне. Основна формула за фактор виђења за случај елементарних површи, примењена на случај фактора виђења између површи (3,2) и површи (i,4), $i=3,4, \dots, 12$, износи:

$$F_i = \frac{1}{S_{3,2}} \int_{S_{3,2}} \int_{S_{i,4}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} dS_{3,2} dS_{i,4} = \frac{1}{S_{3,2}} \int_{S_{3,2}} dS_{3,2} \int_{S_{i,4}} dS_{i,4} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} \quad (22.11)$$

$$= \frac{S_{3,2} S_{i,4}}{S_{3,2}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} = \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} S_{i,4}$$

где је угао φ угао између потега од посматране до једне од хоризонталних елементарних површи (R) и нормале на посматрану елементарну површ са координатама (3,2), као на слици 22.3. Тригонометријске функције посматраних углова φ могу се изразити на следећи начин:

$$\sin \varphi = \frac{y}{R} \quad (22.12)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{R} \quad (22.13)$$

Како се за све посматране случајеве растојање елементарних површи по у координати не мења и износи $y = \frac{3\Delta x}{2}$, потег R се на основу ознака на слици 22.3 може изразити као

$$R^2 = ((i-3)\Delta x)^2 + y^2 = (i-3)^2\Delta x^2 + \left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^2 = \left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)\Delta x^2 \quad (22.14)$$

Заменом израза (22.14.) у (22.12) и (22.13) добијају се коначни изрази за тригонометријске функције:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)\Delta x^2}} = \frac{3}{2\sqrt{\frac{9}{4} + (i-3)^2}} \quad (22.15)$$

$$\cos \varphi = \frac{(i-3)\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)\Delta x^2}} = \frac{(i-3)}{\sqrt{\frac{9}{4} + (i-3)^2}} \quad (22.16)$$

Површина елементарне површи се може изразити као:

$$S_{i,4} = L\Delta x \quad (22.17)$$

Коначан израз за фактор виђења је

$$F_i = \frac{\frac{3}{2}(i-3)}{\pi\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)^2} L \quad (22.18)$$

Снага преноса топлоте зрачењем се, за случај црног тела, одређује помоћу наредне једноставне формуле:

$$P_{zr} = \sum_{i=3}^{12} F_i \cdot L \Delta x \cdot \varepsilon \sigma_c \left((\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (22.19)$$

$$P_{zr} = \sum_{i=3}^{12} \frac{3(i-3)}{2\pi\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)^2} L L \Delta x \varepsilon \sigma_c \left((\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (22.20)$$

$$P_{zr} = \sum_{i=3}^{12} \frac{3(i-3)}{2\pi \left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)^2} L^2 \varepsilon \sigma_c \left((\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (22.21)$$

У случају сивог тела ($\varepsilon < 1$) проблем постаје много комплекснији и мора се поставити комплетна радијациона шема, односно решити систем једначина који одговара радијационој шеми.

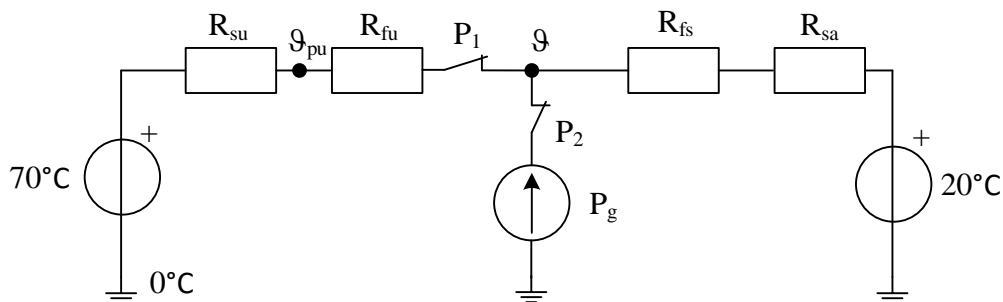
ЗАДАТАК 23

Посматрајмо зид трансформаторског суда сачињен од гвожђа дебљине $\delta_{Fe} = 8 \text{ mm}$ са чије је унутрашње стране нанет слој фарбе дебљине $\delta_{fu} = 0,1 \text{ mm}$, а са спољашње слој цинка дебљине $\delta_{zn} = 0,08 \text{ mm}$ и слој фарбе дебљине $\delta_{fs} = 0,15 \text{ mm}$. Специфична топлотна проводност фарбе износи $\lambda_f = 0,2 \frac{W}{m \cdot K}$ и много је мања од вредности за гвожђе и цинк. Коефицијент преласка топлоте струјањем према уљу температуре $\vartheta_u = 70^\circ C$ износи $\alpha_u = 65 \frac{W}{m^2 \cdot K}$, а према амбијенталном ваздуху температуре $\vartheta_a = 20^\circ C$ износи $\alpha_a = 5 \frac{W}{m^2 \cdot K}$. За три ситуације у погледу загревања зида услед расутог магнетског флукса потребно је одредити:

- Снагу хлађења уља преко зида у случају да у зиду не постоји генерисање топлоте.
- Граничну површинску густину снаге генерисања топлоте у зиду при којој уље престаје да се хлади и почиње да се загрева.
- Површинску густину снаге генерисања топлоте у зиду при којој површ која је у додиру са уљем достиже $100^\circ C$?

Решење

Одговарајућа топлотна шема приказана је на слици 23.1:



Слика 23.1

- R_{fu} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз унутрашњи слој фарбе
- R_{fs} - топлотни отпор преносу топлоте провођењем кроз спољашњи слој фарбе
- R_{su} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка уљу
- R_{sa} - топлотни отпор преносу топлоте струјањем ка ваздуху (амбијенту)
- P_g - снага загревања зида (гвожђе дебљине 8 mm)
- ϑ_{pu} - температура површи унутрашње стране зида

Вредности параметара топлотне шеме могу се одредити на следећи начин:

$$R_{fu} = \frac{\delta_{fu}}{\lambda_f S} = 0,0005/S \quad (23.1)$$

$$R_{fs} = \frac{\delta_{fs}}{\lambda_f S} = 0,00075/S \quad (23.2)$$

$$R_{su} = \frac{1}{\alpha_u S} = 0,01538/S \quad (23.3)$$

$$R_{sa} = \frac{1}{\alpha_u S} = 0,2/S \quad (23.4)$$

$$P_g = p_g S \quad (23.5)$$

- a) Снага хлађења уља преко зида у случају да у зиду не постоји генерисање топлоте одговара ситуацији приказаној на слици 23.1 при отвореном прекидачу P_2 :

$$p_{hl} = \frac{\vartheta_u - \vartheta_a}{(R_{su} + R_{fu} + R_{fs} + R_{sa})S} = \frac{70 - 20}{0,01538 + 0,0005 + 0,00075 + 0,2} = 230 \text{ W/m}^2 \quad (23.6)$$

- b) Гранична вредност површинске густине снаге генерисања топлоте у зиду при којој уље престаје да се хлади и почиње да се загрева се одређује из услова да температура гвожђа (ϑ) постане једнака температури уља ($\vartheta = \vartheta_{gr} = 70^\circ\text{C}$). Овом случају одговара ситуација на слици 23.1 у којој је прекидач P_1 отворен, а прекидач P_2 затворен. При овим условима, површинска снага генерисања топлоте у зиду износи:

$$p_{g,b} = \frac{\vartheta_{gr} - \vartheta_a}{(R_{fs} + R_{sa})S} = \frac{70 - 20}{0,00075 + 0,2} = 249,07 \text{ W/m}^2 \quad (23.7)$$

- c) Површинска густина снаге генерисања топлоте у зиду при којој површ која је у додиру са уљем достиже 100°C ($\vartheta_{pu} = 100^\circ\text{C}$) се одређује на следећи начин. Пошто је температура унутрашње површи зида већа од температуре уља, снага генерисања топлоте у зиду је већа од вредности одређене у случају под b) тј. уље се додатно загрева од зида. Прво је потребно одредити вредност снаге којом се топлота струјањем одводи са зида на уље:

$$p_{us} = \frac{\vartheta_{pu} - \vartheta_u}{R_{su}S} = \frac{100 - 70}{0,01538} = 1950,59 \text{ W/m}^2 \quad (23.8)$$

Сада је могуће одредити вредност температуре гвозденог зида:

$$\vartheta = \vartheta_u + (R_{fu}S + R_{su}S) p_{us} = 70 + (0,0005 + 0,01538) \cdot 1950,59 = 100,98^\circ\text{C} \quad (23.9)$$

Коначно, снага површинске густине генерисања топлоте у зиду се одређује као збир снаге којом се топлота струјањем одводи са унутрашње површине зида (израз (23.9)) и снаге којом се топлота струјањем одводи са спољашње површине зида (ка амбијенту):

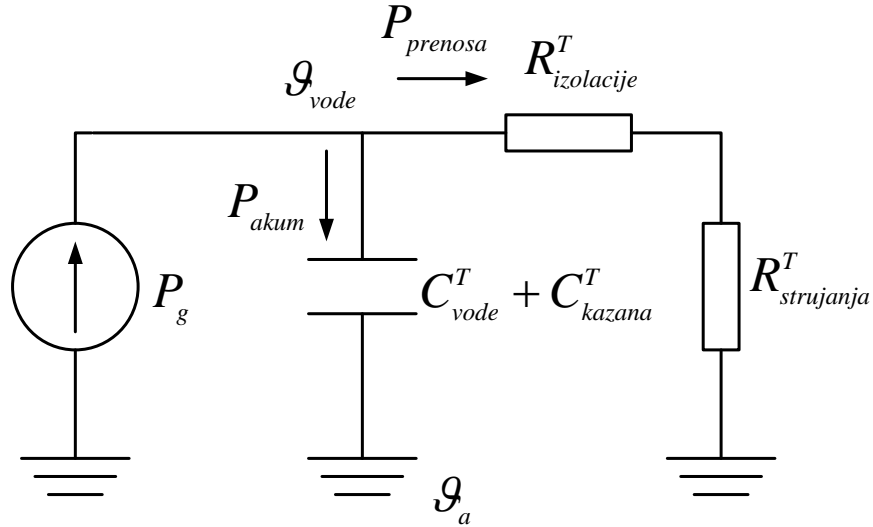
$$p_{g,c} = p_{us} + \frac{\vartheta - \vartheta_a}{(R_{fs} + R_{sa})S} = 1950,59 + \frac{100,98 - 20}{0,00075 + 0,2} = 2353,97 \text{ W/m}^2 \quad (23.10)$$

ЗАДАТАК 24

Посматрајмо бојлер запремине 50l који се налази у просторији у којој је температура ваздуха $\vartheta_a = 20^\circ\text{C}$. Регулатор температуре воде у бојлеру је подешен на 90°C . Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача $P_{gr} = 2 \text{ kW}$, маса казана $m_k = 9,5 \text{ kg}$, површина казана (унутрашња површина топлотне изолације) $S_u = 0,8 \text{ m}^2$, дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности $\lambda = 0,1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $\delta = 30 \text{ mm}$, спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације) $S_s = 1 \text{ m}^2$. Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи $\alpha_s = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$, а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан $\alpha_u \gg \alpha_s$. Густина воде износи $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, специфични топлотни капацитет воде $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ и специфични топлотни капацитет материјала казана $c_{pk} = 474 \text{ J/(kgK)}$. Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана се може израчунати по формула за раван зид површине $(S_u + S_s)/2$. Топла вода из бојлера троши се за туширање два пута у току дана (једина употреба топле воде у току дана), и то у 7h и у 18h, при чему туширање траје 8min. Познато је да се у току једног туширања потроши 65l воде температуре 45°C (температура хладне воде је 15°C). Колика је могућа уштеда електричне енергије у току циклуса од једног дана (24h, почевши од 18h), уколико се уместо стандардног “on-off” (хистерезисног) регулатора користи „паметни“ регулатор? Сматрати да “on-off” регулатор, по достизању задате температуре (90°C), њену вредност одржава у врло малом опсегу око номиналне. „Паметни“ регулатор држи укључен бојлер од 6h-7h и од тренутка који треба одредити до 18h, тако да температура у 18h буде једнака 90°C . У току туширања занемарити губитак енергије кроз топлотну изолацију бојлера ка амбијенту.

Решење

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења. Сматра се да је температура воде по запремини бојлера константна, и, услед занемареног отпор преносу топлоте струјањем са воде на унутрашњи зид казана, једнак температури казана. Занемарен је топлотни капацитет изолације, због његове мале вредности. Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на следећој слици 24.1.



Слика 24.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214,5 \text{ kJ/kg} \quad (24.1)$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{\frac{S_s + S_u}{2}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0,5333 \text{ K/W} \quad (24.2)$$

Укупна снага којом грејач генерише топлоту је једнак збиру снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (24.3)$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (24.4)$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \quad (24.5)$$

Са θ је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент. Коначно, добијамо диференцијалну једначину:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (24.6)$$

чије решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (24.7)$$

где је са θ_0 означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), са $\theta_\infty = P_g \cdot R^T = 1066,6 \text{ K}$ пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго и када не би не би долазило до кључања воде на 100°C , што у стварности није случај), а са $\tau = R^T C^T = 31,776 \text{ h}$ временска константа загревања воде у бојлеру.

I случај - “on-off” регулатор

Енергија која се троши током првог туширања (у 18h) водом температуре $\vartheta_{tus} = 45^\circ\text{C}$ (температура хладне воде износи 15°C) је једнака

$$E_{tusiranja} = \rho_v c_{pv} V_V (\vartheta_{tus} - \vartheta_v) = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 65 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 (45 - 15) \quad (24.8)$$

$$= 8190 \text{ kJ}$$

Температура воде у бојлеру након првог туширања у 18h ϑ_x може се одредити из следећег израза:

$$E_{tusiranja} = C^T (\vartheta_{vode u bojleru} - \vartheta_x) \quad (24.9)$$

Како је температура воде у бојлеру на почетку била $\vartheta_{vode u bojleru} = 90^\circ\text{C}$, температура воде у бојлеру након завршетка туширања износи

$$\vartheta_x = \vartheta_{18:08} = 51,58^\circ\text{C} \quad (24.10)$$

Опциони приступ

Q_{tus} запремински проток воде којом се особа тушира ($65 \text{ l} / 8 \text{ min}$), константном температуром воде 45°C

Q_b запремински проток воде из бојлера (непозната величина; она расте током туширања, јер температура воде у бојлеру опада)

$Q_{tus} - Q_b$ запремински проток хладне воде из водоводне мреже

Вредности сва три протока представљају стварне протоке сведене на температуру хладне воде из водоводне мреже (15°C). Примера ради, Q_{tus} представља стварни проток воде којом се особа тушира помножен са односом густина воде $\rho_v(45^\circ\text{C}) / \rho_v(15^\circ\text{C})$.

Упрошћење: специфични масени топлотни капацитет воде се не мења са температуром.

Једначина мешања воде из бојлера и воде из водоводне мреже:

$$Q_b \vartheta_b + (Q_{tus} - Q_b) \vartheta_v = Q_{tus} \vartheta_{tus} \quad (1)$$

Једначина енергетског биланса – енергија која је из бојлера одведена истицањем топле воде и утицањем исте количине хладне воде је једнака смањењу унутрашње енергије садржане у топлотним капацитетима воде у бојлеру и казана суда:

$$\rho c_p Q_b (\vartheta_b - \vartheta_v) = - C^T \frac{d\vartheta_b}{dt} \quad (2)$$

Из (1):

$$Q_b = Q_{tus} \frac{\vartheta_{tus} - \vartheta_v}{\vartheta_b - \vartheta_v} \quad (3)$$

Заменом (3) у (2):

$$\rho c_p Q_{tus} \frac{\vartheta_{tus} - \vartheta_v}{\vartheta_b - \vartheta_v} (\vartheta_b - \vartheta_v) = - C^T \frac{d\vartheta_b}{dt} \quad (4)$$

$$\rho c_p Q_{tus} (\vartheta_{tus} - \vartheta_v) = - C^T \frac{d\vartheta_b}{dt} \quad (5)$$

$$\vartheta_b = \vartheta_b(t=0) - \frac{\rho c_p Q_{tus} (\vartheta_{tus} - \vartheta_v)}{C^T} t \quad (6)$$

У току читавог периода туширања (трајања 8 минута, у коме се потроши укупно $V_{tus}=651$ воде) вода се охлади за

$$\vartheta_b - \vartheta_b(t=0) = \frac{\rho c_p V_{tus} (\vartheta_{tus} - \vartheta_v)}{C^T} \quad (7)$$

Примењено на случај туширања са почетком у тренутку у коме је температура воде у бојлеру била $\vartheta_{vode \text{ u bojleru}} = 90^\circ\text{C}$, за температуру воде у бојлеру након завршетка туширања се добија

$$\vartheta_b = 90 - \frac{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \cdot 65 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 (45 - 15)}{214,5 \text{kJ/kg}} = 51,58^\circ\text{C} \quad (8)$$

Након тога, вода у бојлеру се загрева до температуре од 90°C , и за то је потребно време од:

$$t_{zag} = \tau \cdot \ln \left(\frac{\theta_\infty - \theta_0}{\theta_\infty - (90^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})} \right) = 1,202 \text{ h} \quad (24.11)$$

$$(\theta_0 = 51,58 - 20 = 31,58^\circ\text{C})$$

Како је и на почетку туширања у 7h температура воде у бојлеру 90°C , следи да ће време загревања воде бити исто и након првог туширања. Укупна утрошена електрична енергија на загревање воде износи:

$$E_{el}^{zag} = P_g \cdot 2t_{zag} = 4,81 \text{ kWh} \quad (24.12)$$

Поред тога потребно је надокнадити и енергију губитака кроз топлотну изолацију бојлера, како би се температура воде одржала на задатој вредности, и та енергија је једнака:

$$\begin{aligned} E_{el}^{gub} &= P_{prenosa} \cdot (24 - 2t_{zag} - 2t_{tuš}) \\ &= \frac{90^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}}{R^T} \cdot (24 - 2 \cdot 1,202 - 2 \cdot 8/60)h = 2,8 \text{ kWh} \end{aligned} \quad (24.13)$$

Укупна количина утрошене електричне енергије у току 24 часа износи $E_{el}^{on-off} = E_{el}^{zag} + E_{el}^{gub} = 7,61 \text{ kWh}$

II случај - “паметни” регулатор

Након првог туширања температура топле воде је иста као и у првом случају и износи $\vartheta_{18:08} = 51,58^{\circ}\text{C}$. Након тога, вода почиње да се хлади све до 6h и тада има температуру:

$$\vartheta_{6h} = \vartheta_{amb} + (\vartheta_{18:08} - \vartheta_{amb})e^{-\frac{t_1}{\tau}} = 41,892^{\circ}\text{C} \quad (24.14)$$

где t_1 износи 1h и 52min.

У 6h укључује се грејач бојлера, и остаје укључен наредних сат времена. У тренутку почетка другог туширања температура воде у бојлеру је:

$$\vartheta_{7h} = \vartheta_{6h} + (\theta_{\infty} - (\vartheta_{6h} - \vartheta_{amb})) \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) = 74,275^{\circ}\text{C} \quad (24.15)$$

Температура воде у бојлеру након туширања износи:

$$\vartheta_{7:08} = \vartheta_{7h} - \frac{E_{tusiranja}}{C_T} = 36,1^{\circ}\text{C} \quad (24.16)$$

Сада је потребно одредити тренутак укључења грејача бојлера тако да у 18h температура воде у бојлеру поново буде 90°C . То је могуће урадити решавањем следећег система једначина:

$$\vartheta_x = \vartheta_{amb} + (\vartheta_{7:08} - \vartheta_{amb})e^{-\frac{(11-8/60)-t_x}{\tau}} \quad (24.17)$$

$$\vartheta_{18h} = 90^{\circ}\text{C} = \vartheta_x + (\theta_{\infty} - (\vartheta_x - \vartheta_{amb})) \left(1 - e^{-\frac{t_x}{\tau}}\right) \quad (24.18)$$

Одавде се добија да је $t_x = 1,79h$, односно да ће се грејач бојлера укључити у 16:13h. Укупна утрошена електрична енергија је:

$$E_{el}^{smart} = P_g \cdot (1 + t_x) = 5,58 \text{ kWh} \quad (24.19)$$

Дакле, за један дан смањена је потрошња електричне енергије за $\Delta E = 7,61 - 5,58 = 2,03 \text{ kWh}$