



**ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ**

**Катедра за енергетске претвараче и погоне**

**Пренос топлоте**

**Материјали за рачунске вежбе**

Март 2023.

Делови маркирани жутом бојом су информативног карактера и нису потребни за испит.

### **ЗАДАТАК 1**

Површина равне плоче ширине  $w = 1 \text{ m}$  се одржава на константној температури  $\vartheta_p = 230^\circ\text{C}$ , користећи независно контролисане тракасте електричне грејаче, од којих је сваки  $L = 50 \text{ mm}$  дугачак. Преко плоче струји ваздух температуре  $\vartheta_\infty = 25^\circ\text{C}$ , брзином од  $60 \text{ m/s}$ . Колика је снага загревања на грејачу на коме она достиже максималну вредност да би се остварио специфицирани режим?

Вредности параметара ваздуха на температури од  $400 \text{ K}$ , што представља средњу вредност температуре површи и ваздуха, и притиску од  $1$  атмосфере, износе: кинематска вискозност  $\nu = 26,41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , специфична топлотна проводност  $\lambda = 0,0338 \text{ W}/(\text{m K})$ , *Prandtl*-ов број  $Pr = 0,69$ .

### ***Решење***

Снаге загревања појединих грејача морају бити различите да би се одржала константна температура површи плоче јер се дуж плоче мења коефицијент преласка топлоте струјањем (доведена електрична снага је једнака снази којом се енергија струјањем преноси са површи грејача на ваздух –  $\alpha S (\vartheta_p - \vartheta_\infty)$ ). Максимална снага се има на оном грејачу где је максимална средња вредност коефицијента преласка топлоте. Дакле, да би се решио задатак, потребно је анализирати вредности средњих коефицијената преласка топлоте струјањем на сваком од грејача, користећи изразе (18) – (32) (<http://term-procesi.etf.bg.ac.rs/predavanja.html> / Часови 4-6). За почетак ћемо одредити да ли и на ком од грејача долази до промене режима струјања из ламинарног у турбулентни. За вредност критичног *Reynolds*-овог броја  $Re_{xc} = 5 \cdot 10^5$ , из израза (19) се долази до координате на којој „настаје“ турбулентно струјање:

$$x_c = \frac{\nu}{u_\infty} Re_{xc} = \frac{26,41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}}{60 \text{ m/s}} 5 \times 10^5 = 0,22 \text{ m} \quad (1.1)$$

То значи да је струјање ваздуха на прва четири грејача и на првих  $20 \text{ mm}$  петог грејача ламинарно, а на осталих  $30 \text{ mm}$  турбулентно, као и на грејачима после петог.

У дискусији која следи једначину (22) је објашњено да коефицијент преласка топлоте струјањем у области ламинарног струјања опада са повећањем растојања од ивице плоче, због чега он засигурно највећу вредност у области од првог до четвртог грејача достиже на првом грејачу.

У области турбулентног струјања, коефицијент преласка топлоте струјањем се са растојањем од ивице плоче мења на следећи начин (израз се добија из (20), (25) и (19) – прецизније у изразу (19) карактеристична димензија је растојање од ивице плоче  $x$ ):

$$\alpha_x(x) = \frac{\lambda \left( 0,0296 \cdot \left( \frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \right)}{x} \quad (1.2)$$

Коефицијент преласка топлоте је обрнуто сразмеран са  $x^{1/5}$ , што значи да опада са растојањем. Дакле, у области од шестог грејача надаље, средња вредност коефицијента преласка топлоте струјањем има највећу вредност на шестом грејачу.

Дакле, „кандидати“ за највећу средњу вредност коефицијента преласка топлоте су први, шести и пети грејач, на коме постоји и област ламинарног и област турбулентног струјања.

Снага загревања првог грејача се израчунава на следећи начин. Из основног закона преноса топлоте струјањем:

$$q_1 = \bar{\alpha}_1 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.3)$$

Из израза (1.1) следи:

$$Re_1 = \frac{u_\infty L}{\nu} = \frac{60 \text{ m/s} \cdot 0,05 \text{ m}}{26,41 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1,14 \cdot 10^5 \quad (1.4)$$

Из израза (22):

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\lambda \left( 0,332 \cdot \left( \frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \right)}{x} dx = 2\alpha_1 \quad (1.5)$$

$$\bar{\alpha}_1 = 2 \cdot \frac{0,0338 \text{ W/mK} \cdot (0,332 \cdot (1,14 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot 0,69^{1/3})}{0,05 \text{ m}} = 134 \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad (1.6)$$

$$q_1 = 134 \text{ W/(m}^2 \text{ K)} \cdot (0,05 \times 1) \text{ m}^2 \cdot (230 - 25)^\circ \text{C} = 1370 \text{ W} \quad (1.7)$$

За грејаче 5 и 6 најбржи начин да се одреде средње вредности коефицијената преласка топлоте струјањем је да се употребе готови изрази за средње вредности коефицијента преласка топлоте од почетка плоче до задате координате  $x$  ((28) и (32)). Пре него што се то учини, потребно је направити кратку анализу и успоставити релацију између средње вредности коефицијената преласка топлоте струјањем на деоници од растојања  $x_1$  до растојања  $x_2$  ( $\alpha_{1-2}$ ), с једне стране, и коефицијената преласка топлоте на деоницама од  $x = 0$  до  $x_1$  ( $\alpha_1$ ), односно од  $x = 0$  до  $x_2$  ( $\alpha_2$ ). Релација се једноставно успоставља на основу дефиниције средњих вредности коефицијената преласка топлоте и елементарне математичке особине интеграла:

$$\alpha_{1-2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left( \int_0^{x_2} \alpha(x) dx - \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \right) \quad (1.8)$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1} \left( x_2 \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} \alpha(x) dx - x_1 \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} \alpha(x) dx \right)$$

$$\alpha_{1-2} = \frac{\alpha_2 x_2 - \alpha_1 x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.9)$$

На основу претходног се једноставно израчунавају снаге загревања петог и шестог грејача.

Снага загревања петог грејача:

$$q_5 = \bar{\alpha}_5 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) = \bar{\alpha}_{1-5} \cdot 5 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) - \bar{\alpha}_{1-4} \cdot 4 L w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.10)$$

$$q_5 = (\bar{\alpha}_{1-5} \cdot 5 L - \bar{\alpha}_{1-4} \cdot 4 L) w (\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.11)$$

Израчунавање коефицијената преласка топлоте потребних у претходном изразу:

$$\overline{N}_{u4} = 0,664 \cdot R_{e4}^{1/2} \cdot P_r^{1/3} \quad (1.12)$$

$$R_{e4} = 4R_{e1} = 4,56 \cdot 10^5 \quad (1.13)$$

$$\overline{N}_{u4} = 0,664 \cdot R_{e4}^{1/2} \cdot P_r^{1/3} = 0,664 \cdot (4,56 \cdot 10^5)^{1/2} \cdot (0,69)^{1/3} = 396 \quad (1.14)$$

$$\overline{\alpha}_{1-4} = \frac{\lambda \overline{N}_{u4}}{4L} = \frac{396 \cdot 0,0338 \text{ W/(mK)}}{0,2\text{m}} = 67 \text{ W/(m}^2 \text{K)} \quad (1.15)$$

$$R_{e5} = 5R_{e1} = 5,70 \cdot 10^5 \quad (1.16)$$

$$\overline{N}_{u5} = (0,037 \cdot R_{e5}^{4/5} - 871) \cdot P_r^{1/3} = (0,037 \cdot (5,70 \cdot 10^5)^{4/5} - 871) \cdot P_r^{1/3} = 546 \quad (1.17)$$

$$\overline{\alpha}_{1-5} = \frac{\lambda \overline{N}_{u5}}{5L} = \frac{546 \cdot 0,0338 \text{ W/(mK)}}{0,25\text{m}} = 74 \text{ W/(m}^2 \text{K)} \quad (1.18)$$

Заменом вредности коефицијената преласка топлоте у израз за снагу загревања (снагу која се одводи са површи струјањем ваздуха):

$$q_5 = (74 \text{ W/(m}^2 \text{K)} \cdot 0,25\text{m} - 67 \text{ W/(m}^2 \text{K)} \cdot 0,20\text{m}) \cdot 1\text{m} \cdot (230 - 25)\text{K} = 1050\text{W} \quad (1.19)$$

Снага загревања шестог грејача:

$$q_6 = \overline{\alpha}_{1-6} \cdot 6Lw(\vartheta_p - \vartheta_\infty) - \overline{\alpha}_{1-5} \cdot 5Lw(\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.20)$$

$$q_6 = (\overline{\alpha}_{1-6} \cdot 6L - \overline{\alpha}_{1-5} \cdot 5L)w(\vartheta_p - \vartheta_\infty) \quad (1.21)$$

Израчунавање средњег коефицијената преласка топлоте од почетка плоче до краја шестог грејача:

$$R_{e6} = 6R_{e1} = 6,84 \cdot 10^5 \quad (1.22)$$

$$\overline{N}_{u6} = (0,037 \cdot (6,84 \cdot 10^5)^{4/5} - 871)0,69^{1/3} = 753 \quad (1.23)$$

$$\overline{\alpha}_{1-6} = \frac{\lambda \overline{N}_{u6}}{6L} = \frac{753 \cdot 0,0338 \text{ W/(mK)}}{0,30\text{m}} = 85 \text{ W/(m}^2 \text{K)} \quad (1.24)$$

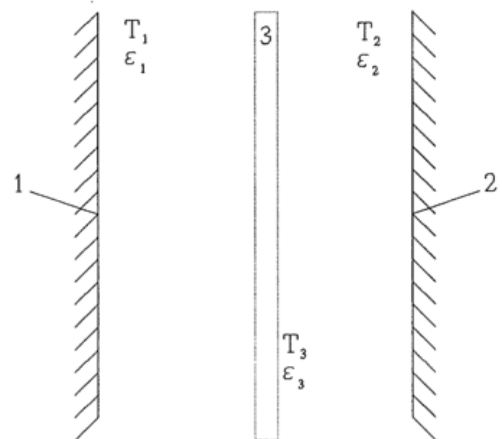
Заменом вредности коефицијената преласка топлоте у израз за снагу загревања:

$$q_6 = (85 \text{ W/(m}^2 \text{K)} \cdot 0,30\text{m} - 74 \text{ W/(m}^2 \text{K)} \cdot 0,25\text{m}) \cdot 1\text{m} \cdot (230 - 25)\text{K} = 1440\text{W} \quad (1.25)$$

Однос снага загревања на три „кандидата“ (грејач 1, грејач 5 и грејач 6) за највећу снагу загревања је  $q_6 > q_1 > q_5$ , што значи да је максимална снага загревања 1440 W.

## ЗАДАТАК 2

а) Извести израз за површинску густину снаге којом се енергија размењује зрачењем између две паралелне велике површи 1 и 2, које се налазе на температурама  $T_1$  и  $T_2$  и чије површи имају својства идеално сивог тела, коефицијента сивоће  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , респективно. Апсорпциона својства су карактерисана коефицијентима апсорпције, који су једнаки коефицијентима сивоће (емисивностима).



Слика 2.1

Због величине површи може се сматрати да су ивични ефекти занемарљиво мали.

б) Какав се ефекат постиже постављањем застора (екрана) између тих површи? Коefицијент сивоће екрана (плоче која се умеће) износи  $\varepsilon_3$ .

### Решење

а) Према законима зрачења са дела површи 1, површине  $S$  (која се налази на температури  $T_1$ ), се емитује енергија снагом  $q_1$ . Осим тога, од ње се рефлектује и део енергије које услед зрачења долази са површи 2 и поново се враћа ка површи 2. На основу тога се за укупну снагу којом се енергија преноси зрачењем са дела површи 1 може написати:

$$q_{1u} = q_1 + (1 - A_1) \cdot q_{2u} \quad (2.1)$$

Аналогно, укупна снага којом се енергија преноси зрачењем са дела површи 2 износи:

$$q_{2u} = q_2 + (1 - A_2) \cdot q_{1u} \quad (2.2)$$

где  $q_{iu}$ ,  $q_i$  и  $A_i$  представљају укупну снагу преноса енергије зрачењем, снагу зрачења сагласно *Stefan-Boltzman*-овом закону и коefицијент апсорпције површи  $i$  ( $i = 1, 2$ ).

Решавањем претходног система од две једначине са две непознате ( $q_{1u}$  и  $q_{2u}$ ) се добија:

$$q_{1u} = \frac{q_1 + q_2 - A_1 \cdot q_2}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2} \quad (2.3)$$

$$q_{2u} = \frac{q_1 + q_2 - A_2 \cdot q_1}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2} \quad (2.4)$$

Снага којом се енергија размењује зрачењем између делова посматраних површи се добија као разлика ових снага, што се за  $T_1 > T_2$  исказује једначином:

$$q = q_{1u} - q_{2u} \quad (2.5)$$

Заменом израза за  $q_{1u}$  и  $q_{2u}$  се добија

$$q = \frac{A_2 \cdot q_1 - A_1 \cdot q_2}{A_1 + A_2 - A_1 \cdot A_2} \quad (2.6)$$

Ако се у изразу (2.6) изврше замене  $A_i = \varepsilon_i$  (коefицијент апсорпције тела је једнак његовом коefицијенту сивоће) и вредности  $q_i$  (по *Stefan-Boltzman*-овом закону зрачења сивог тела)

$$q_i = C_c \cdot \left(\frac{T_i}{100}\right)^4 \cdot S = C_c \cdot \varepsilon_i \cdot \left(\frac{T_i}{100}\right)^4 \cdot S \quad (2.7)$$

добија се израз за тражену снагу, који гласи:

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left( \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) S \quad (2.8)$$

Из њега се једноставно долази и до траженог израза за површинску густину снаге којим се енергија зрачењем размењује између ових површи, дељењем снаге са површином  $S$ . Он гласи:

$$q_s = \frac{q}{S} = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left( \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right) \quad (2.9)$$

где  $C_c$  представља константу зрачења црног тела, која је једнака *Stefan-Boltzman*-овој константи помноженој са  $10^8$  ( $C_c = \sigma_c \cdot 10^8 = 5,67 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ ).  $C$  представља константу зрачења сивог тела и једнака је производу константе зрачења црног тела и коефицијента сивоће ( $\epsilon$ ).

Као бројни пример, посматрајмо како се мења површинска густина снаге ( $q_s$  у  $\text{kW}/\text{m}^2$ ), којом се енергија размењује између површи чија је емисивност  $\epsilon_1 = 0,8$  и површи чија је емисивност  $\epsilon_2 = 0,4$ , а температура  $T_2 = 293 \text{ K}$  у зависности од температуре  $T_1$  (K). Резултати израчунавања дати су скупом парова ( $T_1, q_s$ ):

$$\{(673; 4,1), (773; 7,2), (873; 11,8), (973; 18,3), (1073; 27,2), (1173; 38,9)\}$$

б) За размену енергије између површи 1 и 3, односно 3 и 2 (слика 2.1) важи иста релација која је изведена за случај размене енергије зрачењем између површи 1 и 2, када између њих не постоји екран. Дакле, може се написати:

$$q_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.10)$$

односно

$$q_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \left( \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.11)$$

При писању једначина (2.10) и (2.11) је претпостављено стационарно стање и занемарен је топлотни отпор провођењу топлоте кроз плочу 3 (екран), из чега следи да су обе граничне површи екрана на истој температури.

За даље решавање је погодно увести ознаке:

$$C_{13} = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} \quad (2.12)$$

$$C_{32} = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_3} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \quad (2.13)$$

У стационарном стању снаге размене енергије између површи 1 и екрана, односно површи 2 и екрана ( $q_{13}$  и  $q_{32}$ ) су једнаке, па се може написати једначина:

$$C_{13} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 \right) = C_{32} \left( \left( \frac{T_3}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (2.14)$$

Њеним решавањем по температури  $T_3$  се добија:

$$\left( \frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{C_{13} \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + C_{32} \left( \frac{T_2}{100} \right)^4}{C_{13} + C_{32}} \quad (2.15)$$

Заменом претходног израза у израз (2.10), добија се израз за снагу размене енергије између површи 1 и 2 када између њих постоји радијациони екран:

$$q = q_{13} = q_{32} = \frac{C_{13} \cdot C_{32}}{C_{13} + C_{32}} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.16)$$

Заменом вредности  $C_{13}$  и  $C_{32}$  се добија коначан израз за снагу размене енергије зрачењем између две бесконачно велике паралелне површи између којих је постављен екран:

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.17)$$

Ефекат постављања екрана се може најбоље уочити ако се упореде изрази (2.8) и (2.17). Постављањем екрана се смањује снага размене енергије зрачењем. За мале вредности емисивности екрана ( $\varepsilon_3$ ) тај ефекат је нарочито изражен (за  $\varepsilon_3 \rightarrow 0$  следи  $q \rightarrow 0$ ). Ова појава се у пракси веома често примењује у циљу смањења размене енергије зрачењем.

Примера ради, површинска густина снаге којом се енергија размењује између две паралелне велике површи, чије су емисивности  $\varepsilon_1 = 0,8$  и  $\varepsilon_2 = 0,4$ , убацивањем алуминијумског екрана (чија је емисивност  $\varepsilon_3 = 0,05$ ) се смањује за 93,4%. Овај резултат се добија на основу израза (2.8) и (2.17) и не зависи од температура  $T_1$  и  $T_2$ .

### ЗАДАТАК 2 – решење помоћу радијационе шеме

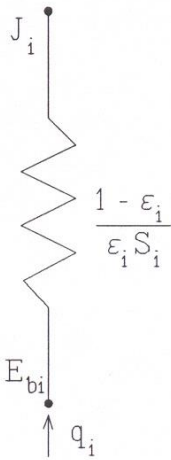
На часовима предавања (Часови 7 до 9), су изведене формуле за:

1. Снагу којом се енергија одводи са површи тела која се може приказати елементом мреже са слике 2.2:

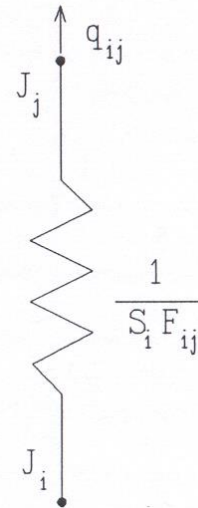
$$q_i = \frac{E_{bi} - J_i}{\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} \cdot S_i} \quad (2.18)$$

2. Снагу размене енергије између две површи ( $i$  и  $j$ ), која се може приказати елементом мреже датим на слици 2.3:

$$q_i = \sum_{j=1}^N S_i \cdot F_{ij} \cdot (J_i - J_j) = \sum_{j=1}^N q_{ij} \quad (2.19)$$



Слика 2.2



Слика 2.3

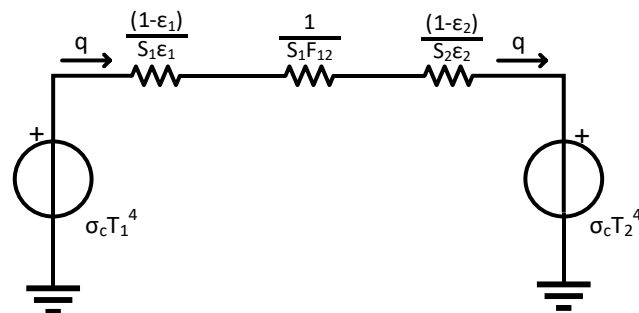
На основу представљених формула и њихових графичких приказа лако се могу формирати радијационе шеме.

а) За случај две паралелне велике површи на температурама  $T_1$  и  $T_2$  биће формирана радијациона шема са два чвора чији се потенцијали одређују на основу израза за површинску густину снаге зрачења црног тела на датим температурама.

Између ових чворова се размењује енергија зрачењем кроз отпоре који узимају у обзир

- 1) несавршеност зрачења сивог тела, преко емисивности и
- 2) количину енергије која доспева са једног на друго тело, преко фактора виђења.

Дакле, снага размене енергије зрачењем између две површи на свом путу „види“ три елемента отпорности, као што је то приказано на слици 2.4.



Слика 2.4 – Радијациона шема за две паралелне површи

На основу приказане радијационе шеме се лако долази до израза за снагу којом се енергија размењује између две велике паралелне површи, при чему се претпоставља да су им површине једнаке ( $S$ ) и да је фактор виђења између њих 1.

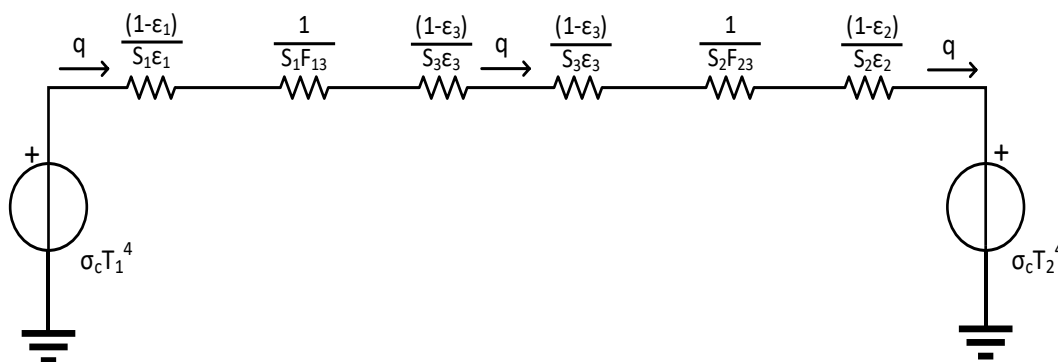


$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (2.20)$$

$$= \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S$$

Лако се уочава да је добијен исти израз као једнакост (2.8).

б) У случају постојања екрана између две велике паралелне површи могуће је формирати једну радијациону шему приказану на слици 2.5. У екрану (уметнутој плочи) нема ни извора ни понора енергије, односно енергија која долази од површи 1 ка површи 3 одлази од површи 3 ка површи 2 (претпоставка да је површ 1 топлија од површи 2).



Слика 2.5 – Радијациона шема за две паралелне површи са екраном између њих

Сада се лако може написати израз за снагу размене енергије зрачењем између две велике паралелне површи који одговара изразу (2.17):

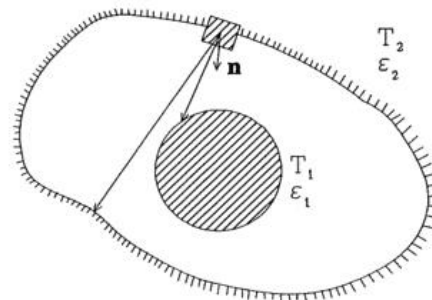
$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{13} S_1} + \frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3 S_3} + \frac{1}{F_{23} S_2} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} \quad (2.21)$$

$$= \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{13}} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{23}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$q = \frac{C_c}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + 2 \left( \frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right)} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) S \quad (2.22)$$

### ЗАДАТАК 3

Извести израз за снагу којом се енергија размењује зрачењем између две површи 1 и 2 (где површ 2 обухвата површ 1 – слика 3.1) које се налазе на температурама  $T_1$  и  $T_2$  и чије површи имају својства идеално сивих тела, коефицијента сивоће  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , респективно. Коефицијенти апсорпције су једнаки коефицијентима сивоће. Површина

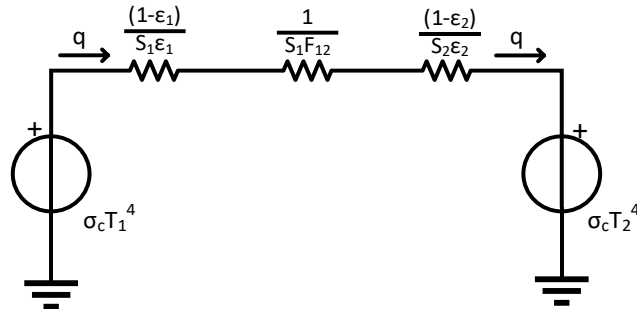


Слика 3.1

површи између којих се размеђује енергија зрачењем износи  $S_1$  и  $S_2$ .

### Решење

Решење задатка се своди на постављање радијационе шеме са два чвора, по један за свако од тела на различитим температурама и различитих површина.



Слика 3.2 – Радијациона шема за две површи од којих једна обухвата другу

У овом примеру површине два тела нису једнаке, а фактор виђења између прве и друге површи је једнак 1, јер како друга површ окружује прву, јасно је да све што се израчи са површи 1 доспева на површ 2.

На основу приказане радијационе шеме добија се израз за снагу размене енергије између две површи од којих се прва налази унутар друге:

$$q = \frac{\sigma_c T_1^4 - \sigma_c T_2^4}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 S_1} + \frac{1}{F_{12} S_1} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 S_2}} = \frac{\sigma_c (T_1^4 - T_2^4) S_1}{\frac{1}{\epsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} \quad (3.9)$$

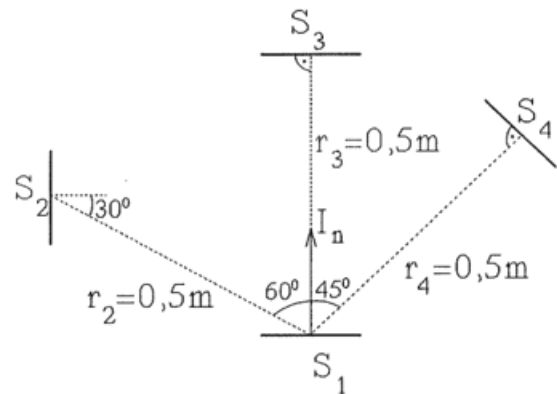
$$q = \frac{C_c S_1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{S_1}{S_2} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} \left( \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right) \quad (3.10)$$

Добијена једнакост одговара изразу (3.8).

### ЗАДАТАК 4

Мала површ површине  $S_1 = 10^{-3} \text{ m}^2$  зрачи дифузно. Измерена вредност јачине зрачења у правцу нормале, по јединици површине површи која зрачи износи  $I_n, s = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$ . Зрачењу ове мале површи су изложене три површи површина  $S_2 = S_3 = S_4 = 10^{-3} \text{ m}^2$ , које су удаљене 0,5 m од површи  $S_1$  (користиће се иста ознака за површ и вредност њене површине).

а) Колика је јачина зрачења по јединици површине  $S_1$  у сваком од три правца, дефинисаним „тачкастим“ површима  $S_2, S_3$  и  $S_4$ ? Положај и оријентација површи  $S_1, S_2, S_3$  и



Слика 4.1

$S_4$  приказани су на слици 4.1.

б) Под којим се просторним угловима из „тачкасте“ површи  $S_1$  виде површи  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ ?

в) Колика је снага зрачења која се са површи  $S_1$  емитује до површи  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ ?

### Решење

а) Код дифузног извора зрачења, вредност јачине зрачења се његове елементарне површи, подељена са површином елементарне површи пројектованом на правац зрачења, је иста у свим правцима, што се исказује једначином:

$$\frac{I_n}{dS} = \frac{I_\varphi}{dS \cdot \cos \varphi} \quad (4.1)$$

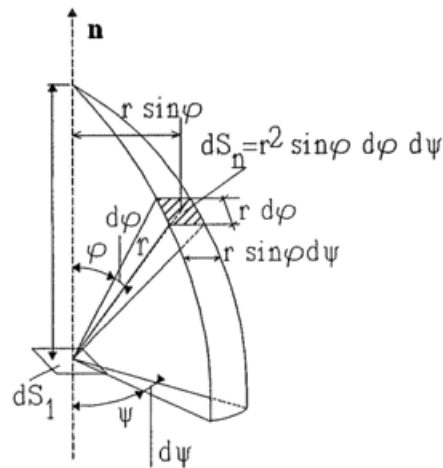
Из овог услова се добија веза између јачине зрачења у произвољном правцу, дефинисаном углом  $\varphi$  (у односу на нормалу) и јачине зрачења у правцу нормале, која гласи:

$$I_\varphi = I_n \cdot \cos \varphi \quad (4.2)$$

Дакле, расподела јачине зрачења код дифузног извора врши се по *Lambert*-овом косинусном закону. Применом израза (4.2) се добијају тражене вредности  $I_{2,S} = 3500 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$ ,  $I_{3,S} = 7000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$  и  $I_{4,S} = 4950 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{srad})$ .

б) Елементарни просторни угао  $d\omega$  је дефинисан као простор ограничен зрацима, повученим из центра сфере, којима се види елементарни део сфере. Он је одређен односом површине елемента сфере  $dS_n$  и квадратом полупречника сфере:  $d\omega = dS_n/r^2$ .

Малој површи произвољног облика и оријентације одговара просторни угао, под којим се она види из дефинисане тачке, који је једнак односу површине њене пројекција на раван управну на правац одређен дефинисаном тачком и малом површи која се посматра и квадрата одстојања. Елементарни просторни угао који одговара правцу дефинисаном угловима  $\varphi$  и  $\psi$  у сферном координатном систему се одређује на начин приказан на слици 4.2.



$$d\omega = \frac{dS_n}{r^2} = \sin \varphi d\varphi d\psi$$

Слика 4.2

Све четири површи са слике 4.1 се могу сматрати диференцијалним („тачкастим“), јер важи  $S_j/r_j^2 \ll 1$ . Дакле,  $d\omega_j = dS_{n,j}/r_j^2$ , где је  $dS_{n,j} = dS_j \cdot \cos \varphi_j$ , а  $\varphi_j$  угао између правца нормале и правца упадног зрачења. Тражени просторни углови имају вредности:

$$\omega_{1-2} = \frac{10^{-3} \cdot \cos 30^\circ}{0,5^2} = 3,46 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (4.3)$$

$$\omega_{1-3} = \frac{10^{-3} \cdot \cos 0^\circ}{0,5^2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (4.4)$$

$$\omega_{1-4} = \frac{10^{-3} \cdot \cos 0^\circ}{0,5^2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ srad} \quad (4.5)$$

в) Обзиром да су све површи диференцијалне („тачкасте“, „елементарне“), снага зрачења која се са површи  $S_1$  емитује до површи  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  се одређује као производ просторног угла под којим се види површ  $S_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) и интензитета у том правцу, односно према изразу:

$$q_{1-i} = I_{\varphi_{1,i}} \cdot \omega_{1-i} \quad (4.6)$$

где је

$$I_{\varphi_{1,i}} = I_n \cdot \cos \varphi_{1,i} = I_{n,S} \cdot S_1 \cdot \cos \varphi_{1,i} \quad (4.7)$$

У изразу (4.7),  $\varphi_{1,i}$  представља угао између правца зрачења и нормале на површ  $S_1$ .

Применом израза (4.7), добијају се снаге зрачења са површи  $S_1$  до површи  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$ :

$$q_{1-2} = 12,1 \text{ mW}, q_{1-3} = 28 \text{ mW} \text{ и } q_{1-4} = 19,8 \text{ mW}.$$

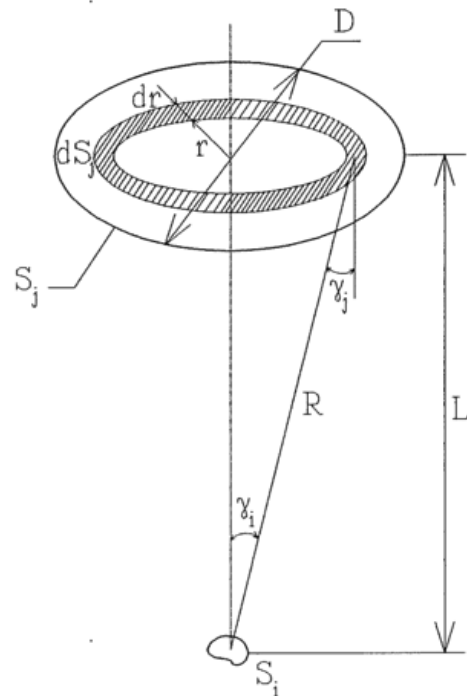
Задржимо се на појмовима тачкастог извора зрачења и тачкастог пријемника зрачења. Извор зрачења се може посматрати као тачкасти ако се са његове сваке елементарне површи тачка у којој се посматра зрачење тела види под истим углом у односу на нормалу. У том случају су јачине зрачења са свих елементарних делова исте (без обзира на њихову просторну расподелу са елементарног дела површи); просторна расподела зрачења површи тела је збирни резултат зрачења са њених елементарних делова. Расподела зрачења са елементарних делова, као карактеристика површи која зрачи, има идентичан облик за све елементарне површи. Извор се тада може свести на тачку, у односу на коју се могу дефинисати и просторни углови. Површ која је пријемник зрачења се може сматрати тачкастом површи ако се сви њени делови виде под истим углом са сваке од тачака на површи извора зрачења. Тада се могу дефинисати просторни углови под којима се са сваке елементарне површи извора (са сваке тачке површи извора) види пријемник зрачења.

## ЗАДАТАК 5

Посматрајмо диск пречника  $D$  (површине  $S_j$ ) и равну површ површине  $S_i$  која је много мања од површине диска ( $S_j$ ). Диск и равна површ су паралелни. Равна површ мале површине се налази на растојању  $L$  од центра диска, лоцирана око нормале која пролази кроз центар диска. Одредити фактор виђења површи  $S_j$  са површи  $S_i$  ( $F_{i \rightarrow j}$ ).

### **Решење**

Обзиром да се површ површине  $S_i$  може сматрати тачкастим извором зрачења (углови  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$  и растојање  $R$  са слике 5.1 су приближно константни за све тачке површи  $S_i$ ) када се посматра енергија која се зрачи до површи диска, израз за фактор виђења се своди на:



Слика 5.1

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos \gamma_i \cdot \cos \gamma_j}{\pi R^2} dS_j \quad (5.1)$$

односно, обзиром да је  $\gamma_i = \gamma_j = \gamma$  (слика 5.1):

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{S_j} \frac{\cos^2 \gamma_i}{\pi R^2} dS_j \quad (5.2)$$

Интеграција по површи  $S_j$  може се извршити поделом диска на концентричне прстенове полупречника  $r$  и ширине  $dr$ , за које су  $\gamma$  и  $R$  константни, слика 5.1 ( $dS_j = 2\pi r dr$ ,  $R^2 = r^2 + L^2$ ,  $\cos \gamma = L/R$ ), на начин

$$F_{i \rightarrow j} = \int_{r=0}^{D/2} \frac{1}{\pi(r^2 + L^2)} \left( \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right)^2 \cdot 2\pi r dr = 2L^2 \int_{r=0}^{D/2} \frac{r dr}{(r^2 + L^2)^2} = \frac{D^2}{4L^2 + D^2} \quad (5.3)$$

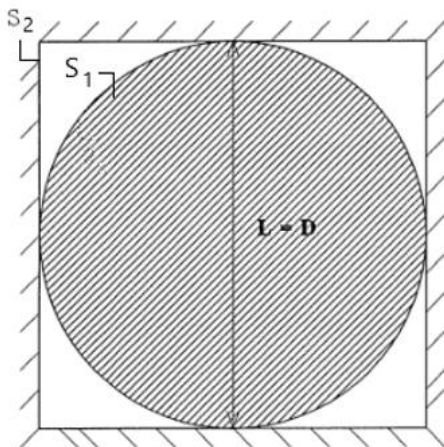
Дакле, до површи диска се преноси део укупне снаге зрачења са површи малог тела који је једнак:

$$\frac{D^2}{4L^2 + D^2} \quad (5.4)$$

## ЗАДАТАК 6

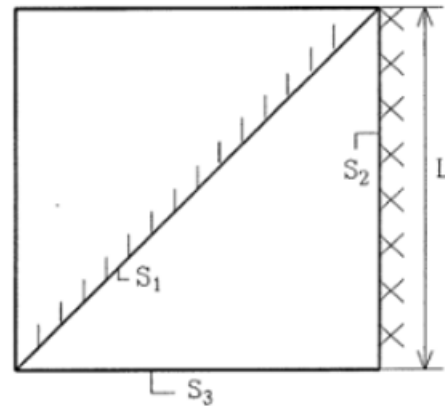
Одредити факторе виђења површи  $S_2$  са површи  $S_1$  ( $F_{12}$ ) и површи  $S_1$  са површи  $S_2$  ( $F_{21}$ ) за следеће геометрије:

а) сфера пречника  $D$  унутар коцке стране  $L$ , која је једнака пречнику  $D$ ,



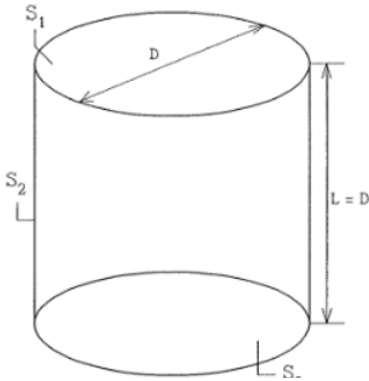
Слика 6.1

б) површ дијагоналног пресека и једна површ канала квадратног попречног пресека стране  $L$ ,

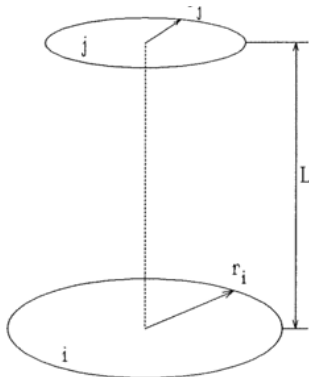


Слика 6.2

в) базис и омотач цилиндричне цеви пречника  $D$  и дужине  $L$ , која је једнака пречнику  $D$ .



Слика 6.3



Слика 6.4

У литератури се могу пронаћи изложени поступци за одређивање фактора виђења између појединачних површи. Поступци се базирају на формулама или графичким зависностима како би се избегло решавање сложених интеграла при решавању практичних проблема. Једна од формула које се обично дају у литератури је за фактор виђења између коаксијалних паралелних дискова различитих полупречника (слика 6.4). Поступак је следећи:

$$R_i = \frac{r_i}{L}$$

$$R_j = \frac{r_j}{L}$$

$$s = 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2} \quad (6.1)$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \left( s - \sqrt{s^2 - 4 \left( \frac{r_j}{r_i} \right)^2} \right)$$

### Решење

а) Обзиром да целокупна снага зрачења са површи 1 долази до површи 2, важи:

$$F_{12} = 1 \quad (6.2)$$

Сада се  $F_{21}$  може израчунати као:

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_{12} = \frac{4 \left( \frac{D}{2} \right)^2 \pi}{6L^2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} \quad (6.3)$$

б) За површ  $S_1$  може се написати:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (6.4)$$

Обзиром да је површ 1 равна, сопствени фактор виђења има вредност:

$$F_{11} = 0 \quad (6.5)$$

На основу симетрије може се написати:

$$F_{12} = F_{13} \quad (6.6)$$

Једноставним решавање претходних једначина, добија се вредност:

$$F_{12} = \frac{1}{2} \quad (6.7)$$

Сада се може одредити и  $F_{21}$ :

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_{12} = \frac{L\sqrt{2}}{L} \cdot 0,5 = 0,71 \quad (6.8)$$

в) Применом поступка за одређивање фактора виђења између коаксијалних паралелних дискова различитих пречника, изложеног у тексту изнад, за фактор  $F_{31}$  се добија:

$$R_1 = R_3 = R = \frac{D/2}{D} = 0,5$$

$$s = 1 + \frac{1 + R^2}{R^2} = 1 + \frac{1 + 0,25}{0,25} = 6 \quad (6.9)$$

$$F_{13} = \frac{1}{2} \left( 6 - \sqrt{6^2 - 4 \left( \frac{D/2}{D/2} \right)^2} \right) \approx 0,17$$

Фактор  $F_{12}$  се може одредити применом следећег израза:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad (6.10)$$

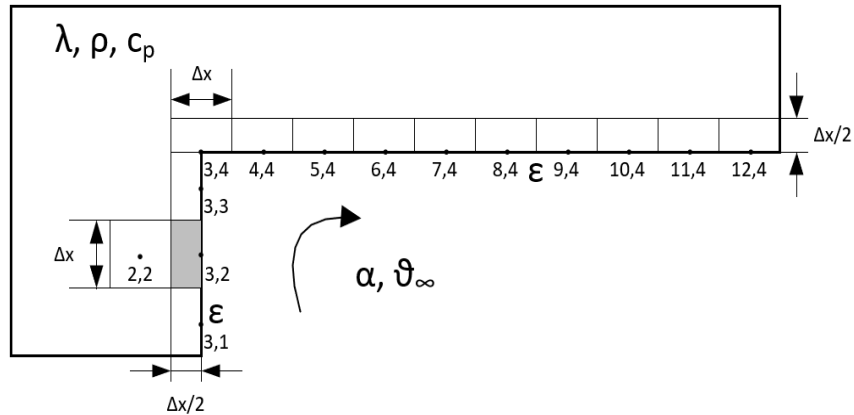
где су:  $F_{11} = 0$  и  $F_{13} = 0,17$ . Дакле, добија се вредност  $F_{12} = 0,83$ .

Фактор виђења  $F_{21}$  је једнак:

$$F_{21} = \frac{S_1}{S_2} \cdot F_{12} = \frac{\pi D^2}{\pi DL} \cdot 0,83 \approx 0,21 \quad (6.11)$$

## ЗАДАТАК 7

Применом методе коначних елемената написати једначину енергетског биланса за елемент топлопроводне средине на координати (3, 2). При постављању израза који обухвата и временску променљивост температуре, користити експлицитну методу. По запремини нема генерисања топлоте. Димензије и положај елемента су приказани на слици 1. Топлотна проводност материјала је  $\lambda$ , специфични топлотни капацитет је  $c_p$ , густина  $\rho$  и коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид температуре  $\vartheta_\infty$  је  $\alpha$ . Коефицијент сивоће површи износи  $\varepsilon = 1$ . Уважити размену топлоте зрачењем са сваким елементом, при чему се код одређивања размене топлоте између два елемента може сматрати да су они елементарни, занемарљиво малих димензија (димензија по дубини је мала).



Слика 7.1

### Решење

Једначине по методи коначних елемената постављају се на основу енергетског биланса и из њега проистеклог биланса снага, примењеног на поједине елементе.

$$P_{gen} = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (7.1)$$

где су:

- $P_{gen}$  - укупна снага којом се енергија генерише у посматраном елементу,
- $P_{akum}$  - укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу, и
- $P_{prenosa}$  - снага којом се енергија размењује са осталим елементима.

Нема генерисања енергије по запремини материјала, па је  $P_{gen} = 0$ .

Укупна снага којом се енергија акумулише у посматраном елементу износи:

$$P_{akum} = \rho c_p \Delta x \frac{\Delta x}{2} L \frac{d\vartheta_{3,2}}{dt} \quad (7.2)$$

Извод температуре по времену у једначини се мора дискретизовати. У супротном, добијена једначина би била диференцијална једначина првог реда, а одређивање расподеле температуре у коначном (али јако великом) броју елемената би изискивао решавање система диференцијалних једначина. Уколико се извод по времену у једначини дискретизује, добија се систем алгебарских једначина.

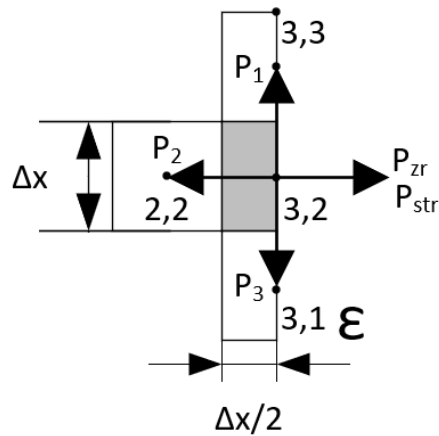
Пошто се ради о експлицитној методи, извод по времену се дискретизује као количник разлике температура посматраног елемента у наредном ( $p+1$ -ом) и текућем ( $p$ -том) тренутку и одговарајућег корака временске дискретизације ( $\Delta t$ ).

$$\frac{d\vartheta_{m,n}}{dt} \approx \frac{\vartheta_{m,n}^{p+1} - \vartheta_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (7.3)$$

Заменом овог израза у претходну једначину добија се коначан израз за снагу којом се енергија акумулише у посматраном елементу:

$$P_{akum} = \rho c_p \frac{(\Delta x)^2}{2} L \frac{\vartheta_{3,2}^{p+1} - \vartheta_{3,2}^p}{\Delta t} \quad (7.4)$$





Слика 7.2

Топлотна енергија се са тела на околину може пренети провођењем, струјањем и зрачењем:

$$P_{prenosa} = P_{prov} + P_{str} + P_{zr} \quad (7.5)$$

На слици 2 су приказане снаге којима се енергија размењује са суседним елементима и снаге којима се енергија преноси струјањем на флуид и зрачењем у околину. Свака од поменутих снага може се изразити помоћу температура поменутих елемената и параметара средине.

За посматрани елемент, снага преноса топлоте провођењем се састоји из три члана који обухватају снаге преноса топлоте ка елементима на координатама (3,3), (2,2) и (3,1).

$$P_{prov} = \sum_{k=1}^3 P_k \quad (7.6)$$

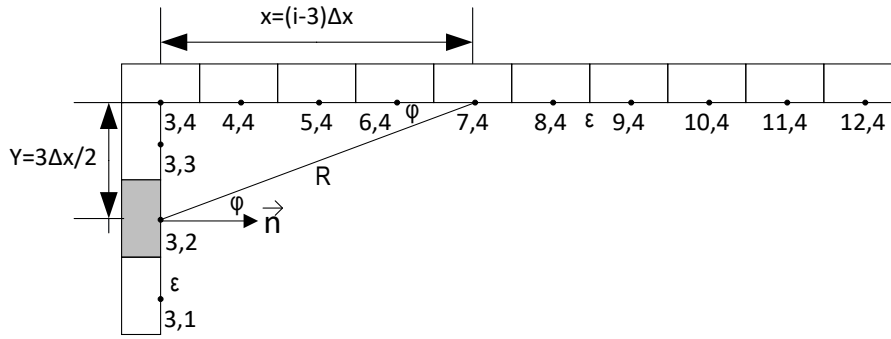
$$P_1 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L} \frac{\Delta x}{2}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,3}^p}{\frac{2}{\lambda L}} \quad (7.7)$$

$$P_2 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{2,2}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L} \Delta x} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{2,2}^p}{\frac{1}{\lambda L}} \quad (7.8)$$

$$P_3 = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,1}^p}{\frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{L} \frac{\Delta x}{2}} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{3,1}^p}{\frac{2}{\lambda L}} \quad (7.9)$$

Снага преноса топлоте струјањем са елемента на околни флуид је:

$$P_{str} = \frac{\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{\infty}^p}{\frac{1}{\alpha} \frac{1}{L} \Delta x} = \alpha L \Delta x (\vartheta_{3,2}^p - \vartheta_{\infty}^p) \quad (7.10)$$



Слика 7.3

Топлота се са посматраног елемента може пренети зрачењем на хоризонталне елементе са координатама од (3,4) до (12,4), при чему се за сваки од два посматрана елемента мора одредити фактор виђења. Према тексту задатка површи су елементарне. Основна формула за фактор виђења за случај елементарних површи, примењена на случај фактора виђења између површи (3,2) и површи (i,4),  $i=3,4, \dots, 12$ , износи:

$$F_i = \frac{1}{S_{3,2}} \int_{S_{3,2}} \int_{S_{i,4}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} dS_{3,2} dS_{i,4} = \frac{1}{S_{3,2}} \int_{S_{3,2}} dS_{3,2} \int_{S_{i,4}} dS_{i,4} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} \quad (7.11)$$

$$= \frac{S_{3,2} S_{i,4}}{S_{3,2}} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} = \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\pi R^2} S_{i,4}$$

где је угао  $\varphi$  угао између потега од посматране до једне од хоризонталних елементарних површи ( $R$ ) и нормале на посматрану елементарну површ са координатама (3,2), као на слици 3. Тригонометријске функције посматраних углова  $\varphi$  могу се изразити на следећи начин:

$$\sin \varphi = \frac{y}{R} \quad (7.12)$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{R} \quad (7.13)$$

Како се за све посматране случајеве растојање елементарних површи по у координати не мења и износи  $y = \frac{3\Delta x}{2}$ , потег  $R$  се на основу ознака на слици 3 може изразити као

$$R^2 = ((i-3)\Delta x)^2 + y^2 = (i-3)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{3}{2}\Delta x\right)^2 = \left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right) \Delta x^2 \quad (7.14)$$

Заменом израза (7.14) у (7.12) и (7.13) добијају се коначни изрази за тригонометријске функције:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{3}{2}\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right) \Delta x^2}} = \frac{3}{2\sqrt{\frac{9}{4} + (i-3)^2}} \quad (7.15)$$

$$\cos \varphi = \frac{(i-3)\Delta x}{\sqrt{\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right) \Delta x^2}} = \frac{(i-3)}{\sqrt{\frac{9}{4} + (i-3)^2}} \quad (7.16)$$

Површина елементарне површи се може изразити као:

$$S_{i,4} = L\Delta x \quad (7.17)$$

Конечан израз за фактор виђења је

$$F_i = \frac{\frac{3}{2}(i-3)}{\pi\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)^2} L \quad (7.18)$$

Снага преноса топлоте зрачењем се, за случај црног тела, одређује помоћу наредне једноставне формуле:

$$P_{zr} = \sum_{i=3}^{12} F_i \cdot L \Delta x \cdot \varepsilon \sigma_c \left( (\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (7.19)$$

$$P_{zr} = \sum_{i=3}^{12} \frac{3(i-3)}{2\pi\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)^2} L L \Delta x \varepsilon \sigma_c \left( (\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (7.20)$$

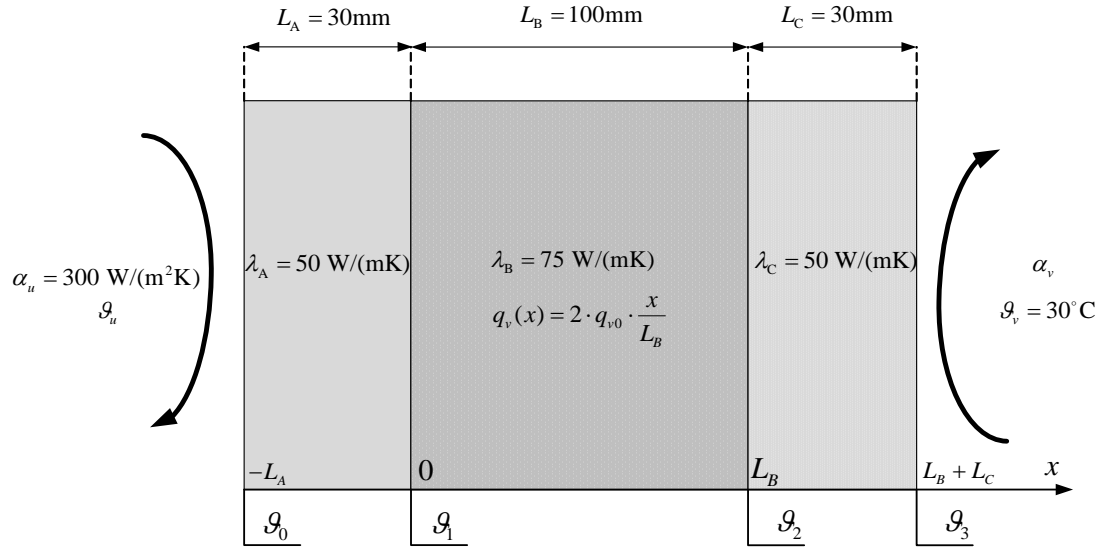
$$P_{zr} = \sum_{i=3}^{12} \frac{3(i-3)}{2\pi\left(\frac{9}{4} + (i-3)^2\right)^2} L^2 \varepsilon \sigma_c \left( (\vartheta_{3,2}^p + 273,15)^4 - (\vartheta_{i,4}^p + 273,15)^4 \right) \quad (7.21)$$

У случају сивог тела ( $\varepsilon < 1$ ) проблем постаје много комплекснији и мора се поставити комплетна радијациона шема, односно решити систем једначина који одговара радијационој шеми.

## ЗАДАТАК 8

Раван зид се састоји из три слоја, израђених од различитих материјала А, В и С. У слоју В се по запремини генерише топлота запреминском густином снаге  $q_v(x) = 2 \cdot q_{v0} \cdot \frac{x}{L_B}$  ( $q_{v0} = 250 \cdot 10^3 \text{ W/m}^3$ ). Димензије и топлотне проводности слојева су дате на слици. Гранична површ слоја А се хлади уљем непознате температуре ( $\vartheta_u$ ), уз коефицијент преноса топлоте струјањем  $\alpha_u = 300 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ , а гранична површ слоја С се хлади водом температуре  $\vartheta_v = 30^\circ\text{C}$ , при чему коефицијент преласка топлоте струјањем зависи од разлике температура граничне површи и воде ( $\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$ ) на следећи начин:  $\alpha_v(\theta) = \alpha_{v0} \cdot (|\theta|/20)^{0,25}$  ( $\alpha_{v0} = 1000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ ).

Одредити непознату температуру уља тако да се тачно четвртина укупне снаге генерисане у слоју В преноси на уље. Колико износе температуре  $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ? Колико износи максимална температура слоја В?

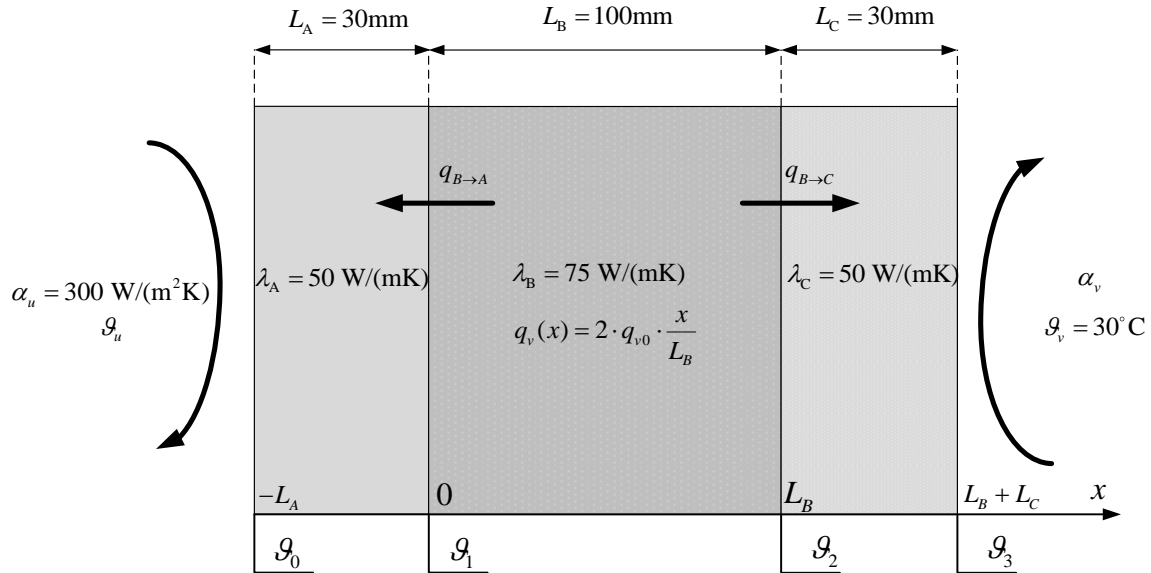


Слика.8.1

**Решење**

Укупна снага којом се топлота генерише у области В добија се интеграцијом запреминске густине снаге по запремини области В:

$$q_{genB} = \iiint_B q_v \cdot dV = \int_{x=0}^{L_B} q_v(x) \cdot S \cdot dx = \frac{q_{v0} \cdot S}{L_B} (L_B^2 - 0) = q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (8.1)$$



Слика 8.2

На основу услова задатка да се четвртина снаге генерисане у области В преноси на уље, снаге којима се енергија преноси из области В ка области А ( $q_{B \rightarrow A}$ ) и из области В ка области С ( $q_{B \rightarrow C}$ ) (слика 8.2) износе:

$$q_{B \rightarrow A} = \frac{1}{4} \cdot q_{genB} = \frac{1}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B \quad (8.2)$$

$$q_{B \rightarrow C} = q_{genB} - q_{B \rightarrow A} = \frac{3}{4} \cdot q_{genB} = \frac{3}{4} \cdot q_{v0} \cdot S \cdot L_B$$

С обзиром да се посматра устаљено стање, без генерисања топлоте у области С, целокупна снага која се из области В пренесе ка области С се преноси струјањем на воду. На основу тога се одређује температура  $\vartheta_3$  ( $\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v$ ):

$$q_{strujanja_{v}} = q_{B \rightarrow C} = \alpha_v(\theta) \cdot S \cdot \theta = \frac{\alpha_{v0} \cdot S}{20^{0,25}} \cdot \theta^{1,25} \quad (8.3)$$

$$\theta = \left( \frac{q_{B \rightarrow C} \cdot 20^{0,25}}{\alpha_{v0} \cdot S} \right)^{0,8} = \left( \frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot 20^{0,25}}{4 \cdot \alpha_{v0}} \right)^{0,8} = 19^\circ C \quad (8.4)$$

$$\theta = \vartheta_3 - \vartheta_v \Rightarrow \vartheta_3 = \theta + \vartheta_v = 49^\circ C \quad (8.5)$$

$$\vartheta_2 - \vartheta_3 = q_{B \rightarrow C} \cdot R_C^T = q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} \quad (8.6)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 + q_{B \rightarrow C} \cdot \frac{L_C}{\lambda_C \cdot S} = \vartheta_3 + \frac{3 \cdot q_{v0} \cdot L_B \cdot L_C}{4 \cdot \lambda_C} = 60,25^\circ C \quad (8.7)$$

Расподела температуре у области В добија се решавањем опште температурне једначине која за поменућу област има следећи облик:

$$\lambda_B \cdot \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + q_v(x) = 0 \quad (8.8)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = - \frac{q_v(x)}{\lambda_B} = - \frac{2 \cdot q_{v0} \cdot x}{\lambda_B \cdot L_B} \quad (8.9)$$

Њено опште решење се добија двоструком интеграцијом:

$$\vartheta(x) = - \frac{q_{v0} \cdot x^3}{3 \cdot \lambda_B \cdot L_B} + C_1 \cdot x + C_2 \quad (8.10)$$

Интеграционе константе које фигуришу у (8.10) могу се одредити из граничних услова за десну граничну површ слоја В (на тој граничној површи познајемо и вредност температуре и њен градијент – у овом случају извод по  $x$  координати).

$$\vartheta(L_{B-}) = \vartheta_2$$

$$- \lambda_B \cdot \frac{d\vartheta}{dx}(L_{B-}) \cdot S = q_{B \rightarrow C} \quad (8.11)$$

Након одређивања интеграционих константи, уврштавањем њихових вредности у једначину (8.10) може се добити температура  $\vartheta_1$ :

$$\vartheta_1 = \vartheta(0) = C_2 = 63,027^\circ C \quad (8.12)$$

Остале непознате температуре се добијају на следећи начин:

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} \Rightarrow \vartheta_0 = \vartheta_1 - R_A^T \cdot q_{B \rightarrow A} = 59,28^\circ C \quad (8.13)$$

$$q_{B \rightarrow A} = \alpha_u \cdot S \cdot (\vartheta_0 - \vartheta_u) \Rightarrow \vartheta_u = \vartheta_0 - \frac{q_{B \rightarrow A}}{\alpha_u \cdot S} = 38,44^\circ C \quad (8.14)$$

Вредност  $x$  координате на којој се постиже максимална температура у области В ( $x^*$ ) може се добити диференцирањем расподеле температуре која је дата изразом (8.10) и

изједначавањем добијеног израза са нулом. Потом се заменом у (8.10), за тако добијену вредност  $x^*$ , добија максимална температура у области В.

$$x^* = \frac{L_B}{2} = 50 \text{ mm} \quad (8.15)$$

$$\vartheta_{max B} = \vartheta(x^*) = 65,81^\circ\text{C} \quad (8.16)$$

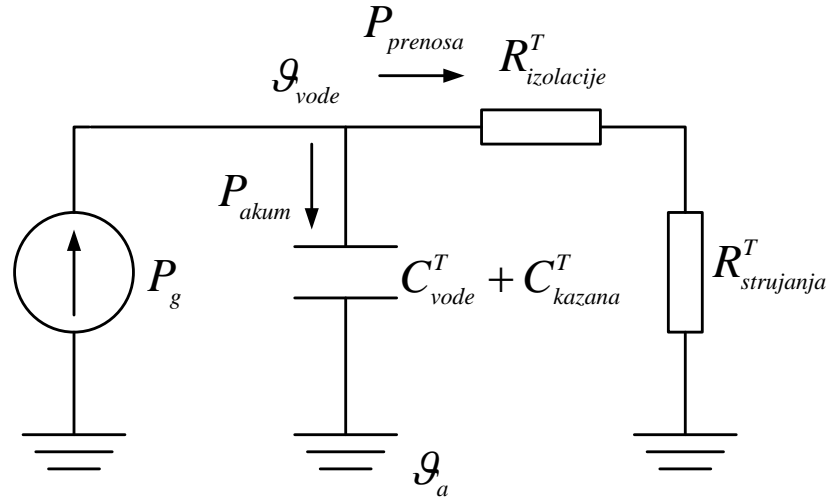
### **ЗАДАТАК 9**

У бојлеру запремине 50l налази се вода на температури амбијента  $\vartheta_a = 20^\circ\text{C}$ . Бојлер поседује “on-off” (хистерезисни) регулатор који искључује грејач када температура воде пређе подешену вредност за 5 К, а укључује грејач када температура воде падне испод подешене вредности за 5 К. Израчунати утрошену електричну енергију (у kWh) у периоду од 24h ако је подешена температура у бојлеру  $90^\circ\text{C}$ . Сматрати да се у бојлеру током посматраних 24h не размењује вода. Техничке карактеристике бојлера су: снага грејача  $P_{gr} = 2 \text{ kW}$ , маса казана  $m_k = 9,5 \text{ kg}$ , површина казана (унутрашња површина топлотне изолације)  $S_u = 0,8 \text{ m}^2$ , дебљина топлотне изолације око казана, специфичне топлотне проводности  $\lambda = 0,1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ,  $\delta = 30 \text{ mm}$ , спољашња површина бојлера (спољашња површина топлотне изолације)  $S_s = 1 \text{ m}^2$ . Коефицијент преласка топлоте струјањем са спољашње површи на ваздух износи  $\alpha_s = 5 \text{ W/(m}^2\text{K)}$ , а коефицијент преласка топлоте струјањем са воде на казан  $\alpha_u \gg \alpha_s$ . Густина воде износи  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ , специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$  и специфични топлотни капацитет казана  $c_{pk} = 474 \text{ J/(kgK)}$ . Топлотни отпор преносу топлоте кроз топлотну изолацију казана израчунавати по формула за раван зид површине  $(S_u + S_s) / 2$ .

#### ***Решење***

При моделовању бојлера за потребе посматране анализе извршена су следећа занемарења: занемарен је отпор преношењу топлоте кроз воду и зид казана, као и топлотни капацитет изолације. Сматра се да маса воде и зид бојлера представљају изотермичку запремину.

Пошто се вода у бојлеру на почетку посматраног интервала (дужине 24h) налази на температури амбијента, хистерезисни регулатор укључује грејач. Топлотна шема која приказује загревање воде у бојлеру је приказана на слици.



Слика 9.1

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_V \cdot V \cdot c_{pv} = 214,5 \text{ kJ/K} \quad (9.1)$$

Укупан отпор преласку топлоте ка околини износи:

$$R^T = R_{izolacije}^T + R_{strujanja}^T = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta}{\frac{S_s + S_u}{2}} + \frac{1}{\alpha \cdot S_s} = 0,5333 \text{ K/W} \quad (9.2)$$

Укупна снага којом грејач генерише топлотну енергију представља збир снаге којом се енергија акумулише у води и казану (што се манифестује повећањем њихових температура) и снаге којом се енергија преноси ка амбијенту.

$$P_g = P_{akum} + P_{prenosa} \quad (9.3)$$

при чему су горе наведене снаге дате изразима:

$$P_{akum} = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (9.4)$$

$$P_{prenosa} = \frac{\theta}{R^T} \quad (9.5)$$

Са  $\theta$  је означен пораст температуре воде и казана у односу на амбијент.

Треба напоменути да ова анализа и њени резултати важе само под условом да нема протока воде кроз бојлер. У супротном би се јавиле додатне компоненте снаге којом се енергија размењује са амбијентом, јер би посматрани систем представљао отворени систем са протоком флуида. У том случају би и варијације температуре воде по запремини бојлера биле веће, па би се поставило питање оправданости претпоставке да унутрашњост бојлера представља изотермичку запремину.

Заменом израза (9.4) и (9.5) у једначину (9.3) се добија диференцијална једначина која описује промену пораста температуре воде и казана у односу на амбијент.

$$P_g = C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R^T} \quad (9.6)$$

Даљим сређивањем се добија једначина у следећој форми:

$$R^T \cdot P_g = R^T \cdot C^T \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (9.7)$$

$$R^T \cdot P_g = \tau \cdot \frac{d\theta}{dt} + \theta \quad (9.8)$$

где је са  $\tau$  означена временска константа система. Њено решење има следећи облик:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad (9.9)$$

где је са  $\theta_0$  означен пораст температуре у почетном тренутку (у овом случају је он једнак нули), а са  $\theta_\infty$  пораст температуре у стационарном стању (које би се достигло када би загревање трајало неограничено дуго, што овде није случај).

У стационарном стању нема промене температуре, те је извод температуре (па и пораста температуре) једнак нули:

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (9.10)$$

те се заменом у једначину (9.8) добија:

$$\theta_\infty = P_g \cdot R^T \quad (9.11)$$

У тренутку  $t^*$  пораст температуре достиже вредност  $\theta^*$  (који у овом случају одговара температури воде од 95°C). Време  $t^*$  се израчунава из једначине (9.9) примењене за тренутак  $t^*$ :

$$\theta^* = \theta_0 \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} + \theta_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\tau}}\right) \quad (9.12)$$

$$(\theta_0 - \theta_\infty) \cdot e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \theta^* - \theta_\infty \quad (9.13)$$

$$e^{-\frac{t^*}{\tau}} = \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (9.14)$$

$$-\frac{t^*}{\tau} = \ln \frac{\theta^* - \theta_\infty}{\theta_0 - \theta_\infty} \quad (9.15)$$

$$t^* = \tau \cdot \ln \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta^* - \theta_\infty} \quad (9.16)$$

Израз (9.16) је општи и важи како за загревање, тако и за хлађење и у даљем тексту ће бити искључиво коришћен.

За конкретан случај, време загревања воде од 20°C до 95°C износи:

$$t_{zagr1} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{0 - 0,5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 2000} = 2,3168h \quad (9.17)$$

Након што температура воде достигне 95°C, регулатор искључује грејач и вода у бојлеру почиње да се хлади. За време хлађења од 95°C до 85°C се добија:

$$t_{hladjenja} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 0}{(85 - 20) - 0,5333 \cdot 0} = 4,547h \quad (9.18)$$



Након што температура воде падне на 85°C, регулатор поново укључује грејач и температура воде у бојлеру почиње да расте. Време загревања воде од 85°C до 95°C износи:

$$t_{zagrevanja} = 0,5333 \cdot 214,503 \cdot 10^3 \cdot \ln \frac{(85 - 20) - 0,5333 \cdot 2000}{(95 - 20) - 0,5333 \cdot 2000} = 0,3188h \quad (9.19)$$

Анализира се период од 24h. На почетку тог периода, вода се загрева од 20°C до 95°C. Након тога се одиграва више циклуса хлађења од 95°C до 85°C и загревања од 85°C до 95°C. Један такав циклус траје:

$$t_{ciklusa} = t_{zagrevanja} + t_{hladjenja} = 4,8658h \quad (9.20)$$

Укупан број таквих циклуса у току дана је:

$$n = \frac{24h - 2,3168h}{4,8658h} = 4,45 \quad (9.21)$$

Пети циклус започиње хлађењем воде. Оно не стигне да се заврши у току посматраног дана јер је:

$$24h - 2,3168h - 4 \cdot 4,8658h = 2,22h < 4,547h \quad (9.22)$$

Закључак је да се загревање воде од 85°C до 95°C обави четири пута у току дана. Укупна утрошена електрична енергија у току једног дана износи:

$$\begin{aligned} W_{el} &= P_g \cdot (t_{zagr1} + 4 \cdot t_{zagrevanja}) = 2 \text{ kW} \cdot (2,3168h + 4 \cdot 0,3188h) = \\ &= 4,6336 \text{ kWh} + 2,5504 \text{ kWh} = 7,184 \text{ kWh} \end{aligned} \quad (9.23)$$

## **ЗАДАТАК 10**

Вода у бојлеру запремине 80 литара са грејачем снаге 2 kW се загреје са 20°C на 75°C, после чега се грејач искључи и остаје трајно искључен. Колико дуго је могуће „пријатно туширање“, које настаје одмах по искључењу грејача, протоком воде 5 литара у минути и температуре 40°C уколико је температура воде из водовода а) 15°C и б) 8°C? Снага преноса топлоте од воде ка амбијенту се током туширања може занемарити. Густина воде износи  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$ , специфични топлотни капацитет воде  $c_{pv} = 4200 \text{ J/(kgK)}$ , специфични топлотни капацитет металног казана  $c_{pk} = 474 \text{ J/(kg K)}$ , а његова тежина  $c_{pk} = 20 \text{ kg}$ . Топлотни капацитет изолације се може занемарити.

### **Решење**

Топлотни капацитет казана и воде износи:

$$C^T = C_{kazana}^T + C_{vode}^T = m_k \cdot c_{pk} + \rho_v \cdot V \cdot c_{pv} = 345,48 \text{ kJ/K} \quad (10.1)$$

Топлотна енергија акумулирана у бојлеру и расположива за туширање, које се, по услову задатка, заврши кад температура не може да буде већа од 40°C, је

$$E_b = C^T (\vartheta_{poc} - \vartheta_{kr}) \quad (10.2)$$

где је  $\vartheta_{poc} = 75^\circ\text{C}$  и  $\vartheta_{kr} = \vartheta_{potrš} = 40^\circ\text{C}$ .

Енергија која се троши током туширања је

$$E_{tuš} = \int_{t=0}^{t_{tuš}} \rho_v c_{pv} Q_v (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) dt = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) \int_{t=0}^{t_{tuš}} dt = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) t_{tuš} \quad (10.3)$$

Максимално је за туширање могуће искористити енергију одређену изразом (10.2), па важи

$$C^T (\vartheta_{poc} - \vartheta_{potrš}) = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod}) t_{tuš} \quad (10.4)$$

Време „пријатног“ туширања једнако је

$$t_{tuš} = \frac{C^T (\vartheta_{poc} - \vartheta_{potrš})}{\rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{potrš} - \vartheta_{vod})} \quad (10.5)$$

Заменом бројних вредности добија се а)  $t_{tuš} = 23 \text{ min}$  и б)  $t_{tuš} = 18 \text{ min}$ .

## ЗАДАТАК 11

Једножилни кабл пресека бабра (специфична електрична проводност на  $20^\circ\text{C}$   $\sigma_{20 \text{ Cu}} = 56 \cdot 10^6 \text{ S/m}$  и коефицијент линеарног пораста специфичне електричне отпорности са температуром  $\alpha_{\text{Cu}20} = 4,29 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ )  $S_{\text{Cu}} = 95 \text{ mm}^2$ , са PVC изолацијом дебљине изолације  $d_{iz} = 1 \text{ mm}$  (топлотне специфичне проводности  $\lambda_i = 0,16 \text{ W/(mK)}$ ) положена је у тло специфичне топлотне отпорности  $\rho_z = 2,5 \text{ (mK)/W}$ . Максимална дозвољена температура PVC изолације износи  $\vartheta_{doz} = 70^\circ\text{C}$ , а температура земље удаљене од кабла  $\vartheta_z = 20^\circ\text{C}$ . Одредити максимално дозвољену вредност једносмерне струје која протиче кроз кабл за два случаја: а) да је кабл положен директно у тло, б) да је постављен у кошуљицу сачињену од материјала специфичне топлотне отпорности  $\rho_{zk} = 1 \text{ (mK)/W}$  - сматрати да је спољашња површ кошуљице цилиндар пречника  $D_k = 200 \text{ mm}$ . При израчунавању сматрати да се као "удаљено референтну тло", на коме је температура једнака  $\vartheta_z = 20^\circ\text{C}$ , може узети цилиндар пречника  $D_{ref} = 1000 \text{ mm}$ .

### *Решење*

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_{zk}} \cdot \ln\left(\frac{D_k}{D_s}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_k}\right) \quad (11.1)$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_i} \cdot \ln\left(\frac{D_s}{D_u}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda_z} \cdot \ln\left(\frac{D_{ref}}{D_s}\right) \quad (11.2)$$

где је:

- $\lambda_i$  - специфична топлотна проводност изолације кабла,
- $\lambda_{zk}$  - специфична топлотна проводност материјала кошуљице,
- $\lambda_z$  - специфична топлотна проводност тла (земље),
- $D_k$  - пречник (еквивалентно по обиму) спољне површи кошуљице (за израчунавање за реалну геометрију, круг у правоугаонику, видети лабораторијску вежбу 3.).

Пречници проводника и проводника са изолацијом једнаки су:

$$D_u = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 95}{\pi}} = 10.998\text{mm} \approx 11\text{mm} \quad (11.3)$$

$$D_s = D_u + 2\delta_{iz} = 11\text{mm} + 2\text{mm} = 13\text{mm} \quad (11.4)$$

- Са кошуљицом:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,16 \frac{W}{mK}} \cdot \ln\left(\frac{13\text{mm}}{11\text{mm}}\right) + \frac{1 \frac{mK}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{200\text{mm}}{13\text{mm}}\right) + \frac{2,5 \frac{mK}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000\text{mm}}{200\text{mm}}\right) \quad (11.5)$$

$$= 1,242 \frac{Km}{W}$$

- Без кошуљице:

$$R_l^T = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0,16 \frac{W}{m \cdot K}} \cdot \ln\left(\frac{13\text{mm}}{11\text{mm}}\right) + \frac{2,5 \frac{m \cdot K}{W}}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{1000\text{mm}}{13\text{mm}}\right) = 1,89 \frac{Km}{W} \quad (11.6)$$

Електрична отпорност проводника једнака је:

$$R_{Cu} = \frac{1}{\sigma \cdot S} (1 + \alpha(70 - 20)) = \frac{1}{56 \cdot 95} (1 + 4,29 \cdot 10^{-3} \cdot 50) = 2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \quad (11.7)$$

Једначина енергетског биланса гласи:

$$R_{Cu} I^2 = \frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_l^T} \quad (11.8)$$

Одавде добијамо израз за дозвољену струју:

$$I = \sqrt{\frac{\vartheta_{doz} - \vartheta_z}{R_{Cu} R_l^T}} \quad (11.9)$$

- Са кошуљицом:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 20}{2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1,242 \frac{K}{W}}} = 420,2 \text{ A} \quad (11.10)$$

- Без кошуљице:

$$I = \sqrt{\frac{70 - 20}{2,28 \cdot 10^{-4} \Omega m \cdot 1,89 \frac{K}{W}}} = 340,6 \text{ A} \quad (11.11)$$

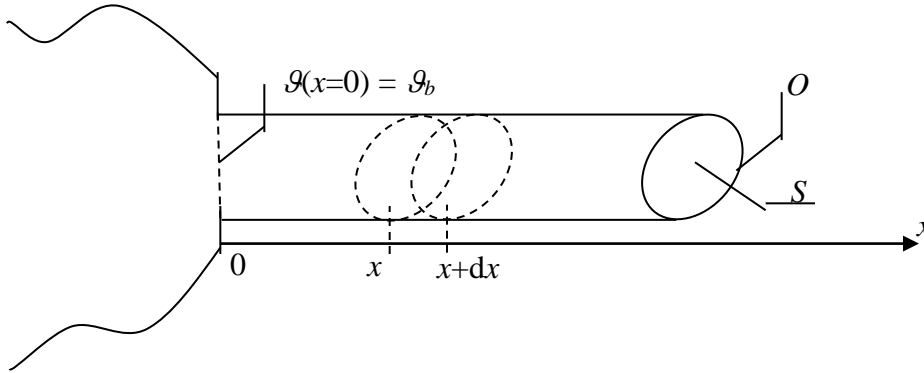
## **ЗАДАТАК 12**

Написати израз за промену температуре дуж ребра за хлађење ослоњеног на тело са кога се топлота одводи снагом  $P$ . Површина попречног пресека ребра износи  $S$ , а његов обим  $O$ . Дужина ребра износи  $L$ , а специфична топлотна проводност  $\lambda$ . Коefицијент преласка топлоте струјањем на омотачу ребра има вредност  $\alpha_1$ , а на базису  $\alpha_2$ . Користити тачан

гранични услов на базису ребра који се хлади. Занемарити компоненту хлађења ребра зрачењем. Позната је вредност температуре амбијента (ваздуха)  $\vartheta_a$ .

### Решење

Математички исказ енергетског биланса, за елементарни део ребра, дужине  $dx$ , на растојању  $x$  од тела на које је ребро ослоњено (слика 12.1) гласи:



Слика 12.1

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{strujanja} \quad (12.1)$$

где је  $q_x$  снага којом се топлота преноси провођењем у правцу осе  $x$  (на месту  $x$ ), а  $dq_{strujanja}$  снага којом се топлота одводи струјањем са омотача ребра дужине  $dx$ . Зависност снаге провођења од координате  $x$  гласи:

$$q_x = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (12.2)$$

па је њен диференцијал, у случају да се попречни пресек ребра не мења по координати  $x$ , једнак:

$$\Delta q_x = q_{x+dx} - q_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \quad (12.3)$$

Израз (12.3) важи само за линеарну топлопроводну средину тј. средину где је вредност топлотне проводности константна. Снага којом се енергија одводи струјањем са омотача једног делића дужине  $dx$  је

$$dq_{strujanja} = \alpha_1 \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (12.4)$$

Уврштавањем у једначину (12.1) израза за диференцијал функције (12.3) и снаге преноса топлоте струјањем (12.4), долази се до следећег израза:

$$\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx = \alpha_1 \cdot O \cdot dx \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (12.5)$$

односно до диференцијалне једначине расподеле температуре дуж ребра за хлађење:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\alpha_1 \cdot O}{\lambda \cdot S} \cdot (\vartheta(x) - \vartheta_a) \quad (12.6)$$

Опште решење ове диференцијалне једначине, за случај да се коефицијент преласка топлоте не мења дуж ребра, је

$$\vartheta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + \vartheta_a \quad (12.7)$$

где је  $m$  параметар одређен изразом

$$m^2 = \frac{\alpha_1 \cdot O}{\lambda \cdot S} \quad (12.8)$$

Интеграционе константе у општем решењу диференцијалних једначина се одређују на основу граничних услова за два базиса ребра за хлађење.

1. Први гранични услов се поставља за граничну површ ребра ослоњену на тело:

$$P = -\lambda \cdot S \cdot \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} \quad (12.9)$$

2. Други гранични услов се поставља за други базис ребра за хлађење ( $x = L$ ), који је у додиру са расхладним флуидом, температуре  $\vartheta_a$ , при чему је коефицијент преласка топлоте струјањем на флуид  $\alpha_2$ . Прецизан исказ другог граничног услова гласи:

$$-\lambda \cdot \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=L} = \alpha_2 (\vartheta(x=L) - \vartheta_a) \quad (12.10)$$

Заменом израза (12.7) у (12.9), односно (12.7) у (12.10) добија се:

$$-\lambda \cdot S \cdot (C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot 0} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot 0}) = P \quad (12.11)$$

$$-\lambda \cdot (C_1 \cdot m \cdot e^{m \cdot L} - C_2 \cdot m \cdot e^{-m \cdot L}) = \alpha_2 (C_1 e^{m \cdot L} + C_2 e^{-m \cdot L} + \vartheta_a - \vartheta_a) \quad (12.12)$$

Из једначине (12.11) се долази до:

$$C_2 = \frac{P}{\lambda S m} + C_1 \quad (12.13)$$

Заменом израза (12.13) у израз (12.12) добија се:

$$-\lambda m \cdot \left( C_1 e^{mL} - \frac{P}{\lambda S m} \cdot e^{-mL} - C_1 e^{-mL} \right) = \alpha_2 (C_1 e^{mL} + \frac{P}{\lambda S m} \cdot e^{-mL} + C_1 e^{-mL}) \quad (12.14)$$

$$-\lambda m C_1 \cdot (e^{mL} - e^{-mL}) + \frac{P}{S} \cdot e^{-mL} = \alpha_2 C_1 \cdot (e^{mL} + e^{-mL}) + \frac{P \alpha_2}{\lambda S m} \cdot e^{-mL} \quad (12.15)$$

$$2\alpha_2 C_1 \cdot \cosh(mL) + 2\lambda m C_1 \cdot \sinh(mL) = \frac{P}{S} \cdot e^{-mL} \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\lambda m} \right) \quad (12.16)$$

$$C_1 = \frac{\frac{P}{S} \cdot e^{-mL} \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\lambda m} \right)}{2(\alpha_2 \cdot \cosh(mL) + \lambda m \cdot \sinh(mL))} \quad (12.17)$$

Коначно, заменом израза (12.17) у израз (12.13) добија се вредност коефицијента  $C_2$

$$C_2 = \frac{P}{\lambda S m} + \frac{\frac{P}{S} \cdot e^{-mL} \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_2}{\lambda m} \right)}{2(\alpha_2 \cdot \cosh(mL) + \lambda m \cdot \sinh(mL))} \quad (12.18)$$

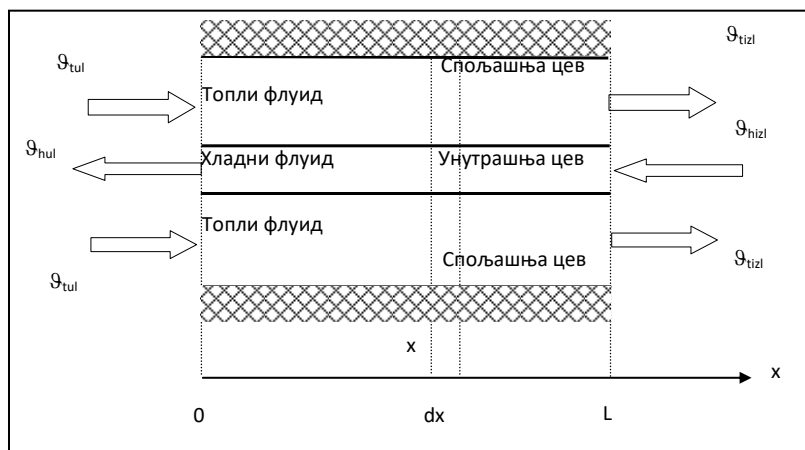
### ЗАДАТАК 13

Коефицијент преласка топлоте, одређен из номиналних података хладњака, износи  $k_p = 455 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ . Вредност фактора хладњака  $F$  је блиска јединици, због чега се хладњак може посматрати као елементарни облик хладњака дужине  $2L_c$  кога сачињавају две цилиндричне коаксијалне цеви кроз које уље и вода протичу у супротним смеровима. Пречник унутрашње цеви (број цеви износи  $N_c = 109$ , а дужина  $L_c = 1,993 \text{ m}$ ), кроз коју протиче вода, износи  $d_{ucv} = 13 \text{ mm}$ , дебљина цеви  $\delta_{cv} = 1 \text{ mm}$ , док је еквиваленти унутрашњи пречник цеви кроз коју протиче уље и која је идеално топлотно изолована од околине,  $d_{ucu} = 22 \text{ mm}$ . Проток воде и уља кроз еквиваленти елементарни хладњак (две концентричне цеви) је  $N_c$  пута мањи од протока кроз стварни хладњак, а коефицијент преласка топлоте исти.

Током зиме, трансформатор је искључен са мреже, и поново укључен после дужег времена ван погона. У тренутку укључења, температура масе уља у суду (температура уља које улази у хладњак) износи  $\vartheta_{tu} = -6^\circ\text{C}$ . Може се сматрати да су протоци уља и воде приближни номиналним ( $Q_{vode} = 4,167 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Q_{ulja} = 22,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ ) и да је коефицијент преласка топлоте једнак вредности у номиналном режиму. Параметри воде и уља:  $\rho_v = 1001 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c_{pv} = 4209 \text{ J}/(\text{kgK})$ ,  $\rho_u = 895 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c_{pu} = 2198 \text{ J}/(\text{kgK})$ . Написати једначине из којих се може одредити минимална температура воде на уласку у хладњак при којој неће долазити до смрзавања воде у хладњаку?

#### Решење

На слици 2.1 приказан је елементарни хладњак са потоком воде и уља у супротном смеру.



Слика 13.1

За температуре означене на слици 2.1 у користе се следеће ознаке:

- $\vartheta_{tul} = \vartheta_{tu}$
- $\vartheta_{tuzl} = \vartheta_{hu}$
- $\vartheta_{hul} = \vartheta_{tv}$
- $\vartheta_{hizl} = \vartheta_{hv}$

На основу текста задатка закључује се да су познате вредности две температуре: температуре уља на уласку у хладњак ( $\vartheta_{tu} = -6^\circ\text{C}$ ) и температуре воде на изласку из хладњака ( $\vartheta_{tv} = 0^\circ\text{C}$ ), а преостале две температуре је потребно одредити.

Јединствени коефицијент преласка топлоте може се одредити као:

$$k_p = \frac{P_{h,el} \cdot \ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)}{S_{hladnjaka}^{sr} (\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} \quad (13.1)$$

где је:

- $\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}$ ,
- $\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}$ ,
- $S_{hladnjaka}^{sr} = d_{cvsr} \pi 2L_c = \frac{d_{ucv} + d_{scv}}{2} \pi 2L_c = \frac{d_{ucv} + (d_{ucv} + 2\delta_{cv})}{2} \pi 2L_c$ ,
- $P_{h,el} = P_h / N_c$ .

НАПОМЕНА: У задатку се у изразу (13.1) користи средња вредност површине. У тексту задатка је дата вредност јединственог коефицијента преноса топлоте, а није назначено у односу на коју површ, као референтну, је он прорачунат, због тога се усваја средња вредност површине спољашње и унутрашње површи. При извођењу овог израза могуће је усвојити и претпоставку да је референтна површ, за прорачун преноса топлоте, унутрашња површ цеви или спољашња површ цеви.

Израз (13.1) се, заменом одговарајућих температура, трансформише у:

$$k_p = \frac{P_{h,el} \cdot \ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}} \right)}{S_{hladnjaka}^{sr} (\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv} - (\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}))} \quad (13.2)$$

По тексту задатка, протоци кроз елементарни хладњак су једнаки:

$$Q_u = \frac{Q_{ulja}}{N_c} \quad (13.3)$$

$$Q_v = \frac{Q_{vode}}{N_c} \quad (13.4)$$

Сва топлота која се одузме (у овом задатку ова топлота је негативна) од топлог флуида (уља) преда се хладном флуиду (води), на основу овога могуће је написати следећа два израза:

$$P_{h,el} = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \quad (13.5)$$

$$P_{h,el} = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (13.6)$$

Израз (13.2) се може записати и као:

$$k_p S_{hladnjaka}^{sr} \left( \frac{\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}}{P_{h,el}} - \frac{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}}{P_{h,el}} \right) = \ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}} \right) \quad (13.7)$$

Заменом израза (13.5) и (13.6) у (13.7) добија се:

$$k_p S_{hladnjaka}^{\text{Sr}} \left( \frac{1}{\rho_v Q_v c_{pv}} - \frac{1}{\rho_u Q_u c_{pu}} \right) = \ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{hv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{tv}} \right) \quad (13.8)$$

Овај израз представља једну од две једначине траженог система једначина. Друга једначина добија се изједначавањем израза (13.5) и (13.6):

$$\rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) = \rho_u Q_u c_{pu} (\vartheta_{tu} - \vartheta_{hu}) \quad (13.9)$$

Решавам система једначина добијају се вредности температура:  $\vartheta_{hu} = -4,61^\circ\text{C}$  и  $\vartheta_{hv} = 3,46^\circ\text{C}$ .

## **ЗАДАТАК 14**

За један трансформатор са ODAF хлађењем одабран је компактан хладњак чија је номинална снага 30% већа од снаге укупних губитака у трансформатору. Сматра се да је снага хлађења на површима суда занемарљиво мала у односу на снагу хлађења на хладњаку. Познати су номинални подаци хладњака: температуре топлог и хладног уља:  $\vartheta_{lum} = 102^\circ\text{C}$  и  $\vartheta_{hlm} = 95,9^\circ\text{C}$ , температуре хладног и топлог ваздуха:  $\vartheta_{hvn} = 40^\circ\text{C}$  и  $\vartheta_{tvn} = 64,55^\circ\text{C}$ , номинална снага  $P_{hn} = 210 \text{ kW}$ , проток уља  $Q_{un} = 68 \text{ m}^3/\text{h}$  и проток ваздуха  $Q_{vn} = 28,29 \text{ m}^3/\text{s}$ . Колико износи процентуално смањење укупног коефицијента преноса топлоте услед запрљања хладњака у тренутку у току експлоатације у коме је температура уља на уласку у хладњак, при оптерећењу при коме је снага губитака једнака номиналној и при температури амбијента  $20^\circ\text{C}$ , једнака номиналној? Проток ваздуха је једнак номиналном. Проток уља је 20% већи од номиналног. Параметри уља и ваздуха су исти као за номиналне услове. При решавању задатка сматрати да хладњак има елементарни облик концентричних цеви кроз које уље и ваздух струје у истом смеру.

### ***Решење***

На основу извођења са часова предавања број 4 (изрази 173 до 186) добија се следећи израз за снагу хлађења:

$$P_{hn} = \frac{K_p S (\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl} - \vartheta_{tul} + \vartheta_{hul})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{tizl} - \vartheta_{hizl}}{\vartheta_{tul} - \vartheta_{hul}} \right)} = \frac{K_p S (\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})}{\ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)} \quad (14.1)$$

За номиналне податке хладњака важи:

$$\Delta\vartheta_{izl} = \vartheta_{lum} - \vartheta_{tvn} = 31,35^\circ\text{C} \quad (14.2)$$

$$\Delta\vartheta_{ul} = \vartheta_{tun} - \vartheta_{hvn} = 62^\circ\text{C} \quad (14.3)$$

Заменом ових вредности у израз (14.1), уз  $P_{hn} = 210 \text{ kW}$  добија се да је:

$$K_p S = \frac{P_{hn} \cdot \ln \left( \frac{\Delta\vartheta_{izl}}{\Delta\vartheta_{ul}} \right)}{(\Delta\vartheta_{izl} - \Delta\vartheta_{ul})} = 4,672 \frac{\text{kW}}{^\circ\text{C}} \quad (14.4)$$

За ваздух и уље можемо написати следеће изразе:

$$P_{hn} = \rho_v Q_{vn} c_{pv} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn}) \quad (14.5)$$



$$P_{hn} = \rho_u Q_{un} c_{pu} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun}) \quad (14.6)$$

Одавде добијамо да је:

$$\rho_v c_{pv} = \frac{P_{hn}}{Q_{vn} (\vartheta_{tvn} - \vartheta_{hvn})} = 0,3024 \frac{kWs}{m^3 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad (14.7)$$

$$\rho_u c_{pu} = \frac{P_{hn}}{Q_{un} (\vartheta_{tun} - \vartheta_{hun})} = 1822,57 \frac{kWs}{m^3 \text{ } ^\circ\text{C}} \quad (14.8)$$

Како је номинална снага хладњака за 30% већа од номиналне снаге губитака имамо да је  $P_h = P_{hn}/1,3 = 161,54 \text{ kW}$ . Проток ваздуха једнак је номиналном  $Q_v = Q_{vn}$ , док је температура опала на  $\vartheta_{hv} = 20^\circ\text{C}$ . Сада, за ову снагу хлађења и овај проток можемо написати израз аналоган изразу (14.5):

$$P_h = \rho_v Q_v c_{pv} (\vartheta_{tv} - \vartheta_{hv}) \quad (14.9)$$

На основу израза (14.9) долазимо до:

$$\vartheta_{tv} = \frac{P_h}{\rho_v Q_v c_{pv}} + \vartheta_{hv} = 38,88^\circ\text{C} \quad (14.10)$$

Проток уља повећао се за 20% на  $Q_v = 1,2 \cdot Q_{vn} = 81,6 \text{ m}^3/\text{h}$ , док је температура уља на уласку у хладњак остала иста  $\vartheta_{tu} = \vartheta_{tun} = 102^\circ\text{C}$ . И за уље се сада може написати израз аналоган изразу (14.10):

$$\vartheta_{hu} = \vartheta_{tu} - \frac{P_h}{\rho_u Q_u c_{pu}} = 98,09^\circ\text{C} \quad (14.11)$$

За стварну снагу хлађења можемо написати израз аналоган изразу (14.1):

$$P_h = \frac{K_p^z S (\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv} - \vartheta_{tu} + \vartheta_{hv})}{\ln \left( \frac{\vartheta_{hu} - \vartheta_{tv}}{\vartheta_{tu} - \vartheta_{hv}} \right)} \quad (14.12)$$

Из претходног израза се добија

$$K_p^z S = \frac{P_h \cdot \ln \left( \frac{\Delta \vartheta_{izl}}{\Delta \vartheta_{ul}} \right)}{(\Delta \vartheta_{izl} - \Delta \vartheta_{ul})} = 2,308 \frac{kW}{^\circ\text{C}}, \quad (14.13)$$

односно

$$\frac{K_p^z S}{K_p S} = \frac{K_p^z}{K_p} = \frac{2,308}{4,672} = 0,494 \quad (14.14)$$

Дакле, услед запрљања дошло је до смањења укупног коефицијента преноса топлоте за 50,6%.